

ДИФФУЗИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 27 февраля 2017

Ставится и решается модельная задача об образовании спектральных линий в поглощающей и рассеивающей атмосфере конечной оптической толщины при развитой в ней турбулентности. Целью работы является выявление влияния различного рода пространственно коррелированных нестационарных движений на наблюдаемые профили линии. Применяется метод инвариантного погружения, который позволяет решить поставленную задачу при достаточно общих предположениях как о характере турбулентности, так и об элементарном акте рассеяния и распределения источников энергии в среде. Особое внимание уделяется двум предельным режимам - макро- и микротурбулентности. Показано, что в случае микротурбулентности отражательная способность среды и ее непрозрачность во всем интервале частот наибольшие. Выявлено также, что зависимость наблюдаемых характеристик от корреляционной длины тем сильнее, чем толще среда и выше средняя скорость турбулентных движений.

Ключевые слова: *перенос излучения: турбулентная атмосфера: корреляционная длина*

1. Введение. Как известно, турбулентность является одной из наиболее распространенных явлений во Вселенной, проявляя себя в самых различных масштабах, от глубинных слоев и атмосфер планет и звезд до галактических и метagalacticких расстояний. Именно в хаотической среде, обусловленной турбулентностью, образуются галактики и скопления галактик. По современным представлениям настоящая картина Вселенной во многом обусловлена явлением турбулентности. Различие в масштабах явления, наблюдаемого в лабораторных условиях и на галактических расстояниях, составляет 10^{25} .

При изучении турбулентных сред в астрофизике приходится сталкиваться с необходимостью построения адекватной модели, описывающей наблюдаемую картину хаотических движений в излучающей среде. Данная задача является достаточно сложной, если учесть, что характер изучаемых движений существенно зависит от значений числа Рейнольдса. При ее решении естественным образом возникает задача теоретической интерпретации спектра, получаемого при наблюдениях. Удовлетворительное согласие с ним результатов решения соответствующей задачи переноса излучения позволило бы получить некоторые количественные оценки для различных характеристик хаотических движений

в излучаемой турбулентной среде.

Для определения влияния турбулентности на наблюдаемые спектры в астрофизических задачах наиболее часто рассматривают два взаимно противоположных предельных случая микро- и макротурбулентности, когда исследуемая задача существенно упрощается. Указанные два режима соответствуют достаточно малым и слишком большим по сравнению с длиной свободного пробега фотона значениям средней корреляционной длины, характеризующей степень взаимосвязи между изменениями поля скоростей в различных точках среды. В связи с этим приобретает большой интерес промежуточный случай так называемой мезотурбулентности [1], при котором размеры ячеек турбулентности произвольны. Существует целый ряд работ, посвященный вычислению спектра излучения, образуемого при данном режиме турбулентности. Краткое описание результатов указанных работ дается нами в [2], поэтому на этом мы здесь не остановимся. Укажем лишь, что модельные задачи, рассмотренные, например, в [3-5] и [6-8], используют различные приближения и подходы, в результате чего решения последних не согласуются друг с другом. В предыдущих работах автора [2,9,10] для решения задач переноса излучения в частотах спектральной линии, образуемой в турбулентной атмосфере, впервые были использованы методы Амбарцумяна. В первой из них метод инвариантного погружения применялся в простейшей задаче о формировании ЛТР-линий в атмосфере с распределенными в ней источниками энергии. Был предложен новый подход, заключающийся в том, что предварительно находится средняя интенсивность излучения, выходящего из среды при некотором фиксированном значении турбулентной скорости на ее границе, после чего производится усреднение по всевозможным реализациям этой величины. Исследование зависимости интенсивности наблюдаемого излучения от средней длины корреляции и средней гидродинамической скорости, в частности, показало, что переход между двумя предельными режимами турбулентности происходит в достаточно узком интервале изменения указанной длины. Вместе с тем возникает естественный вопрос о том, как изменятся выявленные эффекты, если предположить, что спектральная линия образуется в результате многократного рассеяния излучения в атмосфере. Учет диффузии излучения в линии существенно усложняет изучаемую задачу, поскольку теперь коррелируют между собой не только нетепловые скорости в различных точках атмосферы, но и поля излучения в них. Поэтому в работе [9] мы ограничились рассмотрением простейшей задачи о диффузном отражении излучения в линии от полубесконечной среды. При этом допускалось, что поле скоростей меняется достаточно медленно по сравнению с характерным временем, затрачиваемым фотоном на пребывание в среде [10,11]. Задача была решена применением принципа инвариантности, что

позволило, в частности, оценить среднее время блуждания фотона в среде и составить тем самым представление о степени законности упомянутого предположения в том или ином случае.

В настоящей работе рассматривается задача о диффузном отражении и пропускании излучения средой конечной оптической толщины, в которой развита стационарная и изотропная турбулентность. Предполагается, что источники энергии внутри среды отсутствуют, а диффузия излучения сопровождается частичным перераспределением излучения по частотам. Нас будет интересовать влияние турбулентности на средние значения наблюдаемых профилей спектральных линий, образуемых на границах среды в результате отражения и пропускания. Для решения задачи, как и в [2], используется метод инвариантного погружения, что позволяет выявить эффекты неоднородности как самого явления турбулентности, так и характеристик элементарного акта рассеяния.

2. *Формулировка задачи*. Основные величины. Пусть имеется одномерная рассеивающая и поглощающая атмосфера оптической толщины τ_0 , рассчитанная для центральной частоты линии в отсутствие турбулентности (в этом же смысле далее будут пониматься оптические глубины). Будем считать, что в среде развита однородная и изотропная турбулентность, причем случайные изменения проекции вектора нетепловой скорости на различных глубинах u_i и те же и задаются согласно гауссовскому закону

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi} u_i} e^{-u^2/u_i^2}, \quad (1)$$

где u_i связан с среднеквадратичной гидродинамической скоростью $u_i^2 = 2 \langle u^2 \rangle$, которая в данном случае описывает среднеквадратичное отклонение величины u . Предполагается, что нетепловые скорости пространственно коррелированы таким образом, что коэффициент корреляции ρ зависит лишь от расстояния $l = |\tau - \tau'|$ между оптическими глубинами различных точек. Для простоты допустим, что закон, которым связаны между собой изменения нетепловой скорости в пространстве, описывается с помощью гауссовского распределения на плоскости [12]

$$G(u, u', \rho) = \frac{1}{u_i \sqrt{\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(u - \rho u')^2}{u_i^2(1-\rho^2)}\right), \quad (2)$$

где ρ - коэффициент корреляции. Введенная таким образом функция G нормирована на единицу и обладает следующим вероятностным смыслом: $G(u, u', \rho(l)) du$ представляет собой вероятность того, что если на некоторой оптической глубине τ' значение нетепловой скорости равно u' , то на глубине τ оно примет значение в интервале $(u, u + du)$. Если считать процесс

однородным и марковским, то $\rho(l) = \exp(-l/\Lambda)$, где Λ - средняя длина корреляции [13-15].

Как было доказано в [2], функция G допускает билинейное разложение вида

$$G(u, u', \rho) = \frac{1}{\alpha_0(u')} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \alpha_k(u) \alpha_k(u'), \quad (3)$$

где

$$\alpha_k(u) = (2^k \pi u_i^2 k!)^{-1/2} e^{-(u/u_i)^2} H_k \left(\frac{u}{u_i} \right), \quad (4)$$

и $H_k(u)$ представляют собой полиномы Эрмита. Важно отметить, что $\alpha_k(u)$ составляют ортонормированную систему функций с весом $\alpha_0(u)$. Двумерное распределение (2) обладает мультипликативным свойством переходных вероятностей, заключающимся в том, что, если рассмотреть три глубины $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ и ввести обозначения $l_1 = |\tau_1 - \tau_2|$ и $l_2 = |\tau_2 - \tau_3|$, то пользуясь (3), нетрудно получить

$$G(u, u', \rho(l_1 + l_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u, u'', \rho(l_2)) G(u'', u', \rho(l_1)) du'', \quad (5)$$

известное как соотношение Колмогорова-Чепмена для марковских процессов.

Перейдем к величинам, определяющим оптические свойства самой среды. Элементарные акты поглощения и рассеяния в ней будем описывать с помощью профиля коэффициента поглощения в линии ω , представляющего собой диагональную матрицу с компонентами, зависящими от частоты, коэффициента рассеяния λ , закона перераспределения по частотам Γ и величины β , определяемой как отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре спектральной линии. Если не оговаривается противное, то все перечисленные величины, наряду с введенными выше параметрами u и Λ , будут считаться независимыми от глубины в среде.

Предположим теперь, что на конечную рассеивающую и поглощающую среду с описанными выше свойствами и развитой в ней турбулентностью со стороны границы $\tau = \tau_0$ падает квант частоты χ (рис. 1). Задача заключается в нахождении средних значений коэффициентов отражения и пропускания этой среды, которые мы обозначим соответственно через $\langle R(\tau_0) \rangle$ и $\langle Q(\tau_0) \rangle$. Элементы данных матриц имеют вероятностный смысл и зависят от частот



Рис. 1 К задаче о диффузном отражении и пропускании турбулентной атмосферы.

падающего и отраженного или пропущенного квантов. Введенные таким образом матрицы описывают профили спектральных линий, образуемых на границах рассматриваемой среды.

3. *Основные уравнения и решение задачи*. Как указывалось выше, для решения интересующей нас задачи применяется метод инвариантного погружения, который, по-видимому, можно считать наиболее эффективным для рассматриваемой модельной задачи, с точки зрения как ее решения, так и наиболее полного исследования влияния различных физических факторов на наблюдаемые величины. При этом возможны два подхода, каждый из которых имеет как достоинства, так и недостатки.

а. Введем в рассмотрение вспомогательные матрицы $\mathbf{R}(u, \tau_0)$ и $\mathbf{Q}(u, \tau_0)$, обозначающие коэффициенты отражения и пропускания при некотором фиксированном значении гидродинамической скорости u на границе среды $\tau = \tau_0$. Очевидно, что после определения указанных матриц нетрудно найти искомые средние значения глобальных оптических характеристик рассматриваемой атмосферы

$$\langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(u, \tau_0) \alpha_0(u) du, \quad \langle \mathbf{Q}(\tau_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}(u, \tau_0) \alpha_0(u) du. \quad (6)$$

Как известно (см., например, [16-18]), обычная процедура, выполняемая при использовании метода инвариантного погружения, состоит в прибавлении к исходной среде бесконечно тонкого слоя $\Delta\tau_0$ со стороны границы $\tau = \tau_0$ и учете вносимых при этом изменений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u, \tau_0 + \Delta\tau_0) = & [\mathbf{I} - \Delta\tau_0 \bar{\omega}(u) - \Delta\tau_0 \bar{\omega}(u')] \bar{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) + \\ & \frac{\lambda}{2} \Delta\tau_0 \left[\Gamma(u) + \Gamma(u) \bar{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) \Gamma(u) + \right. \\ & \left. \tilde{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) \Gamma(u) \bar{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{\mathbf{R}}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0)) = \mathbf{G}[\rho(\Delta\tau_0)] \mathbf{R}(u, \tau_0)$, $\bar{\omega}(u) = \omega(u) + \beta$ и \mathbf{G} представляет собой матрицу-функцию \mathbf{G} , элементами которой являются нетепловые скорости. Аргумент u у величин Γ и ω означает, что безразмерные частоты смещены на u .

Переходя к пределу, когда толщина приращения стремится к нулю, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = -[\mathbf{m}(u) \mathbf{R}(u, \tau_0) + \mathbf{R}(u, \tau_0) \mathbf{m}(u)] + \mathbf{n}(u) \cdot \mathbf{R}(u, \tau_0) \mathbf{n}(u) \mathbf{R}(u, \tau_0), \quad (8)$$

с начальным условием $\mathbf{R}(u, 0) = 0$. В приведенном уравнении $\mathbf{n}(u) = (\lambda/2) \Gamma(u)$, $\mathbf{m}(u) = \bar{\omega}(u) - \mathbf{n}(u)$. Здесь и далее, для краткости записи, зависимость величин, характеризующих элементарный акт рассеяния от τ_0 , не отмечается.

При выводе уравнения (8) производился предельный переход

$$\lim_{\Delta\tau_0 \rightarrow \infty} [\mathbf{R}(u, \tau_0) - \mathbf{R}(u, \tau_0, \rho(\Delta\tau_0))] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(u', \tau_0) \lim_{\Delta\tau_0 \rightarrow \infty} \frac{\delta(u-u') - G(u, u', \rho(\Delta\tau_0))}{(\Delta\tau_0)} du' =$$

$$-\frac{1}{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(u', \tau_0) \delta'(u-u') du' = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}. \quad (9)$$

Аналогичным образом для коэффициента пропускания получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial Q}{\partial u} = -Q(u, \tau_0) \{ \mathbf{m}(u) - \mathbf{n}(u) \mathbf{R}(u, \tau_0) \} \quad (10)$$

с начальным условием $Q(u, 0) = 1$. Уравнения (8) и (10) действительны для любых $\Lambda \neq 0$.

Предельный случай $\Lambda = 0$ соответствует режиму микротурбулентности, когда скорости нетеплового движения независимы на атомарном уровне, должен рассматриваться отдельно. Тогда, как это явствует из разложения (3), $G(u, u', 0) = \alpha_0(u)$ и поэтому, согласно первой из формул (6), вместо величины \mathbf{R} в правой части соотношения (7) будет фигурировать $\langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle$. В результате предельного перехода и ряда несложных выкладок вместо (8) будем иметь

$$\frac{d\langle \mathbf{R} \rangle}{d\tau_0} = -[\langle \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle + \langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle \langle \mathbf{m} \rangle] + \langle \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle \langle \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle, \quad (11)$$

где

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{m}(u) \alpha_0(u) du, \quad \langle \mathbf{n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n}(u) \alpha_0(u) du \quad (12)$$

и начальное условие $\langle \mathbf{R}(0) \rangle = 0$.

Таким образом, в данном предельном случае, как и следовало ожидать, полученное уравнение имеет тот же вид, что и при отсутствии турбулентности, различаясь от последнего лишь тем, что вместо профиля коэффициента поглощения и функции перераспределения по частотам входят статистические средние величины. Аналогичным образом пишется уравнение для коэффициента пропускания

$$\frac{d\langle Q \rangle}{d\tau_0} = -\langle Q(\tau_0) \rangle [\langle \mathbf{m} \rangle - \langle \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{R}(\tau_0) \rangle], \quad (13)$$

с начальным условием $\langle Q(0) \rangle = 1$.

В противоположном предельном случае $\Lambda \rightarrow \infty$, соответствующем режиму макротурбулентности, слагаемое в левой части уравнения (8), содержащее среднюю корреляционную длину, исчезает и уравнение принимает вид, совпадающий по форме с уравнением при отсутствии турбулентных движений, с той разницей, что частотные элементы у матриц $\mathbf{m}(u)$ и $\mathbf{n}(u)$ здесь

смешены на u . Полученное уравнение решается известными методами, после чего с использованием первой из формул (6) находим требуемый результат. При промежуточных значениях Λ уравнения (8) и (10) можно решать приближенно, разлагая неизвестные функции в ряд по ортонормированной системе функций (4). Такую возможность мы покажем ниже при описании следующего подхода.

б. Второй подход основан на использовании методов теории групп при описании процедуры сложения поглощающих и рассеивающих слоев. Он был разработан автором в [19-21], где, в частности для однородных сред, был установлен закон преобразования величин $P = Q^{-1}$ и $S = RP$

$$\begin{pmatrix} P_{1U2} \\ S_{1U2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & -S_2 \\ S_2 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ S_1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $M = Q - SP$. Если объединяются два слоя, один из которых обладает бесконечно малой толщиной $\Delta\tau_0$, а оптическая толщина другой равна τ_0 , то (14) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} P(\tau_0 + \Delta\tau_0) \\ S(\tau_0 + \Delta\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + m\Delta\tau_0 & -n\Delta\tau_0 \\ n\Delta\tau_0 & I + m\Delta\tau_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\tau_0) \\ S(\tau_0) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Пусть имеется теперь турбулентная атмосфера с вышеописанными свойствами и $P(u, \tau_0)$ и $S(u, \tau_0)$ обозначают значения указанных величин при условии, что на границе среды скорость турбулентных движений равна u . Тогда соотношение (15) переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} P(u, \tau_0 + \Delta\tau_0) \\ S(u, \tau_0 + \Delta\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + m(u)\Delta\tau_0 & -n(u)\Delta\tau_0 \\ n(u)\Delta\tau_0 & I - m(u)\Delta\tau_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P}(u, \tau_0) \\ \bar{S}(u, \tau_0) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\bar{P}(u, \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u, u', \rho(\Delta\tau_0)) P(u', \tau_0) du', \quad \bar{S}(u, \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u, u', \rho(\Delta\tau_0)) S(u', \tau_0) du', \quad (17)$$

Переходя к пределу при $\Delta\tau_0 \rightarrow 0$, аналогично тому, как выше это было совершено при получении (8) и (10), находим

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial P}{\partial u} = m(u)P(u, \tau_0) - n(u)S(u, \tau_0), \quad (18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial S}{\partial u} = n(u)P(u, \tau_0) - m(u)S(u, \tau_0), \quad (19)$$

с начальными условиями $P(u, 0) = I$, $S(u, 0) = 0$.

Таким образом, мы приходим к линейной системе двух векторно-матричных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Если турбулентность и сама среда однородные, то коэффициенты в полученных уравнениях не зависят от τ_0 .

Один из способов решения задачи (18), (19) заключается в следующем. На основе разложения (3) функции G несложно показать, что

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha_k(u)}{\alpha_0(u)} \mathbf{p}_k(\tau_0), \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha_k(u)}{\alpha_0(u)} \mathbf{s}_k(\tau_0), \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{p}_k(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(u, \tau_0) \alpha_k(u) du, \quad \mathbf{s}_k(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(u, \tau_0) \alpha_k(u) du. \quad (21)$$

Тогда из (18) и (19) с учетом (20) несложно получить систему векторно-матричных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения $\mathbf{p}_k(\tau_0)$ и $\mathbf{s}_k(\tau_0)$

$$\frac{d \mathbf{p}_k}{d \tau_0} = -\frac{i}{\Lambda} \mathbf{p}_k(\tau_0) + \sum_{k=0}^{\infty} [\gamma_{ik} \mathbf{p}_k(\tau_0) - \bar{\gamma}_{ik} \mathbf{s}_k(\tau_0)], \quad (22)$$

$$\frac{d \mathbf{s}_k}{d \tau_0} = -\frac{i}{\Lambda} \mathbf{s}_k(\tau_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_{ik} \mathbf{p}_k(\tau_0) - \gamma_{ik} \mathbf{s}_k(\tau_0)], \quad (23)$$

где

$$\gamma_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_i(u) \alpha_k(u)}{\alpha_0(u)} \mathbf{m}(u) du, \quad \bar{\gamma}_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_i(u) \alpha_k(u)}{\alpha_0(u)} \mathbf{n}(u) du. \quad (24)$$

При полном перераспределении по частотам данные коэффициенты вычисляются аналитически. В случае неоднородной турбулентности матрицы \mathbf{m} и \mathbf{n} , а следовательно и коэффициенты γ_{ik} и $\bar{\gamma}_{ik}$, зависят от оптической толщины среды. Уравнения (22) и (23) справедливы для любых $\Lambda \neq 0$.

В двух предельных режимах система уравнений (18), (19) допускает аналитические решения. Например, в случае макротурбулентности решение для однородной атмосферы можно записать в виде матричной экспоненты

$$\bar{\mathbf{Y}}(u, \tau_0) = \bar{\mathbf{Y}}(u, 0) \exp(-\bar{\mathbf{A}}(u) \tau_0), \quad (25)$$

где приняты обозначения

$$\bar{\mathbf{Y}}(u, \tau_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(u, \tau_0) \\ \mathbf{S}(u, \tau_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}}(u, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}(u) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(u) & -\mathbf{n}(u) \\ \mathbf{n}(u) & -\mathbf{m}(u) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

при этом тильдой снабжены супервекторы и суперматрицы.

В раскрытом виде для величин $\mathbf{P}(u, \tau_0)$ и $\mathbf{S}(u, \tau_0)$ будем иметь

$$\mathbf{P}(u, \tau_0) = \text{ch}[\kappa(u) \tau_0] + \mathbf{m}(u) \kappa^{-1} \text{sh}[\kappa(u) \tau_0], \quad (27)$$

$$\mathbf{S}(u, \tau_0) = \mathbf{n}(u) \kappa^{-1} \text{sh}[\kappa(u) \tau_0]. \quad (28)$$

где $\kappa^2(u) = \bar{\omega}(u)[\bar{\omega}(u) - 2\mathbf{n}(u)]$,

При $\Lambda = 0$ вместо уравнений (18), (19) получаем соотношения

$$\frac{dP(u, \tau_0)}{d\tau_0} = m(u)P(\tau_0) - n(u)S(\tau_0), \tag{29}$$

$$\frac{dS(u, \tau_0)}{d\tau_0} = n(u)P(\tau_0) - m(u)S(\tau_0), \tag{30}$$

причем $\langle P(\tau_0) \rangle$ и $\langle S(\tau_0) \rangle$ являются решениями соответственно уравнений

$$\langle P(\tau_0) \rangle'' - \kappa^2 \langle P(\tau_0) \rangle = 0, \quad \langle S(\tau_0) \rangle'' - \kappa^2 \langle S(\tau_0) \rangle = 0, \tag{31}$$

где $\kappa^2 = \langle \omega(u) [\omega(u) - 2n(u)] \rangle$, и начальные условия: $\langle P(0) \rangle = 1$, $\langle S(0) \rangle = 0$, $\langle P'(0) \rangle = \langle m(u) \rangle$, $\langle S'(0) \rangle = \langle n(u) \rangle$.

Тогда из (29) и (30) окончательно находим

$$P(u, \tau_0) = \kappa^{-1} m(u) \text{sh}(\kappa \tau_0) + \lambda \kappa^{-2} \Gamma m(u) [\text{ch}(\kappa \tau_0) - 1], \tag{32}$$

$$S(u, \tau_0) = \kappa^{-1} n(u) \text{sh}(\kappa \tau_0). \tag{33}$$

Таким образом в обоих предельных случаях величины $P(u, \tau_0)$ и $S(u, \tau_0)$ находятся в явном виде, что является преимуществом данного подхода. Он важен в особенности для представления зависимости искомых величин от оптической толщины атмосферы. Вместе с тем следует отметить и недостаток, который заключается в необходимости многократного обращения полученных решений при определении требуемых коэффициентов отражения и пропускания.

4. *Некоторые численные результаты.* Как было сказано выше, переход от макротурбулентности к режиму микротурбулентности происходит

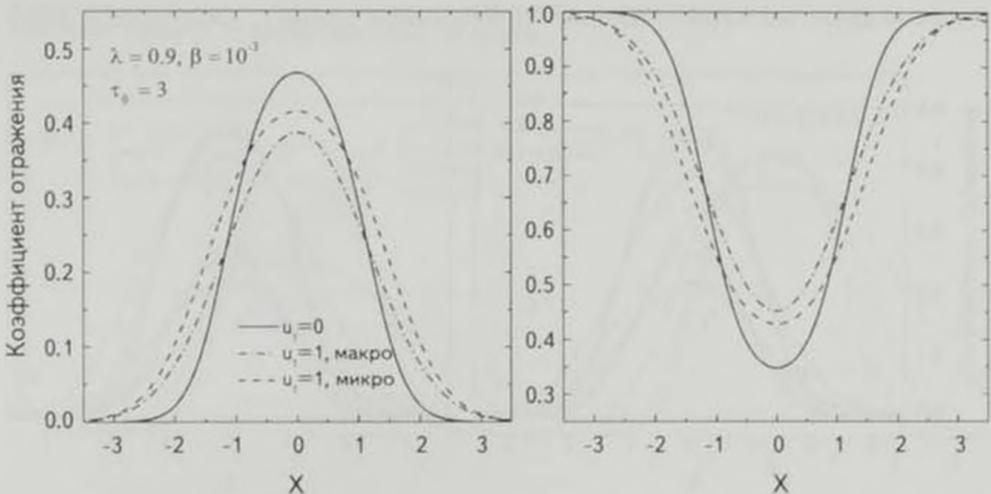


Рис.2. Коэффициенты отражения и пропускания поглощающей и рассеивающей турбулентной атмосферы оптической толщины $\tau_0 = 3$ при макро-, микротурбулентности, и в отсутствие турбулентности.

в весьма узком интервале изменения средней корреляционной длины, поэтому здесь основное внимание мы будем уделять именно указанным двум предельным режимам с целью выявить влияние различного рода турбулентных движений на оптические характеристики поглощающей и рассеивающей атмосферы. На рис.2 приведены типичные примеры решения представленных матричных уравнений для полного перераспределения излучения по частотам. На нем показаны профили коэффициентов отражения и пропускания однородной атмосферы оптической толщины $\tau_0 = 3$ для трех случаев: микро-, макротурбулентности, а также при отсутствии турбулентности. Параметры, описывающие турбулентные движения в среде, также полагаются не зависящими от точки в ней. Мы видим, что при обоих режимах турбулентности спектральная линия расширяется, однако данный эффект значительно сильнее в режиме микротурбулентности. Во всем диапазоне частот внутри линии среда с развитой в ней микротурбулентностью отражает больше и пропускает меньше лучистой энергии, нежели в режиме макротурбулентности. Другими словами, увеличение средней длины корреляции делает турбулентную среду более прозрачной и менее отражающей.

На рис.3 изображены профили отраженных линий в зависимости от оптической толщины среды и значения средней скорости турбулентного движения. Предположения относительно закона перераспределения по частотам и элементарного события рассеяния те же, что и в предыдущем примере. Приведенные графики показывают, что различие между двумя предельными режимами турбулентности (следовательно, и влияние корреляционной длины) возрастает с увеличением толщины атмосферы и средней скорости нелогического движения. Здесь и далее мы ограничиваемся приведением данных, касающихся лишь

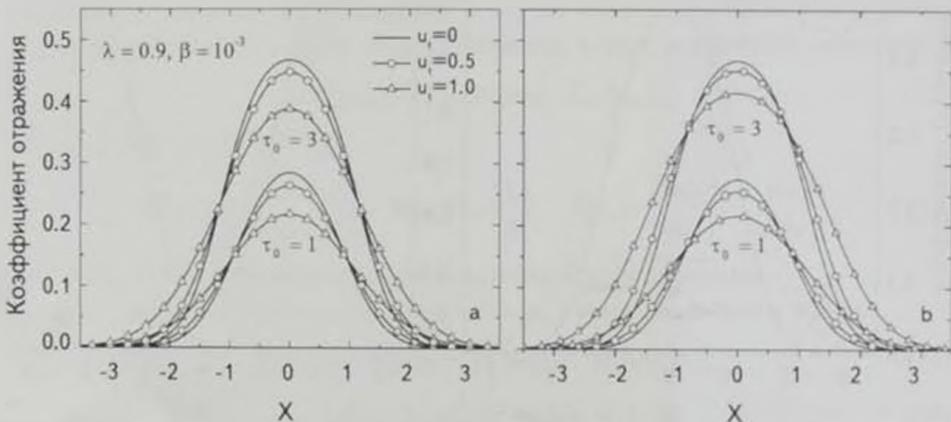


Рис.3. Коэффициенты отражения поглощающей и рассеивающей турбулентной атмосферы в зависимости от оптической толщины и средней скорости нелогического движения при макро- (а), микротурбулентности (б), и в отсутствии турбулентности.

коэффициента отражения, поскольку данные о коэффициенте пропускания не содержат дополнительной информации ввиду того, что количество лучистой энергии, претерпевшей истинное поглощение при заданном значении коэффициента рассеяния, не зависит от рода турбулентности.

Рис.4 показывает зависимость профиля спектральной линии, наблюдаемой на границе $\tau = \tau_0$ микро- и макротурбулентной атмосферы, от значения коэффициента рассеяния λ при $u_1 = 1$ и $u_1 = 2$. Из приведенных графиков можно заключить, что различие между двумя предельными режимами возрастает и становится существенным при больших значениях коэффициента рассеяния и средней скорости гидродинамических движений.

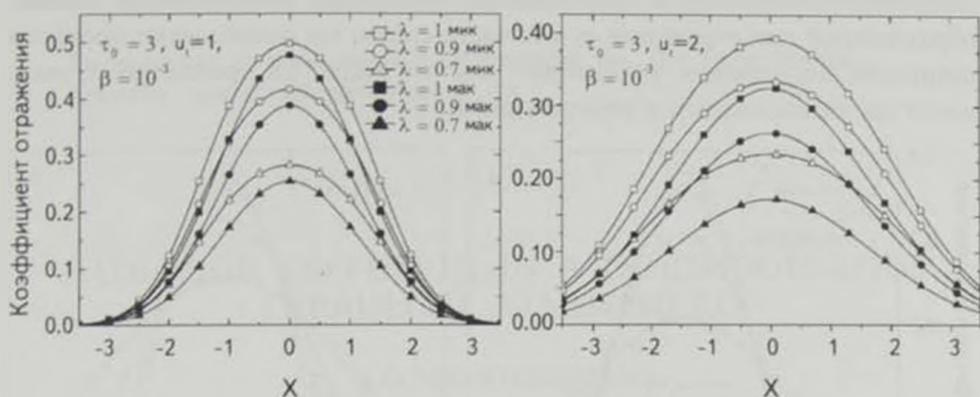


Рис 4 Коэффициенты отражения поглощающей и рассеивающей турбулентной атмосферы в зависимости от коэффициента рассеяния при макро- и микротурбулентности при различных значениях средней гидродинамической скорости.

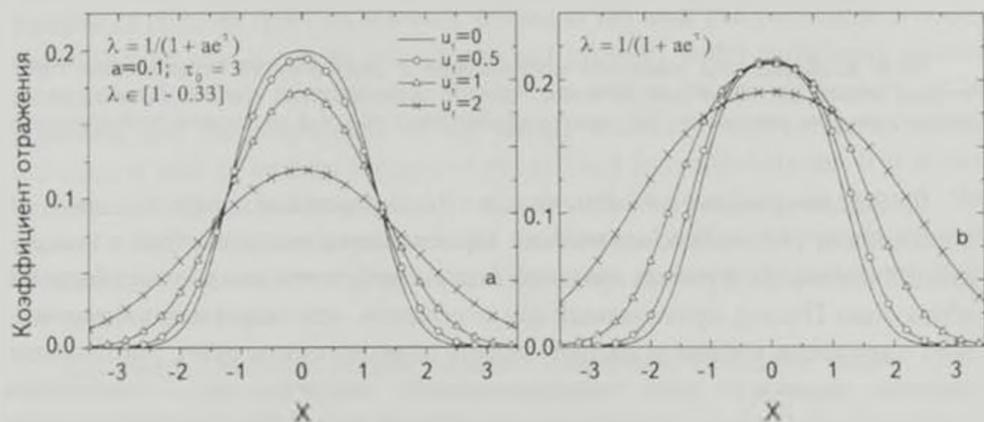


Рис.5 Коэффициенты отражения поглощающей и рассеивающей неоднородной турбулентной атмосферы оптической толщины $\tau_0 = 3$ в зависимости от средней скорости теплевого движения при макро- (а), микротурбулентности (б), и в отсутствии турбулентности.

Рис.5 и 6 показывают влияние неоднородности атмосферы, обусловленное зависимостью коэффициента рассеяния от глубины, на наблюдаемые профили излучения, отраженного от границы $\tau = \tau_0$. Рассмотрены обе возможности: если в первом случае роль диффузии излучения возрастает в направлении к границе $\tau = \tau_0$ (рис.5), то во втором - эта роль уменьшается (рис.6). На рисунках указаны области изменения параметра λ . В обоих случаях принимается, что диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частотам, а в непрерывном спектре поглощение отсутствует. Наиболее важное заключение, которое можно сделать на основе приведенных результатов, состоит в том, что изменение роли процессов рассеяния является особенно существенным в режиме микротурбулентности. В этом режиме уширение спектральной линии, образованной при отражении от той части среды, где преобладают процессы истинного поглощения, происходит, как это видно на правом рис.5, мало влияя на интенсивность в центре линии.

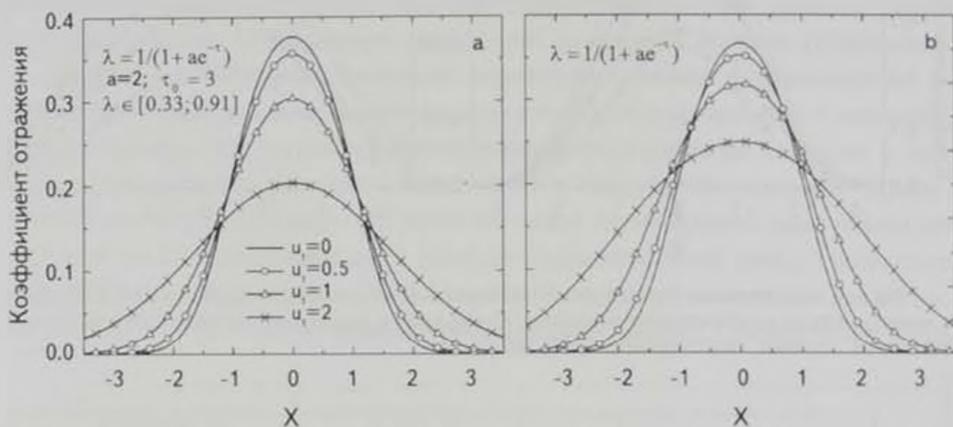


Рис.6. Коэффициенты отражения поглощающей и рассеивающей неоднородной турбулентной атмосферы оптической толщины $\tau_0 = 3$ в зависимости от средней скорости тепловых движений при макро- (а), микротурбулентности (б), и в отсутствии турбулентности

5. *Заключительные замечания.* Рассмотренная в работе задача об определении глобальных оптических характеристик поглощающей и рассеивающей атмосферы в рамках принятой модели турбулентности обладает большой общностью. Подход, применяемый для ее решения, использует идею инвариантного погружения, которая позволяет охватить широкие классы задач, учитывающие наличие различного рода неоднородностей, связанных как с характером турбулентности, так и с оптическими свойствами среды. При достаточно общей постановке задача сводится к решению линейного или квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка с начальными условиями. В двух

предельных режимах микро- и макротурбулентности уравнения упрощаются и позволяют получить решение для семейства задач диффузии излучения в турбулентных средах различных оптических толщин. Результаты расчетов относятся именно к этим двум режимам, что позволяет выявить в каких пределах и как меняются наблюдаемые профили спектральной линии. Тому, каким образом осуществляется переход между ними, будет посвящена другая работа. Как и ожидалось в обоих режимах линия становится шире, однако это уширение происходит по-разному, в результате чего среда с развитой в ней макротурбулентностью оказывается более отражательной и непрозрачной. Указанные различия в проявлениях турбулентных движений различного рода тем больше, чем толще среда и чем выше средняя скорость этих движений.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: nikoghoss@bao.sci.am

RADIATION DIFFUSION IN A INHOMOGENEOUS TURBULENT ATMOSPHERE

A.G.NIKOGHOSSIAN

We pose and solve a model problem of the spectral lines formation in an absorbing and scattering atmosphere of finite optical thickness with turbulence developed in it. The goal of the paper is to find out the effect of spatially correlated motions of different types on observed profiles of the line. The method of invariant imbedding we use allows to solve the posed problem under sufficiently general assumptions on the character of turbulence as well as on the elementary act of scattering and the distribution of the energy sources in the medium. Special attention is paid to limiting regimes of macro- and micro-turbulence. It is shown that the reflectivity and opacity of the micro-turbulent medium are greatest. We showed also that the more opaque is the medium and higher the average velocity of turbulent motions, the stronger the dependence of observed characteristics on the correlation length.

Key words: *radiative transfer; turbulent atmosphere; correlation length*

ЛИТЕРАТУРА

1. *D.F.Gray*, *Sol. Phys.*, **59**, 193, 1978.
2. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **50**, 219, 2007, (*Astrophysics*, **50**, 175, 2007).
3. *M.Auvergne, H.Frish, Ch.Froeschle, A.Pouquet*, *Astron. Astrophys.*, **29**, 93, 1973.
4. *H.Frish*, *Astron. Astrophys.*, **40**, 267, 1975.
5. *H.Frish, U.Frish*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **175**, 157, 1976.
6. *H.P.Gail, E.Sedlmayr*, *Astron. Astrophys.*, **36**, 17, 1974.
7. *H.P.Gail, E.Sedlmayr, G.Traving*, *Astron. Astrophys.*, **44**, 421, 1975.
8. *E.Hundt*, *Astron. Astrophys.*, **29**, 17, 1973.
9. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **50**, 321, 2007, (*Astrophysics*, **50**, 391, 2007).
10. *A.G.Nikoghossian*, *Light Scat. Rev.*, **8**, 425, 2013.
11. *C.Magnan*, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **15**, 979, 1975.
12. *Е.С.Вентцель*, *Теория вероятностей*, М., Наука, 1964.
13. *G.Batchelor*, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1970.
14. *A.T.Bharucha-Reid*, *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*, New York, McGraw-Hill, 1960.
15. *M.S.Bartlett*, *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambridge Univ. Press, 1965.
16. *R.Bellman, R.Kalaba, M.Wing*, *J. Math. Phys.*, **1**, 280, 1960.
17. *R.Bellman, R.Kalaba, M.Prestrud*, *Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness*, Amer. Elsevier, 1963.
18. *Дж.Касти, Р.Калаба*, *Методы погружения в прикладной математике*, М., Мир, 1976.
19. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **54**, 149, 2011, (*Astrophysics*, **54**, 126, 2011).
20. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **57**, 296, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 272, 2014).
21. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **57**, 407, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 375, 2014).