

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Г. А. МАКАРЯН

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛАВНО-ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ  
 ЖИДКОСТИ В НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

Уравнение установившегося неравномерного движения жидкости, имеет вид [1]:

$$\frac{db}{dt} = \frac{\frac{d\mathcal{E}}{dt} + (1-\Pi_k) \frac{dh}{dt} - \frac{\Pi_k}{B} \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{dm}{dt}}{\Pi_k h/B} \quad (1)$$

где

$$B = \frac{\partial m}{\partial h}; \quad \Pi_k = \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3}; \quad \mathcal{E} = h + \frac{\alpha \omega^2}{2g} \quad (2)$$

При плавно-изменяющемся движении, имеем [2]\*:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = i_0 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = i_0 - I \quad (3)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи неравномерного движения:

1. Движение при  $\mathcal{E} = \text{const}$ . Из уравнения (2) замечаем, что постоянство  $\mathcal{E}$  возможно в следующих двух случаях:

а)  $h \neq \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ . Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{db}{dt} = \frac{B}{h} \left( \frac{1}{\Pi_k} - 1 \right) \frac{dh}{dt} - \frac{1}{h} \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{dm}{dt} \quad (4)$$

На основании этого уравнения можно получить очертание русла при заданных свободной поверхности и коэффициенте формы сечения русла  $m$ .

Уравнение же (3) приводит к противоречию, так как оно не соответствует неравномерному движению при  $\mathcal{E} = \text{const}$ .

б)  $h = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ . Из уравнения (1) при  $m = \text{const}$  следует, что  $b = \text{const}$ . Это возможно только при равномерном движении и из уравнения (3) получаем, что  $Q = \omega C \sqrt{R i_0}$ .

\* При плавно-изменяющемся движении, если уравнение движения жидкости вывести с учетом боковых сил давления на поток и кривизмы живого сечения, вместо (3) придет и уравнению:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = i_0 - I \pm \frac{h}{B} \frac{db}{dt}$ . Однако, это выражение не вводит качественных изменений в окончательные уравнения, приведенные в данной статье.

2. Движение при  $h = \text{const}$ . Из совместного решения уравнений (1) и (3) получаем:

$$\frac{db}{dt} = (1 - i_0) \frac{B}{\Pi_x h} \quad (5)$$

3. Движение при  $\Pi_k = 1$ . Из тех-же уравнений получаем:

$$\frac{db_k}{dt} = (I_k - i_0) \frac{B_k}{h_k} \quad (6)$$

Глубина потока в каждом сечении такого русла определяется по известной формуле критической глубины, которая в дифференциальной форме можно представить в виде:

$$\frac{dh_c}{dt} = \frac{2}{3} (i_0 - I_k) \quad (7)$$

*Возможное очертание русел при  $m = \text{const}$ .*

Решение и анализ уравнения (1) осложняется наличием в числителе  $dh/dt$ . Для разных значений  $dh/dt$  соответствующие кривые очертаний  $b_1(t)$ , при одинаковых условиях движения, будут отличаться друг от друга только в количественном отношении, а виды форм этих кривых будут одинаковы (рис. 1).

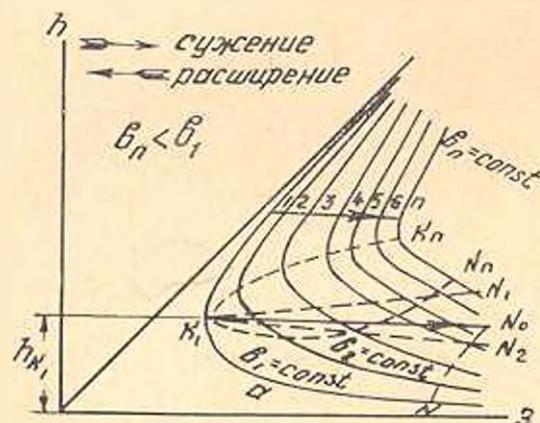


Рис. 1. График удельной энергии сечения  $\mathcal{E}(h, b)$ . 1, 2, 3 — кривые для отдельных сечений;  $K_1, K_n$  — кривая критических глубин;  $K_1, N_1$  — линия подпора свободной поверхности;  $K_1, K_0$  — линия свободной поверхности при постоянных глубинах;  $K_1, N_1$  — линия спада свободной поверхности;  $K_1, N_n$  — кривая произвольной свободной поверхности;  $N_1, N_0$  — кривая нормальных глубин в конкретном русле.

При рассмотрении этого графика приходим к выводу, что и в бурном и в спокойном потоках, в руслах одинаковой формы возможны кривые спада и подпора в одной и той же зоне движения: форма непризматического русла не зависит от значения  $\frac{dh}{dt}$ . След-

овательно, для удобства анализа вместо общего уравнения (1), в силу (3), можно рассматривать следующее уравнения, при  $dh/dt = 0$ :

$$\frac{db}{dt} = \frac{B}{h \Pi_k} (I - i_0) \quad (8)$$

$$I = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = i_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^x \quad (9)$$

Найдем формы кривых очертаний непризматических русел

при  $i_0 < i_k$  или  $h_0 > h_k$ .

Зона а.  $h > h_0$ . По (9)  $I < i_0$ , тогда из уравнения (8) следует,

что  $\frac{db}{dl} < 0$ . С целью исключения спада свободной поверхности потока в подводящем канале\* с уклоном  $i_1 < i_0$ , необходимо сужение русла вниз по течению (рис. 2—1). При этом, поток с глубиной  $h = h_0$  поступит в непризматическое русло, в начальном сечении которого по (9)  $I = I_1 = i_1$ .

Вниз по течению русло суживается таким образом, что кривая нормальных глубин асимптотически стремится к линии постоянных глубин, ( $h_0 \rightarrow h_1$  и по (9)  $I \rightarrow i_0$ . Следовательно,

по уравнению (8)  $\frac{db}{dl}$

$$\rightarrow \frac{i_1 - i_0}{\Pi_k} \cdot \frac{B}{h} \rightarrow 0.$$

Полученное очертание назовем очертанием типа  $a_1^c$ .

Зона  $b$ .  $h < h_0$ . По (9)

$I < i_0$ , а по (8)  $\frac{db}{dl} > 0$ . В

начале потока  $h = h_0$ , тогда по (9)  $I = I_1 = i_1$ .

Вниз по течению поток стремится к равномерному, т. е.  $h \rightarrow h_0$ , тогда  $I \rightarrow i_0$ .

Из уравнения (8) следует, что  $\frac{db}{dl} \rightarrow \frac{i_1 - i_0}{\Pi_k} \cdot \frac{B}{h} \rightarrow 0$

(рис. 2—2). Полученное очертание назовем очертанием типа  $b_1^p$ .

В качестве примера предположим, что уменьшением уклона дна призматического русла с  $i_1$  до  $i_0$  равномерность движения нарушалась в подводящем канале и кривая свободной поверхности в нем приняла форму подпора. С целью восстановления равномерного движения в

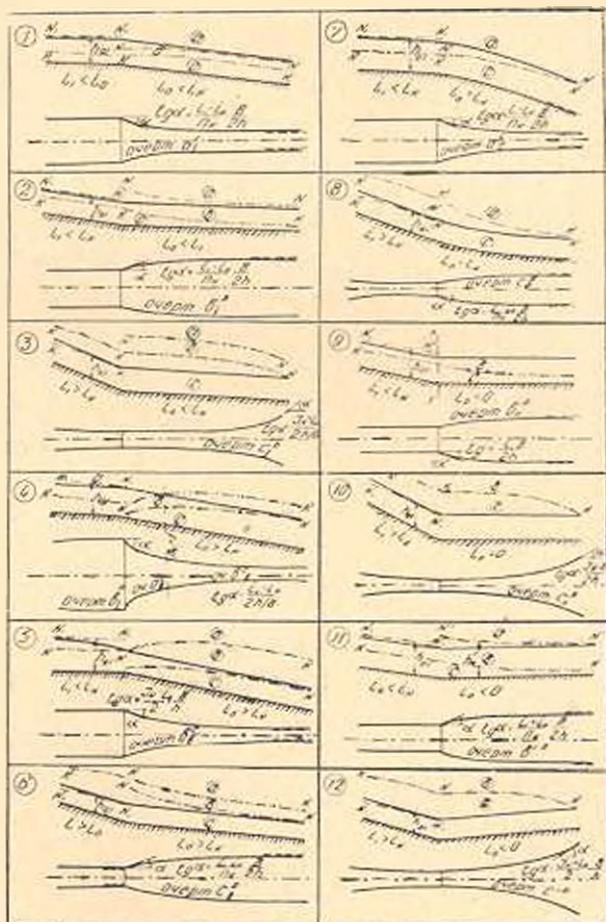


Рис. 2. Возможные очертания непризматических русел. Под каждым номером показаны продольный профиль русла и его план; сплошными линиями показаны свободные поверхности потоков и очертания непризматических русел.

\* В дальнейшем все элементы, обозначенные индексом 1, относятся к подводящему каналу.

канале с  $l_1$  и установления вниз по течению (на скаге  $l_0$ ) движения с постоянной глубиной, необходимо расширение русла по его длине до такой ширины, при которой нормальная глубина становится постоянной.

Зона С.  $h_0 > h_k > h$ . По (9)  $l > l_0$ , тогда по (8)  $\frac{db}{dl} > 0$  (рис. 2, 3).

При очень бурном состоянии потока ( $Fr_0 \rightarrow \infty$ ) в начальном сечении его  $\frac{db}{dl} \rightarrow 0$ . Вниз по течению с постоянной глубиной ширина потока увеличиваясь достигает такого значения, при котором критическая глубина становится равной постоянной по длине потока, т. е.  $h_1 = h_0$ , тогда  $l = l_k$  и  $Fr_0 = 1$ . Следовательно, на конце участка  $\frac{db}{dl} = \frac{l_1 - l_0}{h} B$ . Полученное очертание назовем типа  $C_1^p$ .

Повторяя вышеприведенные рассуждения для случаев  $i_0 > i_k$ ,  $i_0 = i_k$ ,  $i_0 = 0$ ,  $i_0 < 0$  получим всего 12 типов очертаний (рис. 2).

Пользуясь такими очертаниями, можно добиться плавного сопряжения свободных поверхностей в различных случаях встречающихся в гидротехнической практике.

*Интегрирование уравнения (1) при  $\frac{dh}{dl} = \text{const}$  и  $\frac{dm}{dl} = 0$ .*

Большинство исследователей, занимавшихся решением уравнения (1), рассматривали частный случай, когда  $h = \text{const}$ . В работе И. И. Агроскина [3] наряду с этим дано также решение при  $\frac{dh}{dl} = \text{const}$ , причем для этой цели им применен метод приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина и получено решение, которое неудобно для практического применения.

По формуле (2) отношение  $db/dl = \text{const}$  равносильно выражению  $\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \text{const}$ . Обозначая через

$$a_3 = \frac{d\mathcal{E}}{dl} \cdot a_v = \frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \quad (10)$$

получим 
$$\frac{dh}{dl} = a_3 - a_v = \text{const}, \quad (11)$$

$$h = h_0(a_3 - a_v) l, \quad (12)$$

где  $h_0$  — глубина потока в начальном сечении.

На основании уравнения (1) в силу (10), (11) и (12) получим:

$$\frac{dl}{1 + \frac{h_0}{a_3 - a_v}} = \frac{db}{B \left[ \frac{a_v}{Fr_k(a_3 - a_v)} + 1 \right]} \quad (13)$$

Ниже излагается метод интегрирования уравнений (13) путем введения переменной

$$z^x = \frac{1}{H_k} \frac{a_x}{a_x - a_0}, \quad (14)$$

кроме того принимается  $db = \text{const} \cdot dz = adz$ . (15)

В частности, для трапециoidalного сечения  $B = B_0 = a(z - z_0) + \frac{1}{2}m(h - |h_0|)$ . Поскольку в непризматических руслах глубина потока изменяется значительно менее интенсивно, чем ширина, можно допустить, что

$$B \approx a(z - A), \quad \text{где } A = z_0 - \frac{B_0}{a}. \quad (16)$$

Тогда, в силу (14), (15) и (16), уравнению (13) можно придать вид:

$$\frac{dl}{1 + \frac{h_0}{dh|dl}} = - \frac{dz}{(z - A)(z^x + 1)}. \quad (17)$$

Разложив в ряд правую часть уравнения (17) в интегральном виде, будем иметь:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{dh}{dl} \frac{l_{1-2}}{h_0} + 1 \right) &= - \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(z - A)(z^x + 1)} = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^{x+1} - Az^x + z - A} = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{1}{z^{x+1}} + \frac{A}{z^{x+2}} + \dots + \frac{A^{n-1}}{z^{x+n}} \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1/z^x \cdot dz}{z^{x+1} - Az^x + z - A} = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^{x+1}} \sum_1^n \left( \frac{A}{z} \right)^{n-1} dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^{2x+1}} \sum_1^n \left( \frac{A}{z} \right)^{n-1} dz + \dots + \\ &+ \int_{z_1}^{z_2} \frac{(-1)^{k-1}}{z^{kx+1}} \sum_{n=1}^n \left( \frac{A}{z} \right)^{n-1} dz = - \int_{z_1}^{z_2} \sum_1^k \left[ \frac{(-1)^{k-1}}{z^{kx+1}} \sum_1^n \left( \frac{A}{z} \right)^{n-1} \right] dz. \end{aligned}$$

Откуда

$$\ln \left( \frac{dh}{dl} \frac{l_{1-2}}{h_0} + 1 \right) = \sum_1^k \left[ \frac{(-1)^{k-1}}{z^{kx}} \sum_1^n \left( \frac{A}{z} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{kx + n - 1} \right]. \quad (18)$$

Нетрудно доказать, что данный ряд сходится, при этом ряд  $n$  сходится медленнее ряда  $k$ .

Ограничиваясь тремя членами первого ряда и одним членом второго ряда, получим\*:

\* Здесь и ниже верхние знаки в уравнениях очертаний русел соответствуют положительному значению  $dh/dl$ , нижние — отрицательному.

$$\ln \left( \frac{dh}{dl} \cdot \frac{l_{1-2}}{h_0} + 1 \right) = \pm \frac{1}{z^x} \left[ \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{0,5}{z^x} \right) + \frac{A}{z} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{A}{z} \frac{1}{x+2} \right) \right] \Big|_1^z. \quad (19)$$

Это выражение является общим уравнением кривых очертаний непризматических русел при  $z > 1$ . Исходя из условия  $z < 1$  можно прийти к аналогичному уравнению. Несмотря на произвол в выборе значения  $x$ , в условиях конкретной задачи, левая часть уравнения (19) не должна менять свое значение при разных  $x$ . При этом по (14)  $z^x$  не изменяется, следовательно, вообще говоря, не должно изменяться также значение выражения в квадратных скобках, хотя  $z$  и  $A$  зависят от  $x$ . Однако, в силу допущения (15) и вследствие ограничения членов ряда, правая часть уравнения (19) при разных  $x$  может принимать хотя и различные, но мало отличающиеся друг от друга значения. При этом очевидно, что наиболее надежным значением  $l_{1-2}$  будет то, при котором устраняется погрешность от допущения (15), т. е. при линейной связи между  $b$  и  $z$ . Следовательно, при пользовании уравнением (19) целесообразно выбирать  $x$  таким образом, чтобы значение  $a$  (а также  $A$ ) оставалось постоянным по всей длине потока. Условимся в дальнейшем показателе степени  $x$ , удовлетворяющий этому условию, называть гидравлическим показателем ширины русла.

На основании (14) в силу (15) с точностью производной второго порядка, получим:

$$x = - \frac{b}{\Pi_k} \frac{d\Pi_k}{db} + \frac{b}{a_v} \frac{da_v}{db}$$

или

$$x = \frac{3}{1 + mh/b} - \frac{1}{1 + 2m/hb} + \frac{1}{i_0 - 1 - dh/dl} \left[ \frac{3 + 2y}{1 + mh/b} - \frac{1 + 2y}{1 + 2h/b \sqrt{1 + m^2}} \right]. \quad (20)$$

Анализ и ориентировочные расчеты показали, что значение  $x$  изменяется в пределах от 1,8 до 2,3, поэтому можно в среднем принять  $x = 2$ .

#### *Расчетные формулы для построения очертаний непризматических русел при $x = 2$*

С достаточной точностью для практических расчетов можно принимать  $x = 2$ , тогда интеграл уравнения (17) примет вид:

$$1) \frac{dh}{dl} > 0; \quad \ln \left( \frac{dh}{dl} \frac{l_{1-2}}{h_0} + 1 \right) = \frac{1}{1 + A^2} \left( \ln \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z - A} + A \operatorname{arctg} z \right) \Big|_1^z, \quad (21)$$

где при  $z > 1$ ,  $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z}$ ; а при  $z < 1$ ,  $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - z$ .

$$2) \frac{dh}{dl} > 0; \lg \left( \frac{dh}{dl} \frac{l_{i-2}}{h_0} + 1 \right) = \frac{0,5}{1-A^2} [(1-A) \lg(z^2 - 1) + 2A \lg(i - 1) - 2 \lg(z - A)]_1^i, \quad (22)$$

где верхний знак соответствует случаю  $z > 1$ , а нижний случаю  $z < 1$ .

Если в уравнении (19) принять  $x = 2$ , получим следующую простую формулу, уступающую по точности предыдущим формулам:

$$\lg \left( \frac{dh}{dl} \frac{l_{i-2}}{h_0} + 1 \right) = \pm \frac{0,11}{z^2} \left[ 2 \mp \frac{1}{z^2} + \frac{A}{z} \left( 1,3 + \frac{A}{z} \right) \right]_1^i. \quad (23)$$

Чтобы пользоваться формулами (19), (21), (22), (23) необходимо задаваться  $h_i$  и  $b_i$  и определять  $l_{i-1}$ .

Глубина  $h_i$  определяется по формуле:

$$h_i = h_0 + \frac{dh}{db} l_{i-1}.$$

Для определения ширины  $b_i$  воспользуемся интегралом выражения (10) полагая, что  $a_r = \text{const}$ . В этом случае получим

$$a(v_2^2 - v_1^2) - 2g a_r l_{i-1}$$

Откуда

$$b_i = \frac{Q}{h_i \sqrt{(Q/(a_{i-1}))^2 + 2g a_r l_{i-1}}} = \pi b_1. \quad (24)$$

Следовательно, задаваясь  $l_{i-1}$  в качестве первого приближения, можно определить  $h_i$  и  $b_i$ . Далее по этим элементам сечения уточняем величину  $l_{i-1}$  уже по одной из формул очертаний.

#### *Интегрирование уравнения движения жидкости при постоянной глубине потока*

В результате совместного решения (1) и (3) при  $dh/dl = 0$  получим

$$\frac{db}{dl} = \frac{l - l_k}{\Pi_k h/B}, \quad (25)$$

где  $h = \text{const}$ ,  $db = dB$ .

$$l = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = \Pi_k \frac{g}{\alpha} \frac{1}{C^2 R B} = \Pi_k \cdot l_k.$$

Здесь  $l_k$  представляет собой такой уклон дна, при котором поток с расходом  $Q$  в критическом его состоянии становится равномерным в мысленно представленном русле с соответствующим постоянным поперечным сечением. Предварительные расчеты показывают, что изменение  $l_k$  незначительно по длине потока и при интегрировании им можно пренебречь. Кроме этого заметим, что изменения  $1/\Pi_k$  и  $B^2$  идентичны. Так, для трапецидального сечения

$$a' = \frac{1/II_{k2} - 1/II_{k1}}{B_2^2 - B_1^2} = \frac{d(1/II_k)}{d(B^2)} = \frac{1}{\Pi_k} \frac{3/b_{\text{ср}} - 1/B}{3B}$$

$$= \frac{gh^2}{\alpha Q^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{mh}{B} + \left( \frac{mh}{B} \right)^2 \right] \approx \text{const.}$$

для прямоугольного сечения

$$a' = \frac{gh^2}{\alpha Q^2} = \text{const.}$$

В силу сказанного и на основании (25) получим:

$$dl = \frac{hdB}{i_0 a' B (i_k/i_0 a' - B^2)} \quad (26)$$

Дифференциальное уравнение (26) после преобразований принимает вид:

$$i_{1-2} = 1,151 \frac{h}{i_k} \lg \left( 1 + \frac{1}{B^2 i a' / i_k - 1} \right) \Big|_1^2 \quad (27)$$

Приближенная формула (27) уступает по точности формуле И. И. Агроскина [3], однако она позволяет с менее трудоемкими вычислениями производить расчет при любых значениях  $u$  не прибегая к таблицам.

Московский институт инженеров  
водного хозяйства им. Вильямеа

Поступило 20 II 1957

Գ. Ա. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

### ՀԵՂՈՒԿՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՍԱՀՈՒՆ-ՓՈՓՈԿՎՈՂ ՇԱՐՃՈՒՄԸ ՈՉ ՊՐԵՉՄԱՏԻՆ ՀՈՒՆԵՐՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածք վերաբերում է այն ոչ սլրիզմատիկ հուներին, որոնց կորագծերը ենթարկվում են հեղուկի շարժման օրենքներին, այսինքն, երբ այդպիսի պայմաններում հեղուկն ինքն է կորագծում իր հունը:

Ի հալա է բերված (3) հախաարման անհամապատասխանությունը որոշ մասնավոր դեպքերի նկատմամբ:

Յ (h, b) գրաֆիկը (նկ. 1) հնարավորություն տալից հալանաբերելու հունների կորագծերի հնարավոր ձևերը:

Հուների կորագծերի հախաարմաներն արտածված են այն դեպքերի համար, երբ հեղուկի հոսանքի խորությունները փոփոխվում են աղպագծափն օրենքով:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бахметев В. А. О неравномерном движении жидкости и открытых руслах. Л., 1914.
2. Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т. и Пикалов Ф. И. Гидравлика. М., Л., 1954.
3. Агроскин И. И. Гидравлика каналов. Госэнергоиздат. Л., 1949.