АСТРОФИЗИКА

ТОМ 62 ФЕВРАЛЬ, 2019 ВЫПУСК 1

Н-ФУНКЦИИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ: РАСЧЕТ ФОЙГТОВСКИХ ФУНКЦИЙ И ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ОБРАЗОВАНИЯ ЦИКЛОТРОННЫХ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

В.В.ГРИГОРЬЕВ, Д.И.НАГИРНЕР, С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 31 октября 2018

Принята к печати 12 декабря 2018

После краткого изложения истории введения в теорию переноса H-функций приведены уравнения, определяющие эти функции, и их явные выражения. Приведены также формулы, с помощью которых можно рассчитывать распределение по направлению и частоте интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды, при различных внешних и внутренних источниках. Подробно описан алгоритм вычисления фойгтовских H-функций и связанных с ними величин. На языке Fortran составлен современный свободный код, реализующий указанный алгоритм. Код позволяет с высокой точностью рассчитывать профили спектральных линий при фойгтовском профиле коэффициента поглощения. Приведены примеры расчета профилей и дано качественное обоснование гипотезы образования циклотронных особенностей в спектрах нейтронных звезд.

Ключевые слова: *теория переноса излучения: спектральные линии: фойгтовский профиль линии: циклотронная особенность*

1. *Введение*. Термин и обозначение H-функция были введены С.Чандрасекаром как обобщение функции $\varphi(\eta)$ Амбарцумяна [1], установившего, что коэффициент отражения излучения от однородной полубесконечной среды (функция косинусов углов падения ζ и отражения η) при изотропном монохроматическом рассеянии выражается через произведение $\varphi(\zeta)\varphi(\eta)$. Амбарцумян в работе [2] рассмотрел и анизотропное рассеяние, где представил коэффициент отражения билинейной комбинацией $(n+1)(n+2)/2$ функций $\varphi_i^m(\eta)$, где $m=0(1)n$ - номер азимутальной гармоники, а $i=m(1)n$ (n - число слагаемых в разложении индикатрисы рассеяния по многочленам Лежандра от косинуса угла рассеяния). Для определения введенных функций Амбарцумян вывел системы нелинейных интегральных уравнений. Впоследствии Соболев в [3] получил для этих функций и линейные уравнения.

Чандрасекар показал, что при рассеянии с двучленной и трехчленной (в частности, рэлеевской) индикатрисами диффузно отраженное от полубесконечной среды излучение можно описать меньшим числом функций одного углового аргумента. Все функции $\varphi_i^m(\eta)$ с фиксированным m выражаются через одну функцию $H^m(\eta)$, определяемую отдельными нелинейным и линейным уравнениями [4]. Все эти результаты Чандрасекара содержатся в его книге [5]. Такую же связь функций $\varphi_i^m(\eta)$ и $H^m(\eta)$ впоследствии получил Соболев [6] для любых индикатрис, допускающих разложения по многочленам Лежандра с конечным числом слагаемых (см. также [7]).

Обозначение H было перенесено на аналогичные функции и в теории переноса излучения в спектральной линии при принятии предположения о полном перераспределении излучения по частоте (ППЧ) при каждом рассеянии, когда профиль коэффициента излучения совпадает с профилем коэффициента поглощения [8]. И в этой теории H-функции играют большую роль. Через H-функцию выражается интенсивность выходящего из полубесконечной среды излучения, если мощность первичных источников экспоненциально зависит от оптической глубины $e^{-p\tau}$, $p=\mathrm{const}$ (в частности, в задаче об отражении) [9]. Соболев обозначал эту функцию как частное значение функции источников $B(\tau, p)$ в этой задаче на границе (при $\tau=0$). Обозначение $H(p)=B(0, p)$ в теорию ППЧ ввел Иванов [10] (его обозначение было $H(z)$, $z=1/p$). Одновременно H-функция является преобразованием Лапласа от введенной Соболевым резольвентной функции [11] и входит в ее явное выражение [12]. С помощью резольвентной функции можно получить полное решение задач о рассеянии излучения в линии в полубесконечной среде при произвольном распределении в ней первичных источников.

Для H-функции получены различные точные выражения: для монохроматического анизотропного рассеяния [3,13,14], для рассеяния в линии при ППЧ [10]. Связи между различными ее представлениями установлены в [15].

Ввиду важности H-функций составлялись их таблицы. Для монохроматического рассеяния они табулировались в [16]. Наиболее подробные таблицы для доплеровского профиля были составлены в [17], а для фойгтовского - в [18]. Поляризационные характеристики излучения в спектральной линии, выходящего из полубесконечной среды с равномерными внутренними источниками, при фойгтовском профиле коэффициента поглощения с учетом континуума были рассчитаны в работе [19].

Среди последних работ можно выделить статью Кавабаты [20], в которой было рассмотрено монохроматическое рассеяние фотонов при четырехчленной индикатрисе с использованием функций Амбарцумяна, рассчитанных итеративным методом. Автором были составлены 15-значные таблицы.

В наш век компьютеров и цифровых технологий опубликованные таблицы могут быть полезны, по-видимому, только как реперные данные для оценки точности численных методов, а практический интерес представляют доступные компьютерные коды. В связи с этим нами составлены на языке Fortran программы расчета фойгтовских H-функций и связанных с ними интегралов с учетом поглощения в континууме.

Составленный код будет применен для качественного обоснования модели образования циклотронных особенностей в спектрах нейтронных звезд, предложенной в [21], где обоснование было только словесным.

Также с целью исторической сохранности в статье будут воспроизведены основные сведения об H-функциях, методе их расчета, дан небольшой обзор по фойгтовскому профилю.

2. *Уравнения для Н-функций, явное выражение и применение.*

2.1. *Уравнения.* H-функция теории переноса излучения в полубесконечной плоскопараллельной среде определяется уравнениями: нелинейным

$$H(p)=1+\frac{\lambda}{2}H(p)\int_a^b A(y)H(y)\frac{dy}{y+p} \tag{1}$$

и линейным

$$H(p)=1+\frac{\lambda}{2}\int_a^b A(y)\left[\frac{H(p)}{y+p}+\frac{H(p)-H(y)}{y-p}\right]dy. \tag{2}$$

В этих уравнениях $0<\lambda\leq 1$ - вероятность выживания фотона при однократном рассеянии, промежуток $[a,\ b]$ - область определения функции $A(y)$ - весовой функции в представлении ядерной функции, зависящей от оптической глубины τ в среде, в виде суперпозиции экспонент:

$$K(\tau)=\int_a^b A(y)e^{-y\tau}dy,\quad 0<a<b\leq\infty. \tag{3}$$

Во всех случаях рассеяния у функции $A(y)$ на отрезке $[a,\ b]$ существует кусочно-непрерывная производная.

Ядерная функция определяет ядро основного интегрального уравнения рассеяния в полубесконечной среде

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_a^b K(|\tau-\tau'|)S(\tau')d\tau', \tag{4}$$

где функция $S_0(\tau)$ пропорциональна мощности первичных, т.е. не связанных с рассеянием, источников излучения (включая внутренние и внешние), а $S(\tau)$ - искомая функция источников (частное от деления коэффициента излучения на коэффициент поглощения).

В теории анизотропного рассеяния монохроматического излучения, как уже говорилось, используются другие обозначения: вместо $H(p)$ применяется обозначение $H(z)$, где $z=1/p$, а вместо $A(y)$ - обозначение $\Psi(z)=A(1/z)/z$, причем z (или η) изменяется от нуля до единицы, в то время как в теории рассеяния в линии промежуток изменения аргумента y в (1)-(3) может быть $[0,\infty)$.

Возможно существование решений (корней) так называемого характеристического уравнения

$$1-\lambda U(k)=0\,,\quad U(p)=\int_a^b \frac{yA(y)dy}{y^2-p^2}\,, \tag{5}$$

(они всегда встречаются парами $\pm k$, $\operatorname{Im}\ k\geq 0$). Тогда число $-k$ является полюсом H-функции. Если функция $A(y)$ положительна и $a>0$, то на промежутке $(0,a]$ возможен только один простой корень или двукратный корень $k=0$.

Явное выражение для H-функции имеет вид

$$\ln H(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln[1-\lambda U(p')]\frac{dp'}{p'-p}=-\frac{p}{\pi}\int_0^{\infty}\ln[1-\lambda V(u)]\frac{du}{p^2+u^2}\,, \tag{6}$$

где косинус-преобразование Фурье от ядерной функции

$$V(u)=U(iu)=\int_0^{\infty}\cos(u\tau)K(\tau)d\tau=\int_a^b \frac{A(y)y\,dy}{y^2+u^2}\,. \tag{7}$$

Формула (6) получается из комбинации нелинейного и линейного уравнений, приводящей к соотношению Винера-Хопфа

$$[1-\lambda U(p)]H(p)H(-p)=1\,. \tag{8}$$

2.2. ***Ядерные функции при рассеянии в линии с ППЧ.*** При полном перераспределении по частоте основной функцией, определяющей все остальные функции, характеризующие процесс переноса излучения, является профиль коэффициента поглощения в линии $\alpha(x)$, т.е. отношение коэффициента поглощения к его значению в центре линии (x - безразмерное расстояние от центра линии). Ясно, что он нормирован условием $\alpha(0)=1$. Еще один важный параметр - отношение коэффициента поглощения в континууме к коэффициенту поглощения в центре линии β, который, когда он отличен от нуля, мы часто будем указывать в качестве аргумента, например, в представлении ядерной функции наряду с ее зависимостью от τ - оптической глубины в центре линии:

$$K(\tau,\beta)=A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)E_1([\alpha(x)+\beta]\tau)dx\,,\quad E_s(\tau)=\int_1^{\infty}e^{-y\tau}\frac{dy}{y^s}\,. \tag{9}$$

Влияние вероятности выживания фотона λ тоже важно, но явно она в качестве аргумента не указывается.

Весовая функция, входящая в (3), получается из (9) после подстановки туда формулы для $E_1(\tau)$ и перемены порядка интегрирования. Она представляется альтернативными выражениями:

$$A(y,\beta)=\frac{2A}{y}\begin{cases}\int_{x(y-\beta)}^{\infty}\alpha^2(x)dx\,, & \beta\leq y\leq 1+\beta\,,\\ \int_0^{\infty}\alpha^2(x)dx\,, & 1+\beta\leq y<\infty\,.\end{cases} \tag{10}$$

$$N_{knl}(q)=A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{l-1}(x)dx\int_{\alpha(x)+\beta}^{\infty}\frac{H(y)}{(y+q)^k}\frac{dy}{y^n}=\int_0^{\infty}\frac{yA_l(y)}{(y+\beta)^n}\frac{H(y+\beta)dy}{(y+\beta+q)^k}. \qquad (19)$$

Здесь весовая функция - обобщение функции $A(y)$:

$$A_l(y)=\frac{2A}{y}\begin{cases}\int_{a(y)}^{\infty}\alpha^{l+1}(x)dx, & 0\le y\le 1,\\ \int_0^{\infty}\alpha^{l+1}(x)dx, & 1\le y<\infty.\end{cases} \qquad (20)$$

2.4. *Интенсивность выходящего излучения при различных источниках.*

2.4.1. *Экспоненциальные источники в линии.* Если мощность внутренних источников в линии экспоненциально зависит от оптической глубины $S_0(\tau)=e^{-q\tau}$, то интенсивность излучения, выходящего из среды под углом к нормали к границе, косинус которого равен η, и в частоте x выражается через *H*-функцию:

$$I(\eta,x)=\frac{\alpha(x)}{\eta}\frac{H(y)H(q)}{y+q},\quad y=\frac{\alpha(x)+\beta}{\eta}. \qquad (21)$$

Если внешнее излучение падает под углом $\theta_0=\arccos\eta_0$ к нормали с азимутом $\phi=0$ в частоте x_0 на всю поверхность полубесконечной среды, причем освещенность перпендикулярной этому направлению площадки равна π, то внутри среды интенсивность этого излучения, идущего в частоте x на глубине τ в направлении вектора ($\sqrt{1-\eta^2}\cos\phi$, $\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi,\eta$) в частоте x, будет

$$I_*(\tau,\eta,\phi,x)=\pi e^{-\tau[\alpha(x)+\beta]/\eta}\delta(\eta-\eta_0)\delta(\phi)\delta(x-x_0). \qquad (22)$$

Это излучение поглощается в среде и переизлучается в линии, что можно интерпретировать как появление первичных источников излучения внутри среды, хотя произошло одно рассеяние. Мощность таких первичных источников представляется также экспоненциальной функцией:

$$S_0(\tau)=\frac{\lambda}{4\pi}A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}I_*(\tau,\eta,\phi,x)d\eta=\frac{\lambda}{4}A\alpha(x_0)e^{-[\alpha(x_0)+\beta]\tau/\eta_0}, \qquad (23)$$

а соответствующая им интенсивность выходящего излучения

$$I_l(x,\eta,x_0,\eta_0)=\frac{\lambda}{4}A\alpha(x_0)\frac{\alpha(x)}{\eta}\frac{H(y)H(y_0)}{y+y_0},\quad y=\frac{\alpha(x)+\beta}{\eta},\quad y_0=\frac{\alpha(x_0)+\beta}{\eta_0}. \qquad (24)$$

Различие двух случаев заключается в том, что показатель экспоненты в (23) не может быть меньше β (а равен этому значению только при $\eta_0=1$ и $x_0=\infty$).

2.4.2. *Экспоненциальные источники в континууме.* Если внутренние источники в континууме экспоненциально распределены как $e^{-q\tau}$, то интенсивность излучения, идущего непосредственно от них.

$$I_*(\tau,\eta,x)=\begin{cases}\int_0^{\tau} e^{-[\alpha(x)+\beta](\tau-\tau')/\eta} e^{-q\tau'}\dfrac{d\tau}{\eta}, & \eta>0,\\ -\int_{\tau}^{\infty} e^{-[\alpha(x)+\beta](\tau-\tau')/\eta} e^{-q\tau'}\dfrac{d\tau}{\eta}, & \eta<0.\end{cases} \tag{25}$$

После поглощения в линии мощность источников представится интегралом, в котором сделана подстановка $y=[\alpha(x)+\beta]/\eta$:

$$S_0(\tau)=\frac{\lambda A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_{-1}^{1}I_*(\tau,\eta,x)\frac{d\eta}{\eta}=$$
$$=\frac{\lambda A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_{\alpha(x)+\beta}^{\infty}\left(\frac{e^{-y\tau}-e^{-q\tau}}{q-y}+\frac{e^{-q\tau}}{q+y}\right)\frac{dy}{y}. \tag{26}$$

Здесь также получаются экспоненты, так что в интенсивности выходящего излучения снова появляются H-функции. С добавлением излучения, выходящего без рассеяния, полная выходящая интенсивность выразится формулой, содержащей интегралы (18)-(19):

$$\begin{gathered} I_c(x,\eta)=\frac{1}{\eta}\frac{1}{q+y}+\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha(x)}{\eta}\frac{H(y)}{y+q}\left[N_{110}(y)+M(q)\right],\\ M(q)=H(q)\left[K_{110}(q)+K_{110}(-q)\right]-N_{110}(-q). \end{gathered} \tag{27}$$

При этом слагаемые с отрицательным аргументом q следует вычислять совместно, т.к. каждое из них расходится, хотя сумма всегда конечна. Иначе эти слагаемые надо понимать как интегралы в смысле главного значения по Коши.

2.4.3. *Иное распределение источников*. Заметим, что полученные выше результаты можно применить и к другим случаям распределения источников в среде.

Так, при постоянной мощности достаточно положить параметр в показателе экспоненты равным нулю: $q=0$.

Ввиду того, что все уравнения теории линейны, а взятие производной также является линейной операцией, то и интенсивность при мощности источников $\tau e^{-q\tau}=-\dfrac{d}{dq}e^{-q\tau}$ может быть получена дифференцированием по q формул для интенсивности при источниках $e^{-q\tau}$. Эту операцию легко проделать с написанными формулами, т.к. производные от интегралов (18)-(19) выражаются через те же интегралы с увеличенным на единицу первым индексом:

$$\frac{dK_{knl}(q)}{dq}=-kK_{k+1,nl}(q),\quad \frac{dN_{knl}(q)}{dq}=-kN_{k+1,nl}(q). \tag{28}$$

Производные от H-функции находятся с помощью уравнений (1) или (2). Таким образом, если распределение источников в полубесконечной среде описывается произведением многочлена на экспоненту от τ, то интенсивность выходящего излучения будет содержать интегралы соответствующих порядков.

3. *Вычисление фойгтовских H-функций.*

3.1. ***Фойгтовский профиль.*** В этой статье рассчитываются H-функции для фойгтовского профиля коэффициента поглощения. Поэтому приведем основные сведения об этом профиле.

Профиль поглощения, возникающий при совместном действии доплеровского и лоренцевского расширения линии и называемый фойгтовским, определяется отношением

$$\alpha(x)=\frac{U(a,x)}{U(a,0)}, \tag{29}$$

где функция Фойгта

$$U(a,x)=\frac{a}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}dy}{(x-y)^2+a^2}. \tag{30}$$

Здесь частота x измеряется в доплеровских ширинах, а величина a, называемая фойгтовским параметром, равна отношению лоренцевской и доплеровской ширин линии (обозначение это традиционное, его нельзя путать с пределом a в интеграле для ядерной функции (3) и других формулах предыдущего раздела). Интеграл от определенной так функции Фойгта по всей оси x равен единице, а нормировочный множитель $A=U(a,0)$.

Для функции Фойгта можно вывести другое представление:

$$U(a,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-at-t^2/4}\cos xt\,dt. \tag{31}$$

Функция Фойгта выражается через функцию ошибок, а именно - через вещественную часть от ее сопряженных аргументов (или интегральную экспоненту):

$$U(a,x)=\frac{1}{\pi}\left[\Phi(a+ix)+\Phi(a-ix)\right]=\frac{2}{\pi}\Re\Phi(a+ix), \tag{32}$$

где

$$\Phi(x)=e^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{x}{2}e^{x^2}E_{1/2}(x^2). \tag{33}$$

В частности,

$$U(a,0)=\frac{2}{\pi}\Phi(a)=\frac{a}{\pi}e^{a^2}E_{1/2}(a^2). \tag{34}$$

Подробное исследование свойств функции Фойгта проделано Херсонским и [22]. Ее табулирование производилось несколькими авторами, например, Хаммером [23].

Сама фойгтовская функция вычислялась по исходной формуле (32). При $a > 10^{-4}$ (для которых применим составленный код) находилась частота x_{end}, такая, что при $x \ge x_{end}$ для достижения заданной точности в асимптотике достаточно взять главное слагаемое в разложении по обратной частоте: $U(a,x) \sim a/(\pi x^2)$.

Вычислялись также интегралы $\int_x^\infty U(a,x')dx'$ и $\int_x^\infty U^2(a,x')dx'$ методом неопределенного табличного интегрирования. При этом учитывались значения моментов профиля

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(a,x)dx = 1, \quad a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(a,x)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\Phi\left(a\sqrt{2}\right). \tag{35}$$

Производная по частоте $U'(a,x)$ вычислялась по формуле, следующей из (32):

$$U'(a,x) = \frac{2}{\pi}\left[ia\left(\Phi(a+ix) - \Phi(a-ix)\right) - x\left(\Phi(a+ix) + \Phi(a-ix)\right)\right], \tag{36}$$

а также численным дифференцированием минимум по семи узлам при достаточно малом шаге по частоте.

3.2. ***Расчет функции*** $\Delta(\beta)$. Параметрами, для которых вычислялись значения *H*-функции, как отмечалось выше, являлись фойгтовский параметр *a*, доля поглощения в континууме β и вероятность выживания фотона при рассеянии в линии λ. Вычисление для заданных значений параметров производилось в несколько этапов. Схема расчетов почти та же, что и при составлении таблиц в [18], но там были возможны только три значения параметра *a*, для которых имелись таблицы $U(a,x)$ в [23]. Здесь этот параметр может быть произвольным $a > 10^{-4}$. При меньших значениях *a* все функции близки к доплеровским.

Существенно различны случаи, когда $\beta = 0$ и $\beta > 0$. При $\beta > 0$ предварительно требуется вычислить функцию $\Delta(\beta)$ ($\Delta(0) = 0$). В формуле (17) было выделено асимптотическое значение:

$$\begin{aligned}\Delta(\beta) = 2\beta U(a,0)\Bigg[\int_0^{x_{end}} \frac{U(a,x)}{U(a,x)+\beta U(a,0)}dx + \\ + \sqrt{\frac{a}{\pi\beta U(a,0)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{\pi\beta U(a,0)}}\frac{1}{x_{end}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{37}$$

Следующим этапом было вычисление косинус-преобразования Фурье $V(u,\beta)$ (7) от ядерной функции.

3.3. ***Расчет функций*** $V(u,\beta)$. Промежуток изменения аргумента *u* функции $V(u,\beta)$ был разбит на две части $u < 1$ и $u > 1$, так что расчет велся по двум независимым формулам. Результаты совпадали при $u = 1$.

При $u \le 1$ во избежание потери точности (как для вычисления самой

Логарифмы под интегралами вычислялись при помощи разложения в ряд в случае, если из единицы вычиталось малое число (например, $\lambda V(u) < 0.5$). Если $\lambda = 1$, то под знак логарифма ставилось выражение, вычислявшееся по формуле (38) с учетом значения $\Lambda(\beta)$.

3.5. ***Вычисление интегралов от Н-функции***. Вычисление моментов $N_{knl}(q)$ производилось так (интеграл взят по частям):

$$N_{knl}(q) = 2\int_0^\infty \frac{U^l(a,x')}{U^l(a,0)}dx' \int_0^1 \frac{H\big((1+\beta z)\ z\big)}{(1+\beta z+qz)^k}\frac{z^{k-n-2}dz}{(1+\beta z)^n} + \tag{43}$$

$$+2U^{k-n-l-1}(a,0)\int_0^\infty \frac{H(\alpha(x)+\beta)dx}{[U(a,x)+\beta U(a,0)+qU(a,0)]^k}\frac{-U'(a,x)dx\int_x^\infty U^{l-1}(a,x')dx'}{[U(a,x)+\beta U(a,0)]^n}.$$

Одной из основных функций для вычисления интенсивности при наличии источников в континууме является функция $M(q)$, являющаяся комбинацией моментов (27). Тем не менее, вычислять ее удобнее без использования моментов K_{knl} по расчетной формуле:

$$M(q) = \int_0^1\left[\frac{H(q)}{1+\beta z+qz} + \frac{H(q)-H\big((1+\beta z)\ z\big)}{1+\beta z-qz}\right]\frac{dz}{1+\beta z} +$$

$$+2U(a,0)\int_0^\infty \frac{-U'(a,x)\int_x^\infty U(a,x')dx'}{[U(a,x)+\beta U(a,0)]^n}\times \tag{44}$$

$$\times\left[\frac{H(q)}{U(a,x)+\beta U(a,0)+qU(a,0)} + \frac{H(q)-H(\alpha(x)+\beta)}{U(a,x)+\beta U(a,0)-qU(a,0)}\right]dx.$$

Вторые дроби в квадратных скобках в (44) становятся неопределенными при совпадении аргументов *Н*-функций, т.к. числитель и знаменатель обращаются в ноль. Применение правила Лопиталя заменяет эти дроби на

$$\frac{\lambda q}{2}H^2(q)N_{211}(q) \qquad z(q-\beta)=1$$

в интеграле по z и на

$$\frac{\lambda}{2U(a,0)}H^2(q)N_{211}(q) \qquad q-\beta=\alpha(x)$$

в интеграле по x.

3.6. *Составленный код*. Основным результатом данной работы является программный код, написанный на языке Fortran. Он доступен по ссылке на репозиторий: https://github.com/vitaliy-grigoryev/hfuncvoight.

Код разбит на несколько модулей и последовательно вычисляет функции, приведенные в этом разделе. Основными входными параметрами кода являются параметр Фойгта a, отношение поглощения в континууме и в центре линии

β, а также вероятность выживания фотона λ. Код позволяет рассчитывать профили линий при экспоненциальных внутренних источниках в линии и континууме вида $e^{-q\tau}$, в том числе и при однородном их распределении при $q = 0$, а также при освещении среды извне.

4. ***Результаты***. Ниже представлены результаты расчетов профилей спектральных линий, которые образуются в полубесконечной среде при полном перераспределении фотонов по частоте при каждом рассеянии с фойгтовским коэффициентом поглощения при различных комбинациях, определяющих этот профиль параметров в различных первичных источниках. Профилем линии мы будем называть отношение значений интенсивности выходящего излучения в частотах x к значению в центре линии: $r(x,\eta) = I(x,\eta)/I(0,\eta)$ с указанием дополнительных параметров.

Рассмотрение случая собственного излучения, порожденного источниками в линии (т.е. расчеты по формуле (21)), производиться не будет ввиду того, что они уже были представлены в [18], а разработанный численный код полностью соответствует.

4.1. ***Профили линии отраженного излучения при падении монохроматического излучения***. Отражение монохроматического излучения частоты x_0, падающего под одним углом θ_0 на полубесконечную среду, описывается формулой (24). Расчеты показали, что профиль линии не всегда

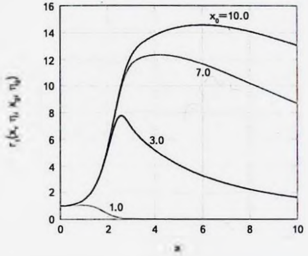

Рис.1. Профили линий отраженного излучения при падении монохроматического излучения при различных значениях параметра x_0 и при фиксированных остальных параметрах: $a = 10^{[illegible]}$, $\beta = 0$, $1 - \lambda = 0$, $\theta_0 = 0^\circ$. Рассматривается излучение, отраженное перпендикулярно среде ($\eta = 1$). С ростом частоты профили асимптотически стремятся к нулю.

монотонно зависит от определяющих его параметров, но важным результатом является различие профилей при варьировании параметра x_0, что представлено на рис.1. При удалении частоты падающего монохроматического излучения от центральной вероятность поглощения уменьшается, так что излучение проникает на большую глубину, испытывает большее число рассеяний и получаются более яркие крылья линии. Чем дальше по частоте падающее монохроматическое излучение от центра спектральной линии в среде, тем более профиль отраженной похож на абсорбционный профиль: появляются более яркие, по сравнению с центром, крылья линии.

4.2. ***Профили линии собственного излучения среды при экспоненциальном распределении источников в континууме.*** Профили линии определяются аналогично случаю источников в линии: $r_c(x,\eta) = I_c(x,\eta)/I_c(0,\eta)$, где интенсивность вычислялась по формуле (27). Экспоненциальное распределение источников описывается как $e^{-q\tau}$, где $q = \alpha(x_0) + \beta$.

Расчеты показали, что собственное излучение среды, формирующееся источниками в континууме (т.е., например, чернотельное излучение) при прохождении через оптически плотную среду, дает ожидаемую линию поглощения. Немонотонность расположения графиков r_c с ростом x_0 связана с тем, что значение интенсивности в центре линии растет несколько быстрее, чем максимальное значение, поэтому их отношение в некоторый момент начинает уменьшаться. Глубина этой линии зависит как от наличия поглощения в

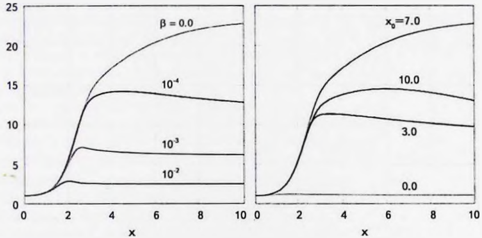

Рис.2. Профили линий собственного излучения при наличии источников в континууме. Слева: при различных значениях параметра β и фиксированных остальных параметрах: $a = 10^{-2}$, $1-\lambda = 0.0$, $x_0 = 7.0$. Справа: при различных значениях параметра x_0 и фиксированных остальных параметрах: $a = 10^{-2}$, $\beta = 0$, $1-\lambda = 0$. Рассматривается излучение, выходящее перпендикулярно среде ($\eta = 1$). С ростом частоты профили асимптотически выходят на плато.

континууме (рис.2 слева), так и от распределения источников в среде (рис.2 справа). Чем меньше поглощение, тем линия становится более мощной. С уменьшением значения q в распределении источников в континууме сильно меняется форма линии: чем ближе распределение источников к линейному (например, при $x_0 = 10.0 \Rightarrow q \approx 5.8\times10^{-5}$), тем сильнее заметно поглощение в крыле.

4.3. ***Профили линии отраженного излучения при падении континуума***. Если падающее излучение непрерывно по частоте, причем континуум простирается от частоты 0 до частоты X, а угол падения $\theta_0 = \arccos(\eta_0)$, то для нахождения отраженного излучения формулу (24) достаточно проинтегрировать по частоте. Причем, ввиду того, что профиль поглощения в линии $\alpha(x)$ является четной функцией, пределы интегрирования можно принять именно такими, т.к. для отрицательных частот формулы получатся аналогичными. Если при этом распределение падающего излучения задается функцией $Q(x_0)$, то интенсивность результирующего излучения будет

$$\bar{I}_1(x,\eta)=\frac{\lambda}{4}\frac{\alpha(x)}{\eta}AH(y)\int_0^X \alpha(x_0)Q(x_0)\frac{H(y_0)}{y+y_0}dx_0\,,\quad y=\frac{\alpha(x)+\beta}{\eta}\,,\quad y_0=\frac{\alpha(x_0)+\beta}{\eta_0}\,. \qquad (45)$$

Расчеты показали, что при падении континуума на среду около центральной частоты спектральной линии (в случае нейтронной звезды можно говорить о циклотронной линии), в отраженном спектре формируется профиль, который

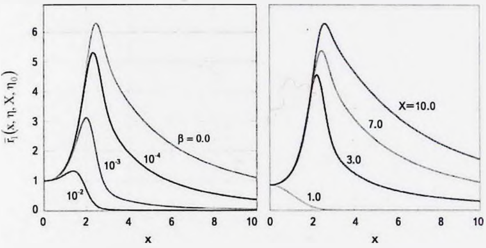

Рис 3. Профили линий отраженного излучения в случае падающего излучения, непрерывного по частоте. Слева: при различных значениях параметра β и фиксированных остальных параметрах: $a = 10^{-2}$, $1-\lambda = 0.0$, $x = 7.0$. Справа: при различных граничных частотах падения X и фиксированных остальных параметрах: $a = 10^{-2}$, $\beta = 0$, $1-\lambda = 0$. Угол падения $\theta_0 = 0$ в обоих случаях. Рассматривается излучение, отраженное перпендикулярно среде ($\eta = 1$). С ростом частоты профили асимптотически стремятся к нулю.

можно интерпретировать как абсорбционный: края линии существенно более яркие, чем центр. При варьировании параметров оказалось, чем ближе профиль к лоренцевскому (параметр a не мал), тем больше фотонов поглощается в крыльях линии, что способствует выравниванию спектра. Параметр β напрямую влияет на глубину абсорбционной детали: чем он меньше, тем образуется более глубокая линия, и тем медленнее спадают крылья линии, что хорошо заметно на рис.3 слева, т.е. даже при отсутствии поглощения в континууме ($\beta = 0$) можно говорить об абсорбционной детали. Чем более широкий спектр падает на среду, тем отраженная абсорбционная линия получается шире: частота максимальной яркости увеличивается с ростом ширины континуума, что демонстрируется на рис.3 справа.

5. ***Обоснование модели образования циклотронной линии в спектре нейтронной звезды***. В работе [21] предложена модель, согласно которой падающее на поверхность нейтронной звезды излучение ее аккреционной колонки с непрерывным спектром многократно рассеивается в атмосфере. Атмосфера нейтронной звезды моделируется полубесконечной средой. При этом в интенсивности отраженного излучения образуется циклотронная особенность.

Проверка работоспособности данной модели, фактически, произведена в разделе 4.3. Действительно, если на среду падает континуальное излучение, где есть источники линейчатого спектра и при этом выполняется приближение полного перераспределения по частоте, то в спектре отраженного излучения образуется профиль линии, который можно трактовать как абсорбционный, что видно на рис.3. При этом нами было использовано предположение, что профиль линии поглощения является фойгтовским, что позволяет говорить об аналогичных результатах для доплеровского или лоренцевского профиля.

Если также принять предположение, что атмосфера нейтронной звезды сама по себе излучает в континууме (например, как нагретое тело), то в спектре также будет образовываться абсорбционная линия. Комбинация обоих факторов (отражение + собственное излучение в континууме) позволяет полноценно объяснить наблюдаемую циклотронную особенность в спектрах пульсаров.

6. *Заключение*. В работе усовершенствован алгоритм расчета выходящего излучения из полубесконечной среды, а также составлен численный код, реализующий этот алгоритм. Применение данного алгоритма для расчета профилей линий в модельных задачах показало, что численный код работает надежно.

Одновременно показано, что модель образования циклотронных особенностей в спектре пульсаров при отражении излучения аккреционной колонки работоспособна. Если на среду с поглощающими и рассеивающими в спектральной линии атомами, но без поглощения и излучения в континууме падает излучение в континууме достаточной протяженности по частоте около частоты линии, то на выходе может образоваться линия поглощения. Для аккуратного расчета профиля такой линии в спектре нейтронной звезды необходимо использовать точные зависимости от частоты коэффициента поглощения и функций перераспределения по частоте и направлению [24], рассчитанные с учетом магнитного поля звезды и распределения падающего излучения по направлениям и частоте.

В общем случае в полубесконечной атмосфере могут существовать как источники в линии, так и в континууме, что определяется конкретными физическими условиями (химический состав, температура, наличие магнитного поля и т.д.). При этом необходимо помнить, что реальный вид функции $Q(x_0,\eta_0)$ определяется строгим расчетом спектра источника внешнего излучения (например, аккреционной колонки), а также геометрии атмосферы, что также влияет и на отраженный спектр. Поэтому более близким к реальности синтезированным спектром будет комбинация расчетных спектров с учетом перечисленных факторов.

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
e-mail: vitaliygrigoryev@yandex.ru

H-FUNCTIONS OF THE RADIATIVE TRANSFER THEORY: CALCULATION OF VOIGT FUNCTIONS AND JUSTIFICATION OF THE MODEL OF THE CYCLOTRON LINES FORMATION IN THE NEUTRON STAR SPECTRA

V.V.GRIGORYEV, D.I.NAGIRNER, S.I.GRACHEV

After short reminder of history of introducing *H*-function in radiative transfer theory the equations defining these functions and their explicit expressions are given. The formulas which can be used for calculation of distribution in direction and frequency of the intensity of radiation emerging from semi-infinite medium with different external and internal sources are given as well. The algorithm of calculation of Voigt *H*-functions and associated values is described in detail. A modern free code in Fortran language is developed, implementing the described algorithm. The code permits to calculate the profiles of spectral lines for the Voigt profile of absorption coefficient with high accuracy. The examples of calculation of spectral line profiles and qualitative proof of the hypothesis of formation of cyclotron features in the spectra of neutron stars are given.

Keywords: *radiative transfer theory: spectral lines: Voigt line profile: cyclotron feature*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., **19**, 30, 1942.
2. *В.А.Амбарцумян*, ЖЭТФ, **13**, 323, 1943.
3. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., **26**, 22, 1949.
4. *S.Chandrasekhar*, Astrophys. J., **103**, 165, 1946; **104**, 110, 1946; **104**, 191, 1946; **105**, 164, 1947.
5. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
6. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., **45**, 254, 1968; **45**, 528, 1968; **46**, 512, 1969.
7. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, М., Наука, 1972.
8. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., **31**, 231, 1954.
9. *В.В.Собалев*, Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, **11**, 39, 1958.
10. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **39**, 1029, 1962.
11. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., **36**, 573, 1959.
12. *Д.И.Нагирнер*, Астрон. ж., **41**, 669, 1964.
13. *M.Crum*, Quart. J. of Mathem. Oxford Series, **18**, 244, 1947.
14. *T.W.Mullikin*, Trans. Amer. Math. Soc., **113**, 316, 1964.
15. *Д.И.Нагирнер*, Труды Астрон. обсерв. Ленингр. ун-та, **25**, 3, 1968.
16. *S.Chandrasekhar*, *F.Breen*, Astrophys. J., **106**, 143, 1947.
17. *В.В.Иванов*, *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **1**, 143, 1965, (Astrophysics, **1**, 86, 1965).
18. *Д.И.Нагирнер*, Труды Астроном. обсерв. Ленингр. ун-та, **31**, 3, 1975.
19. *А.В.Дементьев*, Астрофизика, **52**, 605, 2009, (Astrophysics, **52**, 545, 2009).
20. *K.Kawabata*, Astrophys. Space Sci., **363**, 1, 2018, (https://arxiv.org/pdf/1712.04790.pdf).
21. *J.Poutanen*, *A.Mushtukov*, *V.Suleimanov et al.*, Astrophys. J., **777**, 115, 2013.
22. *В.К.Херсонский*, Известия Специальной астрофизической обсерватории, **15**, 75, 1982.
23. *D.G.Hummer*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **78**, 1, 1965.
24. *A.Mushtukov*, *D.Nagirner*, *J.Pountanen*, Phys. Rev. D, **93**, 105003, 2016.