АСТРОФИЗИКА

ТОМ 54 ФЕВРАЛЬ, 2011 ВЫПУСК 1

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 3 ноября 2010

В работе теория групп привлекается для описания в одномерном приближении процедуры сложения неоднородных поглощающих и рассеивающих атмосфер. Неоднородность обусловлена изменением с глубиной коэффициента рассеяния. Приводится вывод представления группы композиции сред для трех различных случаев: неоднородные атмосферы, в которых коэффициент рассеяния меняется с глубиной непрерывным образом, составные или многокомпонентные атмосферы, а также частный случай однородных атмосфер. Дается дальнейшее развитие выдвинутой ранее нами идеи о решении задач теории переноса излучения, заключающейся в том, что вначале находятся глобальные характеристики среды (коэффициенты отражения и пропускания), после чего внутреннее поле излучения определяется для целого семейства сред без решения каких-либо новых уравнений. Отдельно рассматривается полубесконечная атмосфера. Для некоторых частных зависимостей коэффициента рассеяния от глубины удается получить простые аналитические решения, выражающиеся через элементарные функции. Описывается алгоритм численного решения задач переноса в неоднородных атмосферах.

Ключевые слова: *перенос излучения:одномерная среда: представление группы*

1. *Введение*. Важность рассмотрения задач переноса излучения в одномерной атмосфере обусловлена, по крайней мере, двумя причинами. Во-первых, такие задачи обычно легче поддаются решению и весьма удобны в применении. Вместе с тем, несмотря на приближение, они иногда могут обеспечить удовлетворительную точность в оценке тех или иных характеристик поля излучения в трехмерной среде с плоскопараллельной симметрией. Во-вторых, решение задач в этом приближении служит незаменимым подспорьем в понимании эффектов, связанных с самим процессом переноса, в случаях, когда именно они выдвигаются на первый план, а не вопросы, связанные с геометрией среды и пространственным распределением излучения.

Предыдущие наши работы [1-4] были посвящены переносу излучения в одномерной неоднородной атмосфере, когда коэффициент рассеяния (или вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния) λ является функцией оптической глубины. Рассматривались различные, наиболее часто встречаемые в приложениях, задачи и характерные сложности, возникающие при учете неоднородностей. Основная идея, развиваемая в указанных работах, заключается в следующем. Хорошо известно, что расчет поля излучения в поглощающей и рассеивающей атмосфере сводится к решению уравнений переноса при соответствующих граничных условиях. Решение такой краевой задачи сталкивается с трудностями, связанными с тем, что в результате многократного рассеяния устанавливается связь между полем излучения в различных точках атмосферы. В трехмерных задачах вопрос сводится к решению интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. Трудности возникают и при решении задач переноса излучения в одномерном приближении, если среда является неоднородной. Вместе с тем, как было нами показано, возможен другой, отличающийся от классического, подход, заключающийся в том, что предварительно находятся коэффициенты отражения и пропускания некоторого семейства атмосфер с различными оптическими толщинами, что является сравнительно легко разрешимой задачей с начальными условиями (задача Коши). Решение последней позволяет без особого труда определить поле излучения внутри исходной атмосферы вместе с различными его статистическими характеристиками, как, например, среднее число рассеяний или среднее время блуждания кванта в среде.

Данный подход мы будем развивать и в настоящей работе. Он основан на обобщенных, на случай неоднородной атмосферы, законах сложения для коэффициентов отражения и пропускания, полученных нами в [1,2]. Как известно, такие законы для однородной атмосферы впервые были получены Амбарцумяном в [5] (см. также [6]).

В настоящей работе впервые будет дано теоретико-групповое описание процедуры сложения или вычитания слоев различной оптической толщины и различных физических свойств. Определяется представление группы как для однородной, так и для неоднородных сред. Полученные результаты позволяют легко найти поле излучения внутри одномерной неоднородной атмосферы. Некоторые примеры таких решений приводятся в конце работы.

2. *Группы композиции слоев*. Введем понятие композиции или преобразования рассеивающих и поглощающих атмосфер, заключающееся в добавлении к исходной атмосфере другой, в общем случае, неоднородной атмосферы (или изъятии из исходной атмосферы какой-либо ее части). Предполагается, что последние не содержат первичных источников энергии. Введенные таким образом преобразования составляют группу, если под групповым произведением в ней понимать результирующее двух последовательных преобразований. Нетрудно видеть, что остальные условия для образования группы удовлетворяются. В частности, роль единичного элемента будет играть тождественное преобразование, оставляющее исходную атмосферу без изменения, а обратным элементам соответствуют преобразования, обратные по отношению к тому или иному уже проведенному преобразованию. Ассоциативность группового произведения

очевидна. Условимся такую группу преобразований называть группой GN2. Нетрудно понять, что она не является коммутативной. Важную роль среди такого рода групп играют группы, связанные с образованием многокомпонентной атмосферы. В этом случае под преобразованием будем понимать добавление (или изъятие) однородной среды, характеризующейся некоторой оптической толщиной и некоторым значением коэффициента рассеяния λ. Такая группа (назовем ее GNH2), будучи некоммутативной, является двупараметрической. В том частном случае, когда значение величины λ одинаково для всех прибавляемых или вычитаемых сред (группа GH2), мы приходим к случаю однородных атмосфер. Очевидно, что в этом случае группа коммутативна, т.е. является абелевой [7]. Кроме того она является однопараметрической, бесконечной и непрерывной.

Как известно, каждую однородную среду оптической толщины τ_0 можно характеризовать двумя величинами-коэффициентами отражения $r(\tau_0)$ и пропускания $q(\tau_0)$, имеющими вероятностный смысл. В то же время в работах автора [1,2] было показано, что неоднородная атмосфера обладает свойством полярности, т.е. ее оптические свойства описываются уже тремя параметрами - двумя коэффициентами отражения и одним коэффициентом прохождения.

На рис.1 схематически показаны два случая, когда на композитную среду, образованную в результате сложения двух неоднородных рассеивающих и поглощающих сред с оптическими толщинами τ_1 и τ_2, снаружи

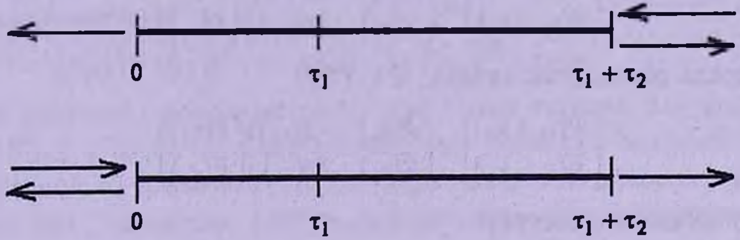


Рис.1. Отражение и пропускание композитной атмосферы.

падает квант света. Условимся чертой сверху обозначать коэффициент отражения каждой из сред при их освещении слева.

Формулы сложения для случая, изображенного на верхней части рисунка, имеют вид

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1-r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}, \quad r(\tau_1+\tau_2)=r(\tau_2)+\frac{r(\tau_1)q^2(\tau_2)}{1-r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}. \tag{1}$$

Для коэффициента отражения композитной атмосферой слева (нижняя часть рисунка) можно написать

$$\bar{r}(\tau_1+\tau_2)=\bar{r}(\tau_1)+\frac{r(\tau_1)q^2(\tau_2)}{1-r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}. \tag{2}$$

Если ввести новые величины $P = q^{-1}$, $S = rq^{-1}$ и $\bar{S} = \bar{r}q^{-1}$, то первое из уравнений (1) можно будет переписать в виде

$$P(\tau_1 + \tau_2) = P(\tau_1)P(\tau_2) - S(\tau_1)\bar{S}(\tau_2). \qquad (3)$$

Разделив второе из соотношений (1) на первое, после ряда несложных преобразований находим

$$S(\tau_1 + \tau_2) = P(\tau_1)S(\tau_2) + S(\tau_1)M(\tau_2), \qquad (4)$$

где $M(\tau) = [1 - S(\tau)\bar{S}(\tau)]\,/P(\tau)$. Аналогичные преобразования с использованием формулы сложения (2) дают

$$\bar{S}(\tau_1 + \tau_2) = P(\tau_2)\bar{S}(\tau_1) + \bar{S}(\tau_2)M(\tau_1). \qquad (5)$$

Непосредственной проверкой можно удостовериться, что существует закон сложения и для величины $M(\tau)$

$$M(\tau_1 + \tau_2) = M(\tau_1)M(\tau_2) - S(\tau_1)\bar{S}(\tau_2). \qquad (6)$$

Если ввести теперь в рассмотрение матрицы

$$\mathrm{A}(\tau) = \begin{pmatrix} P(\tau) & -\bar{S}(\tau) \\ S(\tau) & M(\tau) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

то нетрудно убедиться, что они также составляют группу и образуют представление группы GN2. Действительно, каждому элементу группы GN2 соответствует преобразование $T(g)$

$$\begin{pmatrix} P(\tau_1+\tau_2) \\ S(\tau_1+\tau_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau_2) & -\bar{S}(\tau_2) \\ S(\tau_2) & M(\tau_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\tau_1) \\ S(\tau_1) \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

если среда освещается справа, и - $T'(g)$

$$\begin{pmatrix} P(\tau_1+\tau_2) \\ \bar{S}(\tau_1+\tau_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau_1) & -S(\tau_1) \\ \bar{S}(\tau_1) & M(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\tau_2) \\ \bar{S}(\tau_2) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

в противоположном случае.

Далее, групповому произведению $g_1 \otimes g_2$ соответствует матричное произведение $\mathrm{A}(\tau_1 + \tau_2) = \mathrm{A}(\tau_2)\mathrm{A}(\tau_1)$, т.е. $T(g_1 \otimes g_2) = T(g_2)T(g_1)$ для правого освещения и $\tilde{\mathrm{A}}(\tau_1 + \tau_2) = \tilde{\mathrm{A}}(\tau_1)\tilde{\mathrm{A}}(\tau_2)$, т.е. $T'(g_1 \otimes g_2) = T'(g_1)T'(g_2)$ - для освещения слева (здесь тильдой мы обозначили транспонированную матрицу). Тождественному преобразованию, очевидно, соответствует единичная матрица: $T(e) = \mathrm{E}$ и $T'(e) = \mathrm{E}$. Матрица $\mathrm{A}(\tau)$ несингулярна (детерминант равен единице), поэтому существуют обратные матрицы

$$\mathrm{A}^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} M(\tau) & S(\tau) \\ -\bar{S}(\tau) & P(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathrm{A}}^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} M(\tau) & \bar{S}(\tau) \\ -S(\tau) & P(\tau) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Оба приведенных представления группы изоморфны, поскольку соответствие между группами GN2 и $T(g)$, а также GN2 и $T'(g)$, взаимооднозначное.

Для инфинитезимального оператора группы $T(g)$ имеем

$$\Xi = \lim_{\tau\to 0}\frac{\mathbf{A}(\tau)}{\tau} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & -\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Отсюда соотношение (6) можно записать в дифференциальной форме

$$P'(\tau_0) = \left(1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right)P(\tau_0) - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}S(\tau_0), \quad S'(\tau_0) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}P(\tau_0) - \left(1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right)S(\tau_0), \tag{12}$$

$P(0)=1$, $S(0)=0$. Данная система уравнений впервые была получена нами в [1] (см. также [2]). С ее помощью для функций $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$ можно получить отдельные уравнения

$$\frac{d^2P}{d\tau_0^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dP}{d\tau_0} - \left(1-\lambda-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)P(\tau_0) = 0, \quad \frac{d^2S}{d\tau_0^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dS}{d\tau_0} - \left(1-\lambda+\frac{\lambda'}{\lambda}\right)S(\tau_0) = 0, \tag{13}$$

для решения которых, помимо приведенных выше начальных значений искомых функций, следует учесть, что $P'(0) = 1-\lambda(0)/2$ и $S'(0) = \lambda(0)/2$.

В случае однородных атмосфер указанные уравнения, как и соответствующая плотность Лагранжиана, не содержат явным образом τ_0 (т.е. τ_0 является циклической координатой), поэтому трансляция оптической толщины является для системы (12) преобразованием симметрии. Вариационный подход, предложенный нами в работах [8,9] для уравнений типа (12), позволяет заключить, что данная система уравнений допускает закон сохранения вида

$$[P(\tau_0) - S(\tau_0)]^2 - (1-\lambda)[P(\tau_0) + S(\tau_0)]^2 = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Значение константы определяется из начальных условий для функций $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$ и равно λ. Соотношение (14) несложно получить также непосредственно из уравнений (12). Оно хорошо известно в теории переноса излучения (см., например, [10]) и записывается через коэффициенты отражения и пропускания в виде

$$\lambda[1+r(\tau_0)]^2 - 4r(\tau_0) = \lambda q^2(\tau_0). \tag{15}$$

2.1. *Поле излучения внутри среды*. Как уже указывалось выше, знание коэффициентов отражения и пропускания для сред различной оптической толщины позволяет весьма просто определить поле излучения внутри некоторой атмосферы фиксированной оптической толщины. Рассмотрим перенос излучения в среде оптической толщины τ_0, как это показано на верхней части рис.2. Предположим, что коэффициент рассеяния меняется в среде непрерывным образом. Для описания поля излучения внутри среды введем в рассмотрение величины $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$, представляющими собой вероятность того, что квант, падающий на границу среды τ_0, в общем случае после многократных рассеяний окажется на глубине τ, движущийся соответственно к границе 0 и τ_0. Очевидно, что если задать величину падающего потока, то знание упомянутых вероятностей позволит перейти непосредственно к соответствующим интенсивностям.

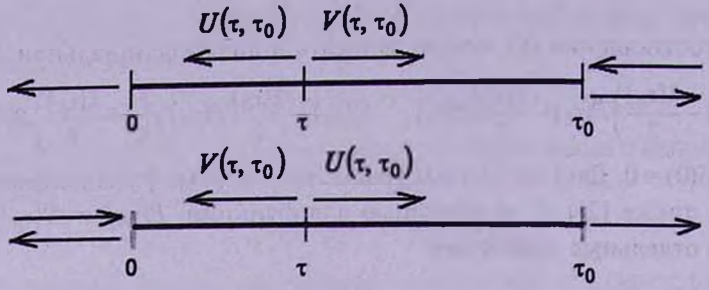


Рис.2. К определению поля излучения внутри среды.

По аналогии с группами, введенными выше, введем понятие группы трансляций оптической глубины, заключающееся в переходе от одной оптической толщины к другой. Условия необходимые для образования группы, как нетрудно проверить, удовлетворяются. Все, что говорилось относительно свойств группы GN2 для оптической толщины, в равной мере относится к композициям (трансляциям) оптической глубины. Единственное ограничение заключается в том, что значение оптической глубины, получаемой в результате трансляции, не должно превышать значение оптической толщины рассматриваемой среды. С учетом вероятностного смысла введенных нами величин можно написать

$$q(\tau_0) = U(\tau, \tau_0) q(\tau), \quad V(\tau, \tau_0) = r(\tau) U(\tau, \tau_0), \tag{16}$$

откуда

$$U(\tau, \tau_0) = q(\tau_0) P(\tau), \quad V(\tau, \tau_0) = q(\tau_0) S(\tau). \tag{17}$$

Таким образом, знание коэффициентов отражения и пропускания семейства атмосфер с оптическими толщинами, не превосходящими τ_0, по сути дела, является достаточным для определения, без решения каких-либо новых уравнений, поля излучения внутри среды, освещаемой извне. Более того, если рассматривается, например, другая, часто встречаемая задача о свечении среды, содержащей внутри источники энергии, то знание функций $U(\tau, \tau_0)$ и $V(\tau, \tau_0)$ позволяет с учетом принципа обратимости оптических явлений определить интенсивности излучения выходящего из среды

$$I(0, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) V(\tau, \tau_0) d\tau, \quad I(\tau_0, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) U(\tau, \tau_0) d\tau, \tag{18}$$

где $B(\tau)$ - мощность внутренних источников энергии.

Принимая во внимание соотношения (17), нетрудно понять, что группа $T(g)$ является одновременно и представлением группы трансляций оптической глубины. В самом деле, на основании (8) можно написать

$$\begin{pmatrix} U(\tau+\tau',\tau_0) \\ V(\tau+\tau',\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau') & -\overline{S}(\tau') \\ S(\tau') & M(\tau') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(\tau,\tau_0) \\ V(\tau,\tau_0) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Соотношения, вытекаемые из (19), показывают каким образом связаны между собой интенсивности излучения на разных глубинах атмосферы. Инфинитезимальный оператор представления группы трансляции оптических глубин совпадает, очевидно, с (11) и приводит к обычным уравнениям переноса

$$\begin{aligned} U'(\tau,\tau_0) &= \left(1-\frac{\lambda(\tau)}{2}\right)U(\tau,\tau_0) - \frac{\lambda(\tau)}{2}V(\tau,\tau_0), \\ V'(\tau,\tau_0) &= \frac{\lambda(\tau)}{2}U(\tau,\tau_0) - \left(1-\frac{\lambda(\tau)}{2}\right)V(\tau,\tau_0), \end{aligned} \tag{20}$$

при условиях $U(\tau_0,\tau_0)=1$, $V(0,\tau_0)=0$.

Если атмосфера однородная, то, как и выше в случае оптических толщин, имеет место закон сохранения, который теперь возможно написать непосредственно на основании соотношений (14) и (17).

$$[U(\tau,\tau_0)-V(\tau,\tau_0)]^2 - (1-\lambda)[U(\tau,\tau_0)+V(\tau,\tau_0)]^2 = \lambda q^2(\tau_0). \tag{21}$$

Несмотря на свою очевидность, данное соотношение долгое время оставалось неизвестным (см. также [8]).

Рассмотрим теперь случай, когда среда освещается со стороны границы 0, схематически показанный на нижней части рис.2. Соображения, аналогичные тем, приведенным при написании соотношений (17), позволяют заключить, что

$$U(\tau,\tau_0) = q(\tau_0)P(\tau_0-\tau), \quad V(\tau,\tau_0) = q(\tau_0)\overline{S}(\tau_0-\tau), \tag{22}$$

причем подразумевается, что в величинах, относящихся к толщине $\tau_0-\tau$, коэффициент рассеяния меняется в интервале $[\tau,\tau_0]$. На основании (9) имеем

$$\begin{pmatrix} P(\tau_0-\tau) \\ \overline{S}(\tau_0-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau') & -S(\tau') \\ \overline{S}(\tau') & M(\tau') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\tau_0-\tau-\tau') \\ \overline{S}(\tau_0-\tau-\tau') \end{pmatrix}, \tag{23}$$

откуда

$$\begin{pmatrix} U(\tau,\tau_0) \\ V(\tau,\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau') & -S(\tau') \\ \overline{S}(\tau') & M(\tau') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(\tau+\tau',\tau_0) \\ V(\tau+\tau',\tau_0) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

или

$$\begin{pmatrix} U(\tau+\tau',\tau_0) \\ V(\tau+\tau',\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\tau') & \overline{S}(\tau') \\ -S(\tau') & P(\tau') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(\tau,\tau_0) \\ V(\tau,\tau_0) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В дифференциальной форме данное соотношение переходит в обычные уравнения переноса при условиях $U(0,\tau_0)=1$, $V(\tau_0,\tau_0)=0$. Полученные формулы являются необходимыми для рассмотрения часто встречаемой на практике задачи переноса излучения в полубесконечной атмосфере.

2.2. *Полубесконечная атмосфера*. В соотношениях (24) перейдем к пределу при $\tau_0 \to \infty$. За предельными значениями величин U и V (которые, очевидно, существуют), зависящими теперь лишь от оптической глубины, мы сохраним прежние обозначения. С учетом сказанного имеем

$$U(\tau) = P(\tau')U(\tau+\tau') - S(\tau')V(\tau+\tau'), \quad V(\tau) = \overline{S}(\tau')U(\tau+\tau') + M(\tau')V(\tau+\tau'). \tag{26}$$

Отсюда можно получить целый ряд различных соотношений, некоторые из которых известны в теории переноса излучения в однородной среде. Так, например, первое из формул (26) можно записать в виде

$$U(\tau+\tau') = g(\tau')U(\tau) + r(\tau')V(\tau+\tau'). \tag{27}$$

Принимая во внимание вторую из формул (22), запишем ее для данного случая как $V(\tau) = r_\infty U(\tau)$, где r_∞ - коэффициент отражения полубесконечной атмосферы. Тогда находим

$$U(\tau+\tau') = g(\tau')U(\tau)/[1 - r_\infty r(\tau')], \text{ или } U(\tau+\tau') = U(\tau)U(\tau'). \tag{28}$$

Последнее соотношение отражает полугрупповое свойство функции $U(\tau)$. С учетом принципа обратимости оптических явлений можно заключить, что таким же свойством обладает и вероятность выхода из полубесконечной атмосферы кванта, движущегося на некоторой глубине по направлению к ее границе.

Приведем еще несколько результатов. Так, при $\tau = 0$ формула (22) дает

$$U(\tau) = q(\tau) + r(\tau)V(\tau). \tag{29}$$

где штрихи для простоты записи опущены. Другая подобного рода формула получается из второго соотношения (26) при подстановке $\tau = 0$

$$r_\infty = \overline{r}(\tau) + g(\tau)V(\tau). \tag{30}$$

В [11] данные формулы, записанные для однородной атмосферы, называются принципами инвариантности (подробнее об этом вопросе см. [12]). Соотношения (29) и (30) показывают, что интенсивности излучения на той или иной глубине полубесконечной атмосферы полностью определяются отражательной способностью этой атмосферы и оптическими свойствами конечной среды толщиной, равной рассматриваемой глубине.

3. *Многокомпонентная атмосфера*. В качестве примера неоднородной атмосферы рассмотрим многокомпонентную среду, состоящую из некоторого количества однородных сред, отличающихся друг от друга оптической толщиной и значением коэффициента рассеяния λ. Задача, заключающаяся в определении отражательной и пропускательной способности такой атмосферы, помимо того, что представляет самостоятельный интерес, является важной при разработке схемы численного расчета указанных величин для среды с непрерывным изменением λ.

Как уже упоминалось в начале работы, здесь мы имеем дело, в общем случае, с двупараметрической некоммутативной группой GNH2. Поскольку теперь под преобразованием понимается добавление (или изъятие) однородной среды, то представление группы запишется в виде

$$\mathbf{A}(\tau,\lambda)=\begin{pmatrix} P(\tau,\lambda) & -S(\tau,\lambda) \\ S(\tau,\lambda) & M(\tau,\lambda)\end{pmatrix}. \tag{31}$$

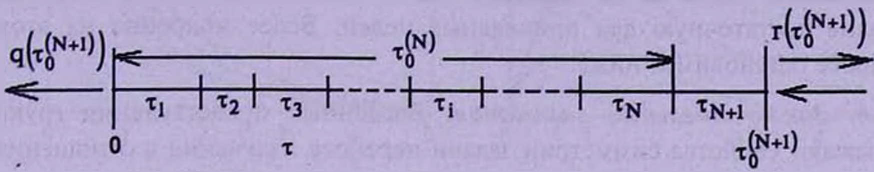


Рис.3. Перенос излучения в многокомпонентной атмосфере.

Пусть задана многокомпонентная атмосфера, состоящая из N слоев, оптическая толщина которой равна $\tau_0^{(N)}$. Допустим, что среда освещается со стороны границы $\tau_0^{(N)}$, как это показано на рис.3. Тогда, на основании (8), для нахождения оптических характеристик такой среды будем иметь

$$\begin{pmatrix} P\left(\tau_0^{(N+1)}\right) \\ S\left(\tau_0^{(N+1)}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(\tau_N,\lambda_N) & -S(\tau_N,\lambda_N) \\ S(\tau_N,\lambda_N) & M(\tau_N,\lambda_N)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P\left(\tau_0^{(N)}\right) \\ S\left(\tau_0^{(N)}\right)\end{pmatrix}, \tag{32}$$

в которой τ_N и λ_N относятся к прибавляемому однородному слою, поэтому для соответствующих величин P, S и M существуют явные выражения (см., например, [4,10])

$$P(\tau_N,\lambda_N)=\frac{1}{4k_N}\left[(1+k_N)^2 e^{k_N\lambda_N}-(1-k_N)^2 e^{-k_N\lambda_N}\right], \tag{33}$$

$$S(\tau_N,\lambda_N)=\frac{1-k_N^2}{2k_N}\operatorname{sh}(k_N\tau_N), \tag{34}$$

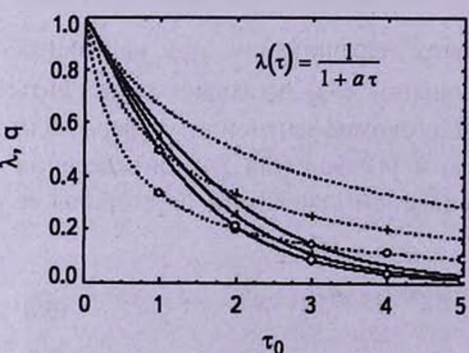
$$M(\tau_N,\lambda_N)=\frac{1}{4k_N}\left[(1+k_N)^2 e^{-k_N\lambda_N}-(1-k_N)^2 e^{k_N\lambda_N}\right], \tag{35}$$

где $k_N=\sqrt{1-\lambda_N}$. Таким образом, путем наращивания, при начальных условиях $P\left(\tau_0^{(0)}\right)=1$, $S\left(\tau_0^{(0)}\right)=0$, соотношение (32) позволяет определить искомые оптические характеристики многокомпонентной атмосферы. Для полноты приведем также полученную в [4] формулу для определения отражательной способности рассматриваемой атмосферы со стороны ее границы 0

$$\overline{S}\left(\tau_0^{(N)}\right)=\frac{1}{P\left(\tau_0^{(N-1)}\right)}\left[P\left(\tau_0^{(N)}\right)\overline{S}\left(\tau_0^{(N-1)}\right)+S(\tau_N,\lambda_N)\right]. \tag{36}$$

Чтобы в полной мере оценить важность полученных формул, необходимо отметить, что последние могут служить отправным пунктом для разработки простого алгоритма нахождения оптических характеристик атмосферы, в которой коэффициент рассеяния меняется в среде непрерывным образом. В частности, если оптическую толщину прибавляемых однородных слоев взять одинаковой и достаточно малой, то в результате получим весьма эффективный способ численного решения обсуждаемой задачи. Как показывают расчеты, на практике всегда можно обеспечить точность, вполне достаточную для прикладных целей. Более подробно на этом вопросе остановимся ниже.

4. *Заключительные замечания.* Введенные представления групп выражают свойства симметрии задачи переноса излучения в отношении изменений оптической толщины, а также оптической глубины, когда речь идет о поле излучения внутри среды. В то же время они дают возможность легко построить решение задач переноса при произвольном законе изменения коэффициента рассеяния в атмосфере. При этом сначала находятся глобальные оптические характеристики среды (коэффициенты отражения и пропускания), что является задачей с начальными условиями, и только затем без решения каких-либо уравнений определяется поле излучения внутри нее. Данный подход позволяет получить сразу решение семейства задач, обеспечивая при этом высокую точность получаемых результатов для достаточно большого интервала изменения оптической толщины. Особую важность для практических целей представляет рассмотрение диффузии излучения в многокомпонентной атмосфере. Представление группы GNH2 в этом случае заключает в себе, по сути, простой алгоритм для сложения оптических параметров произвольного числа поглощающих и рассеивающих сред. С другой стороны, это же представление весьма успешно используется для построения решения задач, в которых коэффициент рассеяния меняется в атмосфере непрерывным образом. Некоторые из полученных результатов приведены на рис.4, 5, 6.



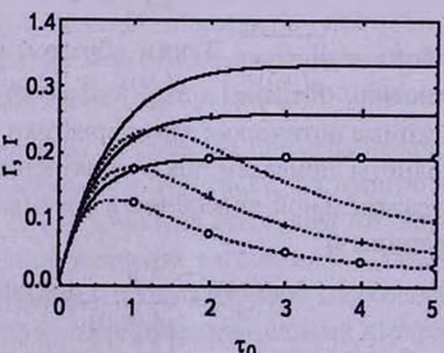


Рис.4. Левый снимок - коэффициенты рассеяния $\lambda(\tau) = 1/(1 + a\tau)$ (пунктир) и коэффициенты пропускания (сплошные линии); правый снимок - коэффициенты отражения соответствующие освещению справа и слева на рис.2. Кривые без значков относятся к случаю $a = 0.5$, крестиками и кружками обозначаются кривые соответственно для $a = 1$ и $a = 2$.

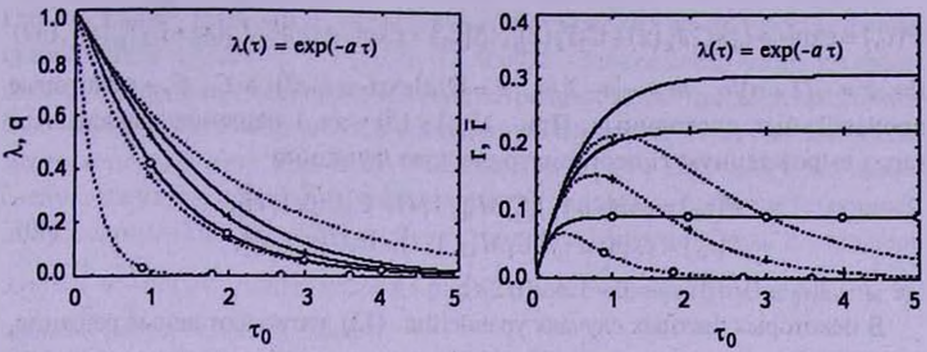


Рис.5. То же самое, что на рис.4 для коэффициента рассеяния $\lambda(\tau) = \exp(-a\tau)$. Кривые без значков относятся к случаю $a = 0.5$, крестиками и кружками обозначаются кривые соответственно для $a = 1$ и $a = 4$.

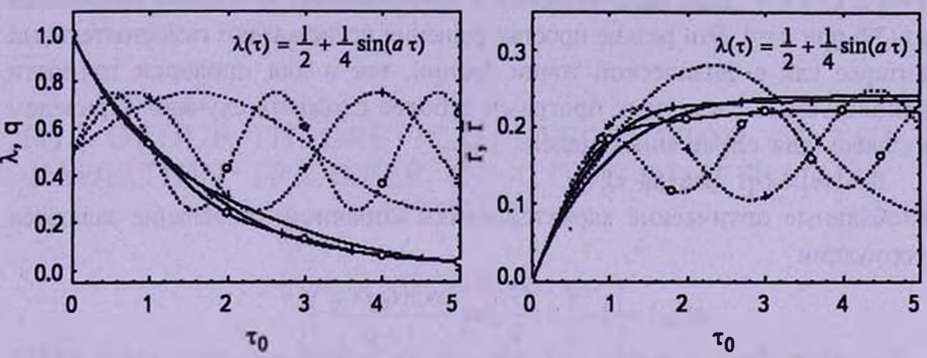


Рис.6. То же самое, что на рис.4 для коэффициента рассеяния $\lambda(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(a\tau)$. Кривые без значков относятся к случаю $a = 1$, крестиками и кружками обозначаются кривые соответственно для $a = 2$ и $a = 3$.

Чтобы уяснить себе сугубо математический аспект результатов работы, следует отметить связь рассмотренных уравнений с уравнениями типа Риккати. Так, например, решение системы уравнений (12) эквивалентно решению дифференциального уравнения второго порядка

$$F''(\tau_0) - [1 - \lambda(\tau_0)]F(\tau_0) = 0 \tag{37}$$

для функции $F(\tau_0) = P(\tau_0) + S(\tau_0)$. Начальными условиями, очевидно, будут $F(0) = F'(0) = 1$. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [13]), что замена по формуле $u = F'/F$ приводит к следующему уравнению типа Риккати

$$u'(\tau_0) + u^2(\tau_0) = 1 - \lambda(\tau_0). \tag{38}$$

К такому типу уравнений сводятся также уравнения (13). Решения указанных уравнений, в общем случае, выражаются через специальные функции. Так, например, для $\lambda(\tau_0) = \exp(-a\tau_0)$ общие решения уравнений (13) выражаются через функции Бесселя первого и второго рода и имеют вид

$$P(\tau_0)=\exp(-a\tau_0)[C_1J_k(x)+C_2Y_k(x)],\ S(\tau_0)=\exp(-a\tau_0)[C_1J_m(x)+C_2Y_m(x)], \quad (39)$$

где $k=-(2+a)/a$, $m=-|a-2|/a$, $x=(2/a)\exp(-a\tau_0/2)$, а C_1, C_2 - некоторые произвольные постоянные. При $\lambda(\tau_0)=1/(1+a\tau_0)$ решения выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$P(\tau_0)=\exp(-a\tau_0)[C_1M(\beta,1,t)+C_2U(\beta,1,t)],$$
$$S(\tau_0)=\exp(-a\tau_0)[C_1M(\gamma,1,t)+C_2U(\gamma,1,t)], \quad (40)$$

где $t=2[\tau_0+(1/a)]$, $\gamma=\beta-1=-(1/2a)$.

В некоторых частных случаях уравнения (13) допускают явные решения, выраженные через элементарные функциии, т.е. простые явные решения соответствующих уравнений Риккати. Два из них связаны с понижением порядка указанных уравнений для $\lambda(\tau_0)$, удовлетворяющих условиям $1-\lambda\pm\lambda'/\lambda=0$. Еще одно решение в элементарных функциях получается из (39) при $a=4$. Эти редкие простые решения представляют самостоятельный интерес как с физической точки зрения, так и для проверки точности используемых расчетных программ в более сложных случаях. Приведем их здесь для справочных целей.

1. $\lambda(\tau)=1/[1+a\exp(-\tau)]$.

Глобальные оптические характеристики конечной атмосферы задаются формулами

$$q(\tau_0)=\left[1+\left(a+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\exp(\tau_0)+a}{1+a}\right)\right]^{-1},$$
$$r(\tau_0)=1+2a\exp(-\tau_0)-(1+2a)q(\tau_0), \quad (41)$$
$$\bar{r}(\tau_0)=[1-q(\tau_0)]/(1+2a).$$

Коэффициент отражения от полубесконечной атмосферы равен, очевидно, $\bar{r}_\infty=1/(1+2a)$. Напомним, что знание данных величин дает возможность определить поле излучения внутри среды произвольной оптической толщины.

2. $\lambda(\tau)=1/[1+a\exp(\tau)]$.

Для одноименных характеристик в рассматриваемом случае имеем

$$q(\tau_0)=\left[1+\left(a\exp(\tau_0)+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+a}{\exp(-\tau_0)+a}\right)\right]^{-1},$$
$$r(\tau_0)=[1-q(\tau_0)]/[1+2a\exp(\tau_0)], \quad (42)$$
$$\bar{r}(\tau_0)=1+2a-[1+2a\exp(\tau_0)]q(\tau_0),\ \bar{r}_\infty=1+2a-2/\ln(1+a^{-1}).$$

3. $\lambda(\tau)=\exp(-4\tau)$.

$$q(\tau_0)=[\exp(\tau_0)\cos x-(1/2)\exp(\tau_0)\sin x]^{-1},$$
$$r(\tau_0)=(1/2)q(\tau_0)\exp(-\tau_0)\sin x, \quad (43)$$
$$\bar{r}(\tau_0)=q(\tau_0)\left[\exp(\tau_0)(2\sin x-\cos x)+\exp(-\tau_0)\left(\frac{1}{2}\sin x+\cos x\right)\right],$$

где $x = (1/2)[1-\exp(-2\tau_0)]$. Коэффициент отражения от полубесконечной среды в этом случае $\bar{r}_\infty = 2\mathrm{tg}(1/2) - 1 = 0.0926$. Зависимость этого коэффициента от значения параметра a в рассмотренных выше примерах различна. Если $r(\tau_0)$ представляет собой убывающую функцию от a, как это имеет место в первых двух примерах, а также при $\lambda(\tau_0) = \exp(-a\tau_0)$, то, как и следует ожидать, с ростом a отражательная способность соответствующей полубесконечной атмосферы будет падать. Вместе с тем в примере $\lambda(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin a\tau$, показанном на рис.6, с ростом a значение величины r_∞ сначала растет, а затем падает.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

THE GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF THE RADIATION TRANSFER IN A ONE-DIMENSIONAL MEDIUM

A.G.NIKOGHOSSIAN

The group theory is applied to describe the adding procedure for one-dimensional inhomogeneous absorbing and scattering atmospheres. The inhomogeneity is due to variability of the scattering coefficient with depth. We derive the representation of the media composition groups for three different cases: inhomogeneous atmospheres with continuously varying scattering coefficient, composite or multi-component atmospheres, as well as the special case of homogeneous atmospheres. We develop further the idea we previously suggested for solving the problems of the radiation transfer, according to what one first finds the global characteristics of a medium (the reflection and transmission coefficients), after which the internal field of radiation is determined for a family of media without solving any new equation. Separately, the semi-infinite atmosphere is considered. For some special functions of the scattering coefficient of depth, we managed to obtain the simple analytical solutions in terms of elementary functions. An algorithm for numerical solution of the transfer problems in inhomogeneous atmospheres is described.

Key words: *radiation transfer:one-dimensional medium:group's representation*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys., **422**, 1059, 2004.
2. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 123, 2004.
3. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 289, 2004.
4. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 481, 2004.
5. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, 1-2, 1944.
6. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
7. *Е.Вигнер*, Теория групп, М., изд. ИЛ, 1961.
8. *R.A.Krikorian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **56**, 465, 1996.
9. *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
10. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
11. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, М., изд. ИЛ, 1953.
12. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **52**, 471, 2008.
13. *В.И.Смирнов*, Курс высшей математики, т.2, М., Наука, 1974.