

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. А. МЕЛІК-ВАՐՏԱՆՅԱՆ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОМОВ
 ЧЕБЫШЕВА ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА
 К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

В в е д е н и е

Методы синтеза фильтров и задача приближения функций тесно связаны с методами аппроксимации разработанными выдающимся русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым.

Приближение функций по Чебышеву нашло широкое применение потому, что для многих задач из различных отраслей техники функции Чебышева являются оптимальным решением. В частности в теории фильтров доказывается, что оптимальным решением для функций характеристических параметров в нормированном виде являются функции Чебышева: в этом случае синтез дает наименьшее число элементов.

Менее разработана другая возможность применения этих функций. Рассмотрение полиномов Чебышева в комплексной области, позволяет получить номограммы, пригодные для расчета электрических фильтров по характеристическим параметрам. При этом оказывается возможным учет влияния невосполнимых потерь в элементах фильтра на его частотные характеристики.

Настоящая работа является попыткой использования полиномов Чебышева в этом направлении.

1. Из сравнения полиномов Чебышева в явном виде [1] и гиперболических функций [2] аргументы которых представляют коэффициенты передачи последовательного числа Г-образных полувольев видно, что они отличаются лишь знаками четных членов:

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &= \cos \pi \operatorname{ar} c \cos \pi & ch(0) &= 1 \\
 T_0(x) &= 1 & sh \frac{g}{2} &= \Omega \\
 T_1(x) &= x & ch 2 \cdot \frac{g}{2} &= 2 sh^2 \frac{g}{2} + 1 = 2\Omega^2 + 1 \\
 T_2(x) &= 2x^2 - 1 & sh \frac{3}{2} \cdot g &= 4 sh^3 \frac{g}{2} + 3 sh \frac{g}{2} = 4\Omega^3 + 3\Omega \\
 T_3(x) &= 4x^3 - 3x & ch 2g &= 2 ch^2 g - 1 = 8\Omega^4 + 8\Omega^2 + 1 \\
 T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & sh \frac{5}{2} \cdot g &= sh \left(2g + \frac{g}{2} \right) = 16\Omega^5 + 20\Omega^3 + 5\Omega \\
 T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x & &
 \end{aligned} \tag{2}$$

Легко видеть, что полиномы Чебышева степени n от аргумента $-j\Omega$ помноженные на j^n будут тождественны с функциями (2) поскольку

$$T_n(-j\Omega) = \cos n \operatorname{arccos} \left(-j \operatorname{sh} \frac{g}{2} \right) = \begin{cases} (-j)^n \operatorname{sh} \frac{n}{2} g & n=1,3,\dots \\ (-j)^n \operatorname{ch} \frac{n}{2} g & n=0,2,\dots \end{cases} \quad (3)$$

Приписав знаки и мнимую единицу левой части равенства, мы получим несколько видоизмененные полиномы, называемые гиперболическими функциями Чебышева Th_n :

$$j^n T_n(-j\Omega) = Th_n(\Omega). \quad (4)$$

В явном виде, функции $Th_n(\Omega)$ имеют вид (2).

Аргумент Ω , будучи величиной отвлеченной, в общем случае является комплексом

$$\Omega = \operatorname{sh} \frac{g}{2} = \operatorname{sh} \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2} - j \operatorname{ch} \frac{b}{2} \sin \frac{a}{2} = x + jy \quad (5)$$

и представляет собой удобный параметр для анализа и расчета цепочечных и мостиковых структур.

Как видно из выражения

$$\Omega = \begin{cases} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} & \text{— цепочечные структуры,} \\ \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}} & \text{— мостиковые структуры,} \end{cases} \quad (6)$$

параметр Ω в то же время является функцией частоты ω и по смыслу может быть назван нормированной комплексной частотой.

2. С помощью (4) и (5) модули гиперболических функций Чебышева выражаются в следующем виде:

$$|Th_1(\Omega)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = |\Omega|$$

$$|Th_2(\Omega)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 b + \cos^2 a - 2 \left| \Omega - j \cos \frac{\pi}{4} \right| \left| \Omega + j \cos \frac{\pi}{4} \right|} \quad (7 \text{ а, б, в, г})$$

$$|Th_3(\Omega)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{3}{2} b + \sin^2 \frac{3}{2} a - 2^2 \left| \Omega \right| \left| \Omega - j \cos \frac{\pi}{6} \right| \left| \Omega + j \cos \frac{\pi}{6} \right|}$$

$$|Th_4(\Omega)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 2b + \cos^2 2a - 2^3 \left| \Omega - j \cos \frac{\pi}{8} \right| \left| \Omega + j \cos \frac{\pi}{8} \right| \left| \Omega - j \cos \frac{3\pi}{8} \right| \left| \Omega + j \cos \frac{3\pi}{8} \right|}$$

Выражения 7а, б, в, г дают возможность получить наглядную геометрическую интерпретацию функций $|Th_n(\Omega)|$. На комплексной

плоскости Ω различным, постоянным значениям модуля M , соответствует

а) в случае

$$|Th_1(\Omega)| = M = \text{const} \quad (8)$$

— геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки, нуля полинома Чебышева первой степени, совпадающей с началом координат; кривые представляют собой семейство концентрических окружностей с уравнением

$$x^2 + y^2 = M^2, \quad (8a)$$

б) в случае

$$|Th_2(\Omega)| = M = \text{const} \quad (9)$$

— геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до двух фиксированных точек — нулей полинома Чебышева второй степени, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{2} M$; кривые носят название овалов Кассини, их уравнение, как можно видеть из рис. 1а следующее

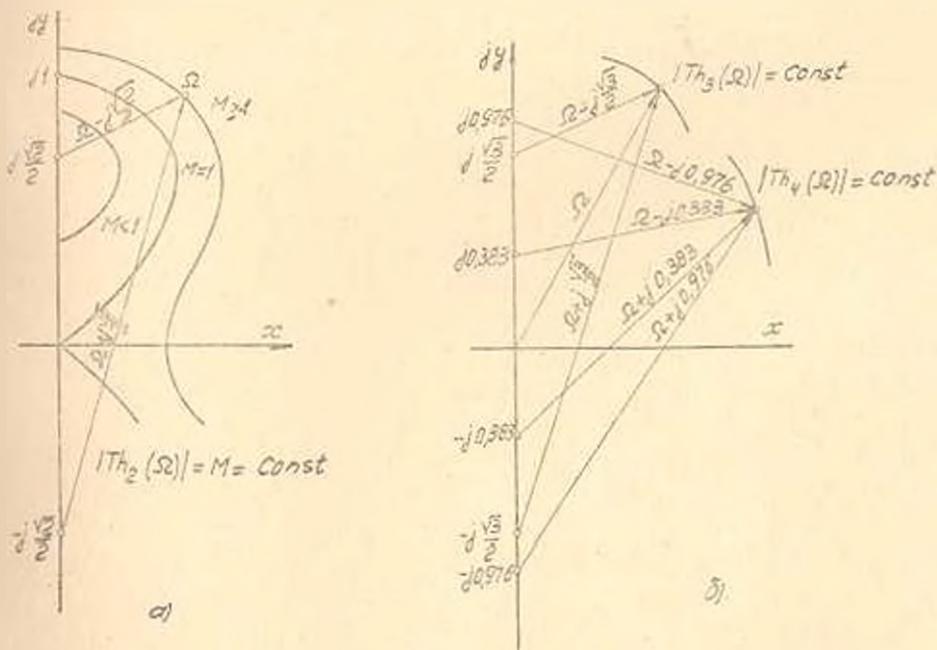


Рис. 1. Места гиперболических чебышевских функций на комплексной плоскости Ω .

$$\left| x^2 + \left(y - \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 \right| \left| x^2 + \left(y + \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 \right| = \frac{M^2}{4}; \quad (9a)$$

в) в случае

$$|Th_3(\Omega)| = M = \text{const} \quad (10)$$

— геометрическое место точек для которых произведение расстояний до трех фиксированных точек — нулей полинома Чебышева третьей степени, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{4}M$ (рис. 16).

Аналогичный смысл имеют и функции более старших степеней. Кривые легко построить, пользуясь „пифагоровым“ соотношением

$$M^2 = sh^2 n \frac{b}{2} + \begin{cases} \sin^2 n \frac{a}{2} & n = 1, 3, \dots \\ \cos^2 n \frac{a}{2} & n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (11)$$

В этих формулах

n — число каскадно соединенных и согласованных по характеристическому сопротивлению Γ -образных структур (для симметричных и антисимметричных фильтров цепочной структуры) (рис. 5а);

$\frac{n}{2}$ — тоже, для симметричных мостиковых структур (рис. 5б).

При построении семейства кривых постоянного модуля M , получается сетка кривых постоянного значения фазовой меры a . Это семейство кривых представляет собой софокусные гиперболы, с фокусами в точках $y = \pm 1$ и с уравнением

$$\frac{x^2}{\cos^2 \frac{a}{2}} - \frac{y^2}{\sin^2 \frac{a}{2}} = -1. \quad (12)$$

Пересечение обоих семейств кривых дает точки с дискретными значениями затухания b . Таким образом, с помощью геометрической интерпретации модулей гиперболических чебышевских функций, на комплексной плоскости мы получаем размещение затуханий и фазовых мер различных цепочечных и мостиковых структур (рис. 2, 3, 4).

4. Из рассмотрения кривых $|Th_n(\Omega)| = \text{const}$ (рис. 3) видно, что гипербола, соответствующая фазе $a = 90^\circ$, является осью наибольших затуханий. Она делит все кривые постоянного M на верхнюю и нижнюю ветви с равномерно убывающими значениями затухания.

Кривая $M = 1$ называемая лемнискатой, делит все кривые семейства на две группы. Внутри лемнискаты находятся кривые с малым затуханием, в том числе значением b равным нулю; вне ее — кривые с большим затуханием, которое нигде на кривых не обращается в нуль. Поскольку по осям абсцисс и ординат отложены, соответственно

$$x = sh \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2} \quad (13)$$

$$y = ch \frac{b}{2} \sin \frac{a}{2} \quad (14)$$

легко показать, что ось y -ов является областью идеальных фильтров, с полосой пропускания на отрезке $0 < y < 1$, полосой задерживания на отрезке $1 < y < \infty$ и с точкой среза при $y = 1$. При рассмотрении фильтров типа m , полосой задерживания является также ось абсцисс. Таким образом частота среза удовлетворяет условию

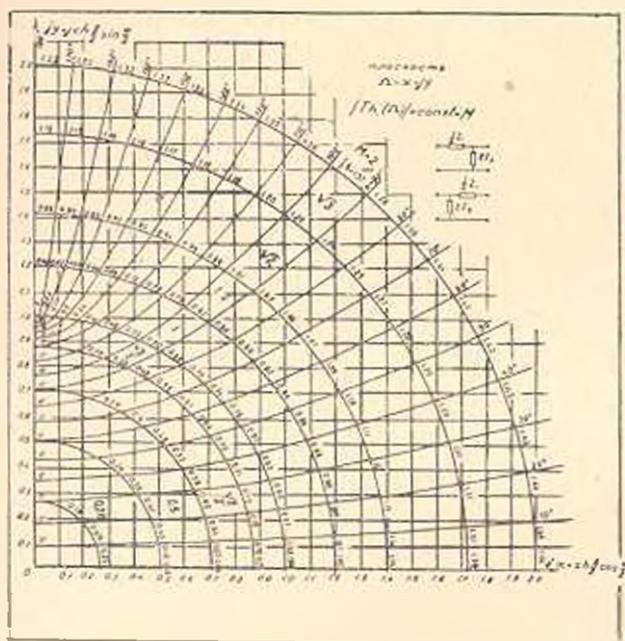


Рис. 2. Модули гиперболических чебышевских функций $Th_n(\Omega)$ на комплексной плоскости Ω .

$$M = |Th_n(\Omega)| = \left| 2 \frac{Z_1}{4Z_2} - 1 \right| = 1. \quad (15)$$

Ось ординат может быть использована при решении задач на идеальные фильтры. Кривые для случаев $n = 1$ и 3 (рис. 2 и 4) обладают аналогичными свойствами.

5. Учет потерь в элементах фильтра приводит к тому, что при всех частотах

$$h < 1 \quad (16)$$

$$a < \infty \quad (17)$$

Это обстоятельство сдвигает все характеристики фильтра в комплексную область. Таким образом, комплексная область, расположенная вблизи от оси ординат — область реальных фильтров, фильтров с потерями. При этом, кверху от оси x -ов расположена область ф. н. ч., книзу от оси x -ов — область ф. в. ч., а рассматриваемые совместно дают область полосных фильтров. Кривые в обеих областях представляют зеркальные изображения (рис. 6).

6. Нормированная частота цепочечных ф. н. ч. (рис. 5г)

$$\Omega = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{1}{4}} \left| \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC \right| \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega^2 LC)^2 + \omega^2 \frac{R_1}{R_2} LC \left(k - \frac{1}{k}\right)} - j \frac{1}{4} \left| \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC \right| \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega^2 LC)^2 + \omega^2 \frac{R_1}{R_2} LC \left(k - \frac{1}{k}\right)} \quad (18)$$

где

$$k = \frac{L}{R_2 C}$$

При $k = 1$, т. е. при условии равенства постоянных времени

$$\frac{L}{R_2} = R_1 C,$$

выражение (18) приводится к виду

$$\Omega = sh \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{R_1}{R_2} - j \frac{1}{2} \omega \left| LC \right| \right| = x - jy. \quad (19)$$

откуда видно, что из двух слагаемых нормированной комплексной частоты, первое слагаемое не зависит от частоты ω , а второе слагаемое прямо ей пропорционально. Это говорит о том, что в области ф. и ч., ось нормированных частот Ω будет идти параллельно оси y -ов (рис. 6).

Из анализа уравнения (18) вытекает, что требование равенства постоянных времени является необходимым. Выражение

$$\frac{L}{R_2} = R_1 C \quad (20)$$

является условием оптимального соотношения параметров, при котором обеспечиваются наименьшие затухания в полосе пропускания фильтра. В самом деле, минимум функции $k + \frac{1}{k}$ имеет место при $k = 1$. При любом положительном k отличном от единицы

$$k + \frac{1}{k} > 2, \quad (21)$$

что связано с возрастанием x и y по сравнению с тем значением, которое имеет место при $k = 1$. Это приводит к смещению характеристик фильтра вправо и вверх. Смещается вправо, в сторону больших затуханий и ось нормированных частот. Затухания в полосе пропускания возрастают. Следует отметить, что у идеальных фильтров постоянные времени также равны между собой: $\frac{L}{R_2} = R_1 C = 0$. Из двух фильтров меньшее затухание в полосе пропускания и лучшее

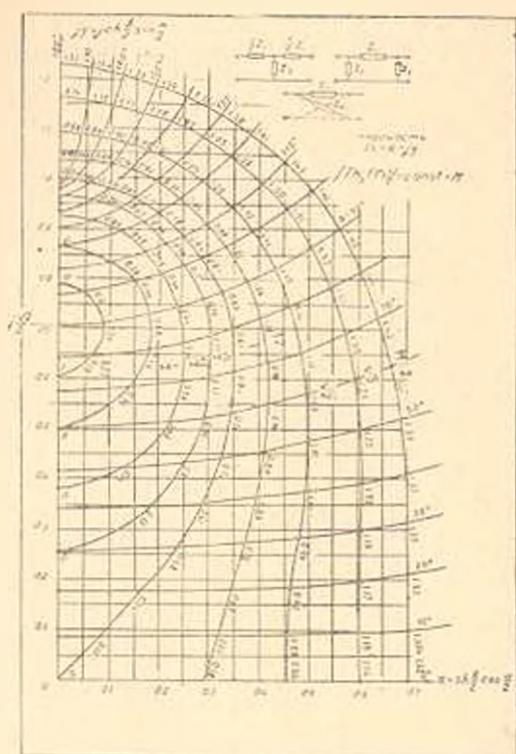


Рис. 3. Модули гиперболических чебышевских функций $\text{Th}_n(\zeta)$ на комплексной плоскости ζ .

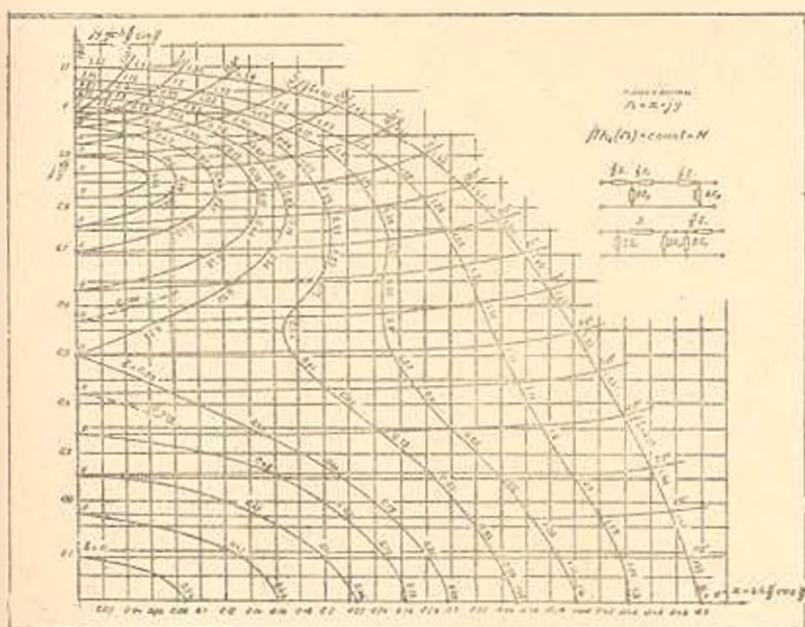


Рис. 4. Модули гиперболических чебышевских функций $\text{Th}_n(\zeta)$ на комплексной плоскости ζ .

разделение частот будет иметь тот, чья ось нормированных частот расположена ближе к оси ординат — оси идеальных фильтров.

7. Не трудно показать, что и в случае ф. в. ч. рис. 5 д) условием оптимального соотношения параметров будет та же зависимость

$$\frac{1}{R_1} = R_2 C. \quad (22)$$

Поскольку в случае ф. в. ч.

$$\Omega = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1} + j\omega LC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{R_2}{R_1} + j\omega LC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 LC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 LC}. \quad (23)$$

ось нормированных частот получится как обращение в комплексной плоскости прямой, т. е., представится в виде полуокружности радиуса

$$r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad (\text{рис. 6})$$

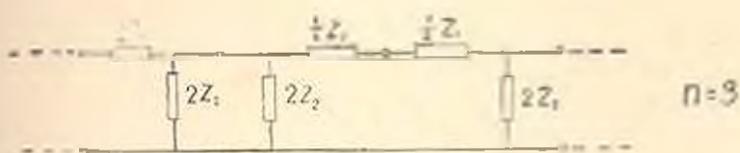
Величину радиуса легко найти, зная координаты концов диаметра:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \Omega &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = x; & y &= 0; \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Omega &= 0; & x &= 0 & y &= 0 \end{aligned}$$

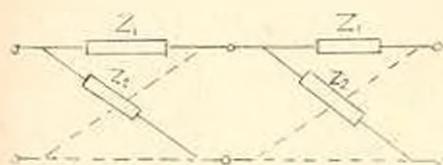
Точка пересечения оси нормированных частот с лемнискатой кривой $M=1$) является точкой среза, что равносильно распространению и на реальные фильтры условия (15), с помощью которого определялась частота среза для идеальных фильтров. Тем самым придается математическая определенность точке среза, которая у реальных фильтров находится в пределах переходной полосы. Таким образом, верхняя ветвь лемнискаты — геометрическое место точек среза электрических фильтров п. ч., в. ч. и полосовых. На этой кривой затухания b будут больше чем в любых точках соответствующих полос пропускания.

8. Полученные кривые — модули функций $T\hat{h}_s(\Omega)$ на комплексной плоскости дают возможность легко определить параметры по заданному затуханию b , при частоте среза ω_c . С этой целью, на лемнискате находим b_c и определяем соответствующие y , и x , (рис. 6). Тогда параметры определяются из следующих соотношений:

а) в случае ф. п. ч.

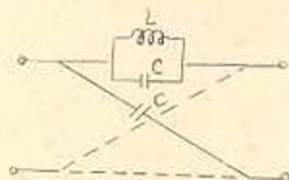
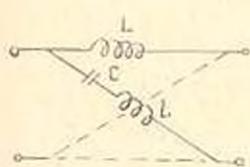


a)

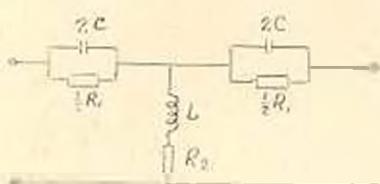
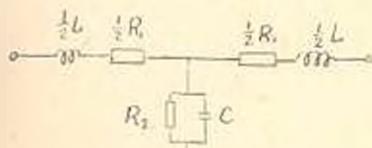


$n=4$

b)



b)



a)

a)

Рис. 5

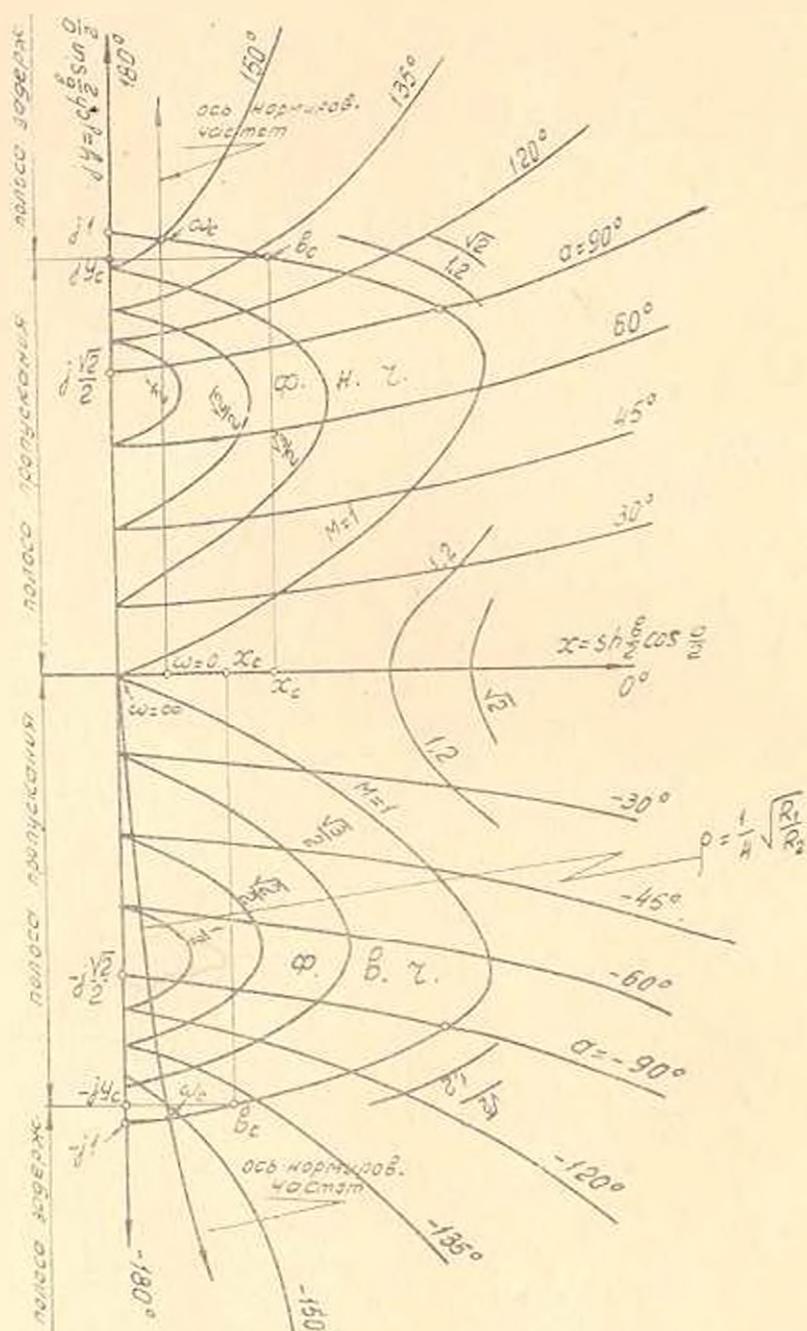


рис. 6. Оси нормированных частот фильтров типа К в области ω, β, γ и φ, β, γ .

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{R}_1}{R_2} \right. \\
 y_c &= \frac{1}{2} m_c \left. \frac{LC}{R_1} \right. \\
 \frac{L}{R_2} &= R_1 C
 \end{aligned} \tag{24}$$

б) в случае ф. в ч.

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{R}_2}{R_1} \right. \\
 y_c &= \frac{m_c}{2} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{LC}{m_c LC} \quad \text{и} \quad \frac{L}{R_1} = R_2 C
 \end{aligned} \tag{25}$$

В том случае, если заданы уровни затухания b_{\max} и b_{\min} соответственно в полосе пропускания и в полосе задерживания задачи легко сводятся к предыдущему типу.

9. Для решения системы уравнений (24) или (25) с четырьмя неизвестными параметрами фильтра Cl, R_1, R_2 можно задать сопротивление R_2 (R_1) в зависимости от типа конденсатора, который предполагается использовать.

Если задано сопротивление нагрузки, необходимое четвертое уравнение может быть легко получено исходя из условий согласования фильтра с нагрузкой.

С помощью номограмм (рис. 2—4) можно решать более сложные задачи, если их дополнить кривыми постоянного затухания, представляющими собой семейство софокусных эллипсов с фокусами в точках $y = \pm 1$ [3]. В этом случае представляется возможным учесть дополнительные затухания, возникающие из-за несогласованности оптимального номинального характеристического сопротивления фильтра с сопротивлением нагрузки, т. е. фактически исходить из заданных требований к рабочим параметрам. Объем статьи не разрешает нам более детально рассмотреть эти вопросы.

З а к л ю ч е н и е

1. Рассмотрение модулей полинома Чебышева от комплексного аргумента (нормированной комплексной частоты) даёт общую картину влияния диссипативности элементов схемы на фильтрующие свойства четырехполюсников.

Наилучшее разделение частот и наименьшие собственные затухания имеют фильтры, у которых оси нормированных частот расположены ближе к оси ординат — оси идеальных фильтров. Чем даль-

տասխանում են n կասկաղ միացում T_n -ածն կիսաաղակներին և $\frac{n}{2}$ կասկաղ միացում սիմետրիկ կամրջակային սղակներին:

$T_n(\xi)$ ֆունկցիաների մագուղները կարելի է արտահայտել կամպլեքս նարթաթյան վրա կասինի կորերի ձևով: Եւ նարափրաթյուն է աւլիս այ կորերը օգտագործել որպիս նոմոգրամաներ էլեկտրական ֆիլտրների նաշվման նամար:

Պրակտիկաում այ նոմոգրամաները թուղ կասն ներառթյամբ գտնել ֆիլտրի կրատաները և ստանալ անհրամեւտ պարամետրերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Акуляшин П. К., Кощеев П. А., Кульбацкий К. Т. Теория связи по проводам. Связьиздат, 1940.
2. Бельский А. Ф. «Исследование вопросов расчета некоторых классов линейных электрических схем по их заданным частотным характеристикам», докт. диссертация, М., 1959.
3. Мелик-Вартанян К. А. «Полиномы Чебышева в комплексной области и функции затухания и коэффициента фазы электрических фильтров», Известия АН Армянской ССР, серия техн. наук, № 1, 1960.
4. Тафт В. А. «Основы методики расчета линейных электрических схем по заданным их частотным характеристикам», М., 1934.
5. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1924.
6. Guillemin E. Communication networks, vol. II, 1947.
7. Klein W. Tschelyschefsche Funktionen, Archiv für Elektrotechnik, XXXIX, 1950.