АСТРОФИЗИКА

ТОМ 53 МАЙ, 2010 ВЫПУСК 2

О ЕДИНОЙ СТРУКТУРЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Э.Х.ДАНИЕЛЯН

Поступила 28 июня 2009
Принята к печати 15 марта 2010

В предлагаемой работе излагаются основные концепции, позволившие разработать систему аналитического решения стандартных задач теории переноса излучения. Эти решения, найденные с применением метода сложения слоев Амбарцумяна в вероятностной интерпретации Соболева процессов диффузии излучения, предельно компактны по форме и легко поддаются численным расчетам. Получены новые выражения для резольвент и резольвентных функций, а также единая структурная форма интегрального представления для решения различных задач теории переноса излучения в полубесконечной среде и в конечном слое. Приводится блок-схема очередности этапов решения стандартных задач. Подчеркнуто, что при решении задач для полубесконечной среды, фундаментальную роль играет функция Амбарцумяна - $\varphi(\eta)$ (точнее, $1/\varphi(\eta)$), а для конечного слоя аналогичная роль отводится функциям $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$.

Ключевые слова: *теория переноса излучения:аналитические решения*

1. *Введение.* Метод решения задач теории переноса излучения, развитый в [1-4], основан, в частности, на крайне простой идее, состоящей в проведении некоторых аналитических интегрирований по оптической глубине. Иногда эти интегрирования приводят к существенным упрощениям и даже позволяют получать качественно новые результаты, способствуя тем самым дальнейшему развитию теории. При этом немаловажную роль играет адекватный подбор вспомогательных функций, позволяющих получать предельно компактные выражения. Как это ни удивительно, но такая возможность долгое время оставалась незамеченной. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере. Как известно, фундаменталиная функция $\varphi(\eta)$, введенная Амбарцумяном [5], удовлетворяет следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu+\eta} d\mu . \tag{1}$$

С другой стороны, она связана с резольвентной функцией Соболева посредством соотношения:

$$\varphi(\eta) = 1 + \int_0^\infty e^{-t/\eta}\,\Phi(t)dt . \tag{2}$$

Для последней Мининым [6] было получено следующее явное интегральное представление посредством функции Амбарцумяна:

$$\Phi(t) = \frac{Ce^{-kt}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-t/\mu}d\mu}{\mu R(\mu)\varphi(\mu)}, \tag{3}$$

подстановка которой в (2), после проведения аналитического интегрирования по оптической глубине, приводит (см. [7]) к качественно новому и крайне важному как с аналитической, так и с вычислительной точки зрения уравнению:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{C\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\eta)} + \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{d\mu}{(\mu+\eta)R(\mu)\varphi(\mu)}. \tag{4}$$

В последних двух выражениях, как и всюду ниже, обозначено: λ - вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, k - корень характеристического уравнения:

$$\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} = 1, \quad C = \frac{k(1-k^2)}{k^2-1+\lambda}, \quad R(\mu) = \left(\frac{\lambda\pi\mu}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\lambda}{2}\mu\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2. \tag{5}$$

В приведенном примере предполагалось, что рассеяние фотонов имеет место в однородной среде, а элементарный акт рассеяния происходит изотропно по направлениям и без изменения его энергии (частоты). Хотя для конкретных приложений приходится учитывать также частотное перераспределение (например, для звездных атмосфер), анизотропию рассеяния по направлениям (например, в атмосферах планет, в море), мы будем и впредь придерживаться оговоренных предположений. Дело в том, что результаты типа (4), да и вообще любые результаты, полученные в рамках сделанных допущений, легко поддаются обобщениям. На случай, так называемого, полного перераспределения по частотам , такое обобщение было найдено Ивановым [8]. При учете же анизотропии при элементарном акте рассеяния, подобные обобщения имеют место для "псевдовеличин", т.е., одноиндексных азимутальных гармоник "приведенных" интенсивностей, возникающих в результате разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра [9-11]. Из сказанного следует, что результаты, полученные для задач теории переноса при изотропном монохроматическом рассеянии, могут быть легко обобщены на многие более сложные случаи (см., например, [2,3]), сохраняя при этом первоначальную структуру.

Ниже, с помощью разработанной нами методики, базирующейся на принципе инвариантности и методе *сложения слоев* Амбарцумяна [5,12] в вероятностной интерпретации Соболева [13,14], будут получены явные выражения для основных характеристик поля диффузного излучения. Приводится также единая форма решений стандартных задач теории переноса в однородной плоскопараллельной среде при вышеупомянутых предположениях об элементарном акте рассеяния.

2. *Резольвента полубесконечной среды* $\Gamma(\tau,\tau^*)$. В настоящем разделе мы остановимся подробно на применении метода сложения слоев Амбарцумяна в вероятностной интерпретации Соболева при решении задачи о нахождении резольвенты полубесконечной среды $\Gamma(\tau,\tau^*)$, зависящей от двух переменных - оптических глубин приемника (τ) и источника (τ^*). Поскольку в ее окончательные выражения входят одна из вспомогательных функций $F(\tau,\eta)$ или $\widetilde{F}(\tau,\eta)$, введенных нами в [15], считаем целесообразным вкратце упомянуть их определения и некоторые свойства. Итак,

$$F(\tau,\eta)=e^{-\tau/\mu}+\int_0^\tau e^{-(\tau-t)/\eta}\,\Phi(t)\,dt\,,\quad \widetilde{F}(\tau,\eta)=\int_\tau^\infty e^{-(t-\tau)/\eta}\,\Phi(t)\,dt\,. \tag{6}$$

Они связаны с вероятностью выхода кванта из полубесконечной среды - $P(\tau,\eta)$ следующим образом:

$$\widetilde{F}(\tau,\eta)=2\pi\eta\varphi(\eta)\int_0^1\frac{P(\tau,\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu\,,\quad P(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi(\eta)F(\tau,\eta)\,. \tag{7}$$

Рассматривая эти функции и для отрицательного углового аргумента, из (6), легко получить:

$$F(\tau,-\eta)+\widetilde{F}(\tau,\eta)=e^{\tau/\eta}\,\varphi(\eta)\,. \tag{8}$$

Этот результат был найден в [16], где, кстати, приводятся их явные интегральные представления посредством функции Амбарцумяна (для чего надо подставить (3) в (6) и проинтегрировать по оптической глубине аналитически).

Нахождение резольвенты полубесконечной среды сводится к проведению следующих рассуждений. Пусть в исходной полубесконечной среде, ограниченной плоскостью $\tau=0$, на глубине τ^* имеется квант в поглощенном состоянии (т.е., имеется возбужденный атом) и требуется найти вероятность того, что излученный квант в результате многократных рассеяний поглотится между плоскостями параллельными границе и отстоящими от нее на оптическом расстоянии τ и $\tau+d\tau$, т.е. - $\Gamma(\tau,\tau^*)d\tau$. Для этого воспользуемся разновидностью метода сложения слоев и дополним исходную среду до бесконечной, т.е., добавим к ее границе бесконечно большой слой, обладающий теми же оптическими свойствами. В полученной суммарной бесконечной среде соответствующая вероятность - $\Gamma^\infty(\tau,\tau^*)d\tau$, как хорошо известно из теории, зависит лишь от абсолютного значения разности оптических глубин источника и приемника, т.е., $\Gamma^\infty(\tau,\tau^*)=\Phi^\infty(|\tau-\tau^*|)$, причем известно, что:

$$\Phi^\infty(t)=Ce^{-kt}+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-t/\zeta}}{\zeta R(\zeta)}\,d\zeta\,. \tag{9}$$

Очевидно также, что вероятность $\Phi^\infty(|\tau-\tau^*|)d\tau$ можно представить как сумму вероятностей для квантов не покинувших исходную полубесконечную среду, т.е., $\Gamma(\tau,\tau^*)d\tau$ и вероятностей для квантов, вышедших из нее по всем азимутам - $2\pi P(\tau^*,\mu)d\mu$, а затем, в результате многократных рассеяний уже в сумарной бесконечной среде, поглотятся в исходной среде между плоскостями, отстоящими от границы на оптическом расстоянии τ и $\tau+d\tau$, - $W^\infty(\tau,\mu)d\tau$. Поэтому ясно, что:

$$\Phi^\infty(|\tau-\tau^*|)=\Gamma(\tau,\tau^*)+2\pi\int_0^1 W^\infty(\tau,\mu)P(\tau^*,\mu)d\mu. \tag{10}$$

Нетрудно также видеть, что согласно определению:

$$W^\infty(\tau,\mu)=\int_\tau^\infty \frac{e^{-(t-\tau)/\mu}}{\mu}\Phi^\infty(t)dt. \tag{11}$$

После подстановки (9) в (11) и проведения аналитического интегрирования по t, получим:

$$W^\infty(\tau,\mu)=\frac{Ce^{-k\tau}}{1+k\mu}+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau/\zeta}}{R(\zeta)(\zeta+\mu)}d\zeta. \tag{12}$$

Теперь, вставляя (12) в (10) и меняя порядок интегрирования, а также учитывая (9) и первое из соотношений (7), после некоторых упрощений, получим решение поставленной выше задачи:

$$\Gamma(\tau,\tau^*)=\frac{C}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right)e^{-k|\tau-\tau^*|}-e^{-k\tau}\widetilde{F}\left(\tau^*,\frac{1}{k}\right)\right]+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\varphi(\zeta)e^{-|\tau-\tau^*|/\zeta}-e^{-\tau/\zeta}\widetilde{F}(\tau^*,\zeta)}{\zeta R(\zeta)\varphi(\zeta)}d\zeta. \tag{13}$$

Как известно, принцип обратимости оптических явлений проявляет себя в теории переноса, в частности, в симметрии резольвенты $\Gamma(\tau,\tau^*)=\Gamma(\tau^*,\tau)$ (т.е., в замене источника на приемник и, наоборот). Это позволяет в (13) манипулировать аргументами τ и τ^* в зависимости от предполагаемых дальнейших интегрирований по ним.

Выражение для резольвенты выглядит несколько компактнее, когда приемник находится глубже источника. С учетом (8), легко видеть, что:

$$\Gamma(\tau,\tau^*)=\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}F\left(\tau^*,-\frac{1}{k}\right)+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau/\zeta}F(\tau^*,-\zeta)}{\zeta R(\zeta)\varphi(\zeta)}d\zeta,\quad (\tau>\tau^*). \tag{14}$$

Очевидно, что в противоположном случае $(\tau<\tau^*)$, в правой части выражения (14) следует лишь поменять местами τ и τ^*.

3. ***Резольвента и резольвентная функция конечного слоя.*** Задачи о нахождении характеристик поля диффузного излучения в конечном слое намного сложнее по сравнению с аналогичными задачами в полубесконечной среде. И, тем не менее, применение метода сложения слоев

Амбарцумяна в вероятностной интерпретации позволяет сравнительно легко получить решения этих задач в аналитическом виде. Рассмотрим задачу о нахождении резольвенты конечного слоя $\Gamma\left(\tau, \tau^*; \tau_0\right)$. Поскольку конечный слой имеет две границы, то дополняя ее с обеих сторон до бесконечной, т.е., добавляя к каждой границе слой бесконечной толщины и проводя рассуждения подобные проведенным в предыдущем разделе, получим:

$$\Phi^\infty\left(\left|\tau - \tau^*\right|\right) = \Gamma\left(\tau, \tau^*; \tau_0\right) + 2\pi\int_0^1 W^\infty(\tau, \mu)\, p\left(\tau^*, \mu; \tau_0\right) d\mu + \\ + 2\pi\int_0^1 W^\infty(\tau_0 - \tau, \mu)\, p\left(\tau_0 - \tau^*, \mu; \tau_0\right) d\mu . \tag{15}$$

Здесь $p\left(\tau^*, \mu; \tau_0\right)$ - плотность вероятности выхода кванта, находящегося в поглощенном состоянии на глубине τ^*, через верхнюю границу ($\tau = 0$) слоя толщины τ_0 под углом $\cos^{-1}\mu$ к внешней нормали, а $W^\infty(\tau, \mu)$ - некая характеристика бесконечной среды, найденная выше. Если теперь подставить (12) в (15), то получим явное выражение резольвенты конечного слоя (в виде двукратного интеграла) посредством функции $p(\tau, \mu; \tau_0)$. Здесь необходимо заметить, что именно такое выражение для резольвенты, полученное совершенно другим путем, приводится в работе Малликина [17], т.е., в виде двукратного интеграла посредством функции источника конечного слоя, освещенного параллельными лучами (что то же самое, что и вероятность выхода кванта). Там же приводится явное интегральное представление для функции источника посредством некоторой вспомогательной функции $F(x, \mu; \tau_0)$, нахождение которой сводится к решению двух быстросходящихся интегральных уравнений по угловой переменной (см. [18]) и дальнейшим побочным интегрированиям для нахождения параметрических "констант", зависящих от оптической глубины и толщины слоя. Аналогичные выражения и быстросходящиеся интегральные уравнения для функции источника были найдены также в работе [19]. В обоих случаях авторами использовался аппарат теории функций комплексной переменной.

Качественно иное выражение для резольвенты можно получить, если исходный конечный слой дополнить до полубесконечной, т.е., добавить слой бесконечной толщины к одной из границ, скажем, к нижней. Тогда из аналогичных вероятностных соображений получим:

$$\Gamma\left(\tau, \tau^*\right) = \Gamma\left(\tau, \tau^*; \tau_0\right) + 2\pi\int_0^1 W(\tau; \tau_0, \mu)\, p\left(\tau_0 - \tau^*, \mu; \tau_0\right) d\mu . \tag{16}$$

Здесь функция $W(\tau; \tau_0, \mu)$ - некая характеристика полубесконечной среды, имеющая смысл вероятности того, что квант, первоначально движущийся в полубесконечной среде на глубине τ_0 под углом $\cos^{-1}\mu$ к внутренней нормали (т.е., в глубь среды), в результате диффузии поглотится между плоскостями, отстоящими от границы среды ($\tau = 0$) на оптических глубинах τ и $\tau + d\tau$. В силу определения ее можно найти с помощью резольвенты полубесконечной среды:

$$W(\tau;\tau_0,\mu)=\int_{\tau_0}^{\infty}\frac{e^{-(\tau-\tau_0)/\mu}}{\mu}\Gamma(\tau,t)dt\,. \tag{17}$$

С использованием явного выражения (14), получим:

$$W(\tau;\tau_0,\mu)=\frac{Ce^{-k\tau_0}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\mu)}F\left(\tau,-\frac{1}{k}\right)+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau_0/\zeta}F(\tau,-\zeta)}{R(\zeta)\varphi(\zeta)(\zeta+\mu)}d\zeta\,. \tag{18}$$

Теперь вводя величину (см. [20])

$$B(\tau,\zeta;\tau_0)=2\pi\zeta\int_0^1\frac{p(\tau,\mu;\tau_0)}{\mu+\zeta}d\mu\,, \tag{19}$$

и подставляя (12) в (15) и (18) в (16), для резольвенты получим два существенно разных выражения уже в форме с однократным интегрированием:

$$\Gamma(\tau,\tau^*;\tau_0)=C\left[e^{-k|\tau-\tau^*|}-e^{-k\tau}B\left(\tau^*,\frac{1}{k};\tau_0\right)-e^{-k(\tau_0-\tau)}B\left(\tau_0-\tau^*,\frac{1}{k};\tau_0\right)\right]+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-|\tau-\tau^*|/\zeta}-e^{-\tau/\zeta}B(\tau^*,\zeta;\tau_0)-e^{-(\tau_0-\tau)/\zeta}B(\tau_0-\tau^*,\zeta;\tau_0)}{\zeta R(\zeta)}d\zeta\,, \tag{20}$$

$$\Gamma(\tau,\tau^*;\tau_0)=\Gamma(\tau,\tau^*)-C\frac{e^{-k\tau_0}F\left(\tau,-\frac{1}{k}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}B\left(\tau_0-\tau^*,\frac{1}{k};\tau_0\right)-$$
$$-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau_0/\zeta}F(\tau,-\zeta)B(\tau_0-\tau^*,\zeta;\tau_0)}{\zeta R(\zeta)\varphi(\zeta)}d\zeta\,. \tag{20a}$$

Здесь важно отметить, что нахождение величины B требует не бóльших усилий, чем нахождение величины p, поскольку они обе просто (алгебраически) выражаются через введенные нами в [20] вспомогательные функции f и $\tilde{f}$:

$$\frac{4\pi}{\lambda}p(\tau,\eta;\tau_0)=\varphi(\eta,\tau_0)f(\tau,\eta;\tau_0)-\psi(\eta,\tau_0)\tilde{f}(\tau_0-\tau,\eta;\tau_0), \tag{21}$$

$$B(\tau,\eta;\tau_0)=a(\eta,\tau_0)\tilde{f}(\tau,\eta;\tau_0)+b(\eta,\tau_0)f(\tau_0-\tau,\eta;\tau_0). \tag{22}$$

Определение, некоторые свойства и явные выражения функций f и $\tilde{f}$ будут даны ниже - в разделе 4. Заметим, что аналогичные соотношения ранее были получены в [18]. В них $\varphi(\eta,\tau_0)$ и $\psi(\eta,\tau_0)$ - функции Амбарцумяна, а $a(\eta,\tau_0)$ и $b(\eta,\tau_0)$ - альтернативные по отношению к ним функции, определенные в [1] как:

$$a(\eta,\tau_0)=1-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}d\mu \qquad b(\eta,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\psi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}d\mu\,. \tag{23}$$

Полагая в (20) поочередно $\tau^*=0$ и $\tau=0$, с учетом симметрии резольвенты, а также, что $\frac{4\pi}{\lambda}p(0,\eta;\tau_0)=\varphi(\eta,\tau_0)$, и $\frac{4\pi}{\lambda}p(\tau_0,\eta;\tau_0)=\psi(\eta,\tau_0)$, получим две различные формы для ее граничных значений - резольвентной функции:

$$\Phi(\tau,\tau_0)=C\left[e^{-k\tau}a\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)-e^{-k(\tau_0-\tau)}b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)\right]+ \\ +\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau/\zeta}a(\zeta,\tau_0)-e^{-(\tau_0-\tau)/\zeta}b(\zeta,\tau_0)}{\zeta R(\zeta)}d\zeta, \tag{24}$$

$$\Phi(\tau,\tau_0)=C\left[e^{-k\tau}-B\left(\tau,\frac{1}{k};\tau_0\right)-e^{-k\tau_0}B\left(\tau_0-\tau,\frac{1}{k};\tau_0\right)\right]+ \\ +\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau/\zeta}-B(\tau,\zeta;\tau_0)-e^{-\tau_0/\zeta}B(\tau_0-\tau,\zeta;\tau_0)}{\zeta R(\zeta)}d\zeta. \tag{25}$$

Заметим, что соотношение (24) обладает большим преимуществом по сравнению с (25), поскольку неизвестные пока функции $a(\eta,\tau_0)$ и $b(\eta,\tau_0)$, в отличие от $B(\tau,\eta;\tau_0)$, не зависят от оптической глубины, что позволяет довольно просто проводить возможные интегрирования по ней аналитически.

Другие выражения для резольвентной функции посредством лишь одной из альтернативных функций следуют из (20а). Полагая в нем $\tau^*=\tau_0$ или $\tau^*=0$, а также учитывая, что $\Gamma(\tau,\tau_0;\tau_0)=\Phi(\tau_0-\tau,\tau_0)$, получим соответственно:

$$\Phi(\tau_0-\tau,\tau_0)=\frac{Ce^{-k\tau_0}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}F\left(\tau,-\frac{1}{k}\right)a\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau_0/\zeta}F(\tau,-\zeta)a(\zeta,\tau_0)}{\zeta R(\zeta)\varphi(\zeta)}d\zeta, \tag{26}$$

$$\Phi(\tau,\tau_0)=\Phi(\tau)-\frac{Ce^{-k\tau_0}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}F\left(\tau,-\frac{1}{k}\right)b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\tau_0/\zeta}F(\tau,-\zeta)b(\zeta,\tau_0)}{\zeta R(\zeta)\varphi(\zeta)}d\zeta. \tag{27}$$

И в заключение настоящего раздела приведем еще одно выражение для резольвентной функции, интересное тем, что входящие в него величины являются характеристиками поля излучения для сред *различной* оптической толщины

$$\Phi(\tau,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 f(\tau,\eta;\tau_0)\varphi(\eta,\tau_0-\tau)\frac{d\eta}{\eta}.$$

Оно следует из формулы (13) работы [20] (полагая в нем $\zeta=0$ и $\tau_2=0$). Сравнивая его с известным выражением:

$$\Phi(\tau,\tau_0)=2\pi\int_0^1 p(\tau,\eta;\tau_0)\frac{d\eta}{\eta},$$

можно было бы предположить, что имеет место гипотетическое равенство для их подынтегральных функций, т.е.:

$$2\pi p(\tau,\eta;\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta,\tau_0-\tau)f(\tau,\eta;\tau_0), \tag{A}$$

поскольку это равенство, помимо равенства определённых интегралов, имеет место также для целого ряда входящих в них параметров. Так:

1) при $\tau = 0$, так как $\frac{4\pi}{\lambda} p(0, \eta; \tau_0) = \varphi(\eta, \tau_0)$, а $f(0, \eta; \tau_0) = 1$,

2) при $\tau = \tau_0$, так как $\frac{4\pi}{\lambda} p(\tau_0, \eta; \tau_0) = \psi(\eta, \tau_0)$, $f(\tau_0, \eta; \tau_0) = \psi(\eta, \tau_0)$, а $\varphi(\eta, 0) = 1$,

3) при $\tau_0 = \infty$, так как $2\pi P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) F(\tau, \eta)$,

4) при $\eta = 0$, так как $p(\tau, 0; \tau_0) = 0$, $f(\tau, 0; \tau_0) = 0$, а $\varphi(0, \tau_0 - \tau) = 1$.

Гипотезу (А) нам не удалось пока аналитически ни доказать, ни опровергнуть. Ясно одно, что помимо начальной точки $\eta = 0$, равенство (А) справедливо, по крайней мере, в еще одной - η_1 ($\eta_1 \in [0; 1]$). Это следует из неотрицательности величин, входящих в (А) и теорем Вейерштрасса об определенных интегралах.

4. ***Вспомогательные функции f и $\tilde{f}$***. Нахождение резольвенты конечного слоя из (20) или (20а) предполагает знание функции $B(\tau, \eta; \tau_0)$, а значит, согласно (22), прежде всего функций f и $\tilde{f}$. Они были определены в [20], как:

$$f(\tau, \eta; \tau_0) = e^{-\tau/\eta} + \int_0^{\tau} e^{-(\tau - t)/\eta} \Phi(t, \tau_0) dt, \quad \tilde{f}(\tau, \eta; \tau_0) = \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-(t-\tau)/\eta} \Phi(t, \tau_0) dt, \tag{28}$$

причем:

$$f(0, \eta; \tau_0) = 1, \quad f(\tau_0, \eta; \tau_0) = \psi(\eta, \tau_0), \tag{29}$$

$$\tilde{f}(0, \eta; \tau_0) = \varphi(\eta, \tau_0) - 1, \quad \tilde{f}(\tau_0, \eta; \tau_0) = 0. \tag{30}$$

Ниже будут приведены их явные выражения посредством функций $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$, а пока остановимся на некоторых их аналитических свойствах. Так, полагая в соотношениях (28) $\eta \to \infty$ и складывая их, получим равенство:

$$f(\tau, \infty; \tau_0) + \tilde{f}(\tau, \infty; \tau_0) = \varphi(\infty, \tau_0), \tag{31}$$

замечательное тем, что правая часть не зависит от оптической глубины. Расширяя область изменения угловой переменной на отрицательные значения, легко видеть, что для них имеют место соотношения:

$$f(\tau, -\eta; \tau_0) + \tilde{f}(\tau, \eta; \tau_0) = e^{\tau/\eta} \varphi(\eta, \tau_0), \tag{32}$$

$$f(\tau, \eta; \tau_0) + \tilde{f}(\tau, -\eta; \tau_0) = e^{(\tau_0 - \tau)/\eta} \psi(\eta, \tau_0). \tag{33}$$

Кстати, для вероятности выхода кванта из конечного слоя, подобное соотношение (см., например, [21], с.132) в отличие от (32), не имеющее аналога для полубесконечной среды, имеет вид:

$$p(\tau, \eta; \tau_0) = e^{-\tau_0/\eta} p(\tau_0 - \tau, -\eta; \tau_0).$$

Вероятностный смысл вспомогательных функций $F(\tau, \eta)$ и $\tilde{F}(\tau, \eta)$ для полубесконечной среды приводится в [16], величины же f и $\tilde{f}$ имеют аналогичный вероятностный смысл, но уже для слоя конечной оптической толщины. Они описывают также, соответственно, нисходящую и восходящую интенсивности диффузного излучения на глубине τ слоя толщины τ_0, содержащем на верхней ($\tau = 0$) границе плоский изотропно излучающий первичный источник энергии. Примечательно, что восходящие и нисходящие интенсивности излучения на глубине τ в конечном слое τ_0, освещенном параллельными лучами, зависящие от двух угловых переменных выражаются посредством простых алгебраических соотношений в явном виде через функции f и $\tilde{f}$, зависящие лишь от одного углового аргумента (см. [20]).

Явные выражения для функции f и $\tilde{f}$ можно получить подстановкой (24) в (28) с последующим аналитическим интегрированием по оптической глубине:

$$f(\tau,\eta;\tau_0) = e^{-\tau/\eta} + C\left[a\left(\frac{1}{k},\tau\right)A\left(\tau,\eta,\frac{1}{k}\right) - e^{-k(\tau_0-\tau)}b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)A\left(\tau,-\eta,\frac{1}{k}\right)e^{-\tau/\eta}\right] +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\zeta,\tau_0)A(\tau,\eta,\zeta) - e^{-(\tau_0-\tau)/\zeta}b(\zeta,\tau_0)A(\tau,-\eta,\zeta)e^{-\tau/\eta}}{\zeta R(\zeta)}d\zeta, \tag{34}$$

$$\tilde{f}(\tau_0-\tau,\eta;\tau_0) = C\left[e^{-k(\tau_0-\tau)}a\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)A\left(\tau,-\eta,\frac{1}{k}\right)e^{-\tau/\eta} - b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)A\left(\tau,\eta,\frac{1}{k}\right)\right] +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-(\tau_0-\tau)/\zeta}a(\zeta,\tau_0)A(\tau,-\eta,\zeta)e^{-\tau/\eta} - b(\zeta,\tau_0)A(\tau,\eta,\zeta)}{\zeta R(\zeta)}d\zeta, \tag{35}$$

где A - элементарная функция, не зависящая от оптической толщины слоя и равна:

$$A(\tau,\eta,\mu) = \eta\mu\frac{e^{-\tau/\mu} - e^{-\tau/\eta}}{\mu-\eta}. \tag{36}$$

5. *Единая форма решений стандартных задач.* Выше мы видели, что решения многих стандартных задач теории переноса удается представить в конечном виде посредством некоторых функций, нахождение которых на практике не представляет особых затруднений. Более того, эти явные интегральные выражения часто позволяют обнаружить скрытые аналитические свойства исследуемых величин. Действительно, для многих из них имеет место единое интегральное представление вида:

$$X(x) = g_X + CM_X\left(x;\frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{M_X(x;\mu)}{\mu R(\mu)}d\mu, \tag{37}$$

в котором X - решение рассматриваемой задачи, $x = \{\tau, \tau^*, \eta, \zeta \ldots\}$ - набор аргументов, а g_X и M_X - некоторые известные функции, характерные для данной задачи. Приведем вначале g_X и M_X для основных величин, описывающих поле излучения в полубесконечной среде:

$$\text{для } \varphi(\eta): \qquad g_\varphi = 1, \qquad M_\varphi(\eta;\mu) = \frac{\eta\mu}{\mu+\eta} a(\mu), \tag{38}$$

$$\text{для } \Phi(\tau): \qquad g_\Phi = 0, \qquad M_\Phi(\tau;\mu) = e^{-\tau/\mu} a(\mu), \tag{39}$$

$$\text{для } F(\tau,\eta): \qquad g_F = e^{-\tau/\mu}, \qquad M_F(\tau,\eta;\mu) = A(\tau,\eta,\mu) a(\mu), \tag{40}$$

$$\text{для } \widetilde{F}(\tau,\eta): \qquad g_{\widetilde{F}} = 0, \qquad M_{\widetilde{F}}(\tau,\eta;\mu) = \frac{\eta\mu}{\mu+\eta} e^{-\tau/\mu} a(\mu). \tag{41}$$

Они следуют, соответственно, из формул (4), (3), (34) и (35), причем в последних двух надо предварительно положить $\tau_0 \to \infty$.

Исходная величина $a(\mu)$ конструируется также как в случае конечного слоя, поэтому полагая в (23) $\tau_0 \to \infty$, получнм:

$$a(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu+\eta} d\mu .$$

Сравнивая с (1) видим, что она равна обратной величине функции Амбарцумяна:

$$a(\eta) = 1/\varphi(\eta),$$

вследствие чего формула (38) носит скорее символический характер и приводится лишь для полноты. Функции $\Phi(\tau)$, $F(\tau,\eta)$ и $\widetilde{F}(\tau,\eta)$ удобно называть функциями первого уровня, имея в виду, что их нахождение сводится к одной квадратуре с участием исходной функции $a(\mu)$. С их помощью легко находить также решения относительно более сложных задач (см. [15]), таких как, определение восходящей (Z) и нисходящей (Y) интенсивностей в полубесконечной среде, освещенной параллельными лучами или величину вероятности выхода кванта из среды - $P(\tau,\eta)$. Важно подчеркнуть, что при этом требуется совершить лишь простые алгебраические операции.

Функциями же второго уровня, в полубесконечной среде, будут: резольвента - $\Gamma(\tau,\tau^*)$, функция Грина $G(\tau,\tau^*,\eta,\zeta)$ - и соответствующая ей функция источника - $P(\tau,\tau^*,\eta)$, т.е., интеграл от функции Грина по ζ на интервале [-1;1] (см. [16]). Очевидно, что поля излучения при произвольных первичных источниках энергии находятся через эти величины непосредственно. Для функции источника и резольвенты можно получить явные интегральные представления типа (37). Например:

$$\text{для } \Gamma(\tau,\tau^*): \qquad g_\Gamma = 0, \qquad M_\Gamma(\tau,\tau^*;\mu) = e^{-|\tau-\tau^*|/\mu} - e^{-\tau/\mu} a(\mu) \widetilde{F}(\tau^*,\mu), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \text{для } P(\tau,\tau^*,-\eta): \quad g_P = 0, \quad M_P(\tau,\tau^*,-\eta;\mu) &= e^{-\tau^*/\mu} A(\tau,\eta,-\mu) - \\ &- a(\mu) A(\tau,\eta,\mu) \widetilde{F}(\tau^*,\mu), \quad (\tau^* > \tau,\ \eta > 0). \end{aligned} \tag{43}$$

Последнее соотношение, вообще говоря, следует из формулы (18) работы [1] при $\tau_0 \to \infty$, а вероятностный смысл функции $P(\tau,\tau^*,\eta)$ и родственных ей, дискутируется в [16]. Как видно из приведенных выше формул, во всех величинах первого уровня присутствует лишь исходная функция $a(\mu)$ (не считая известных элементарных функций). В выражениях же для величин второго уровня кроме нее фигурирует уже одна из функций первого уровня. Это означает, что нахождение величин второго уровня требует взятия второй (и последней) квадратуры.

Задачи переноса излучения в конечном слое намного сложнее аналогичных задач полупространства. Тем не менее, их явные решения также удается представить в форме (37). Сложность здесь заключается в наличии уже двух исходных функций - $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$, из которых, как это следует из их определения (23), - вторая в пределе при $\tau\to\infty$ стремится к нулю, а первая, естественно, совпадает с аналогичной функцией $a(\eta)=1/\varphi(\eta)$ для полубесконечной среды. Следует отметить, что знание исходных функций $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$ при нахождении функций Амбарцумяна $\varphi(\eta,\tau_0)$ и $\psi(\eta,\tau_0)$ конечного слоя (в отличие от функции $\varphi(\eta)$ для полубесконечной среды), подразумевает дополнительное интегрирование, т.е., последние принадлежат к функциям первого уровня.

Приведем теперь некоторые выражения для M, соответствующие функциям первого уровня для конечного слоя. Они следуют из формул (35), (34) при $\tau_0=\tau$, с учетом (29), (30), а также (24), (34) и (35) настоящей работы:

$$\text{для } \varphi(\eta,\tau):\quad g_\varphi=1,\ M_\varphi(\tau,\eta;\mu)=a(\mu,\tau)A(\tau,-\eta,\mu)e^{-\tau/\eta}-b(\mu,\tau)A(\tau,\eta,\mu), \tag{44}$$

$$\text{для } \psi(\eta,\tau):\quad g_\psi=e^{-\tau/\eta},\ M_\psi(\tau,\eta;\mu)=a(\mu,\tau)A(\tau,\eta,\mu)-b(\mu,\tau)A(\tau,-\eta,\mu)e^{-\tau/\eta}, \tag{45}$$

$$\text{для } \Phi(\tau,\tau_0):\ g_\Phi=0,\ M_\Phi(\tau,\tau_0;\mu)=a(\mu,\tau_0)e^{-\tau/\mu}-b(\mu,\tau_0)e^{-(\tau_0-\tau)/\mu}, \tag{46}$$

$$\text{для } f(\tau,\eta,\tau_0):\quad g_f=e^{-\tau/\eta},\quad \begin{aligned}M_f(\tau,\eta,\tau_0;\mu)&=a(\mu,\tau_0)A(\tau,\eta,\mu)-\\&-e^{-(\tau_0-\tau)/\mu}b(\mu,\tau_0)A(\tau,-\eta,\mu)e^{-\tau/\eta},\end{aligned} \tag{47}$$

$$\text{для } \tilde{f}(\tau_0-\tau,\eta,\tau_0):\ g_{\tilde{f}}=0,\ \begin{aligned}M_{\tilde{f}}(\tau,\eta,\tau_0;\mu)&=e^{-(\tau_0-\tau)/\mu}a(\mu,\tau_0)A(\tau,-\eta,\mu)e^{-\tau/\eta}-\\&-b(\mu,\tau_0)A(\tau,\eta,\mu).\end{aligned} \tag{48}$$

Выражения для функций второго уровня легко получить: из (20) и (20а) - для резольвенты $\Gamma(\tau,\tau^*;\tau_0)$, а для величин $p(\tau,\tau^*,\eta;\tau_0)$ - из формул (18) и (19) работы [1]. Алгебраическое выражение для функции Грина конечного слоя можно найти в работе Пикичяна [22].

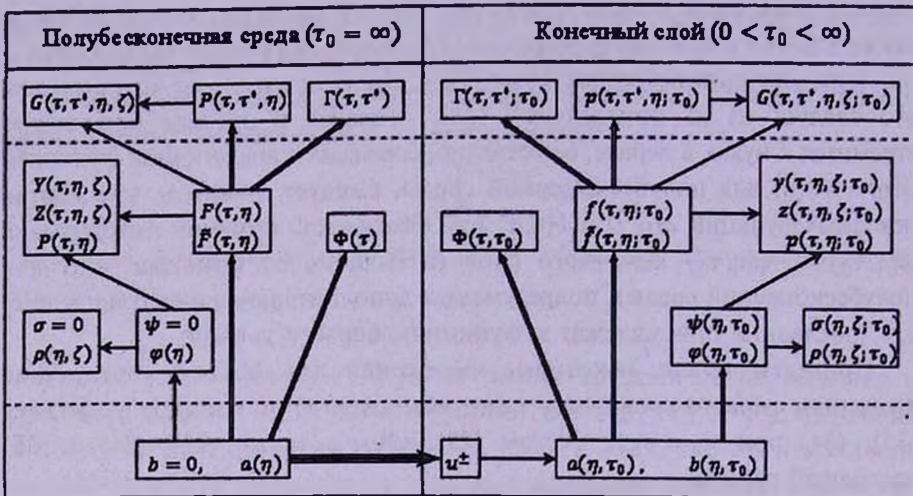
И в заключение приведём блок-схему решения стандартных задач (от функций Амбарцумяна до функции Грина) теории переноса в полубесконечной среде и в конечном слое. В ней наглядно видно, какую величину с помощью какой величины и с затратой каких усилий можно находить. Так, простые стрелки подразумевают лишь алгебраические операции, двойные -

простое интегрирование по угловой переменной, а тройные - решение интегрального уравнения базисных функций (см. [3,4]):

$$u^{\pm}(\eta,\tau)=1\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{g(\mu,\tau)}{\mu+\eta}u^{\pm}(\mu,\tau)d\mu, \tag{49}$$

где

$$g(\mu,\tau)=e^{-\tau/\mu}/R(\mu)\varphi^2(\mu). \tag{50}$$



В нижней части приведенной схемы расположены исходные функции, выше - между горизонтальными пунктирными линиями - величины первого уровня и над ними - функции второго уровня.

Из приведенной схемы бросается в глаза центральная роль вспомогательных функций F, $\tilde{F}$ и f, $\tilde{f}$ и очередной раз убеждаемся в фундаментальном характере функции Амбарцумяна - $\varphi(\eta)$ полубесконечной среды, которая неявным образом входит также во все решения задач слоя конечной оптической толщины. Ее можно отнести, как к функциям первого уровня, так и к исходным величинам. Поэтому, по нашей схеме, именно с нее (или ее модификаций) надо начинать процесс решения практически любой задачи теории переноса. Отсюда же можно заключить, что для задач в конечном слое функциям $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$ отводится та же роль, что и величине $1/\varphi(\eta)$ в задачах для полупространства.

6. *Заключение*. Выше мы видели, что отыскание характеристик поля диффузного излучения сводится, прежде всего, к нахождению исходных функций. Далее следуют одно или два интегрирования (по угловой переменной) и алгебраические операции.

В случае полубесконечной среды, исходной является функция $a(\eta)$, т.е., по существу, функция Амбарцумяна - $\varphi(\eta)$, для которой, как уже упоминалось, были найдены явные интегральные представления Фоком [23] и позже Малликиным (см., например, [17]). Это означает, что точные решения задач переноса излучения в полубесконечной среде удается полностью получить аналитически в конечном виде.

Для задач переноса излучения в конечном слое, к сожалению, этого достичь не удается. Здесь, хотя и решения всех стандартных задач аналитически представляются в явной форме (37) или в виде некоторой алгебраической комбинации подобно представимых величин, однако, для исходных величин $u^{\pm}$, уже отсутствуют явные аналитические выражения в конечном виде. Исходные величины здесь уже можно найти лишь численно - решая интегральное уравнение (49). В ядро этого уравнения входит функция Амбарцумяна - $\varphi(\eta)$, вычисление которой хоть и не проблематично, однако выбор эффективного способа не так очевиден. В наших исследованиях мы неоднократно затрагивали этот аспект и пришли к следующему выводу. Явные выражения для нее чрезвычайно важны с аналитической точки зрения, но с вычислительной точки зрения мало практичны, ввиду наличия сложных интегралов, требующих подчас специальных методов численного интегрирования. Нелинейное интегральное уравнение, полученное Амбарцумяном, с вычислительной точки зрения эффективно лишь для λ не близких к единице, а сингулярное уравнение наименее пригодно для вычислений. Уравнение (4), несмотря на быструю сходимость, обладает недостатком предварительного определения величины $\varphi(1/k)$. В "приложении" работы [4] приводится еще одно уравнение:

$$h(\eta)\varphi(\eta)=1-\frac{C\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\eta)}h\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{h(\mu)d\mu}{(\mu+\eta)R(\mu)\varphi(\mu)}, \tag{51}$$

обладающее тем же недостатком, от которого, однако, удается освободиться, исключив с помощью (4) величину $\varphi(1/k)$. В результате, получается:

$$\left[h\left(\frac{1}{k}\right)+h(\eta)\right]\varphi(\eta)=1+h\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\left[h(\mu)-h\left(\frac{1}{k}\right)\right]d\mu}{(\mu+\eta)R(\mu)\varphi(\mu)}. \tag{52}$$

В последних формулах - $h(\eta)=1-\lambda\eta\ln\left(1+\frac{1}{\eta}\right)$.

Уравнения (4), (51) и (52) очень интересны как с аналитической, так и с вычислительной точек зрения. Разумеется, есть и другие оригинальные способы, более или менее пригодные, для численного нахождения функции $\varphi(\eta)$ (см., например, [4]). Здесь мы остановимся лишь на одном из них. В книге Кейза и Цвайфеля [24] приводится интегральное уравнение из которого, после небольших преобразований, можно получить:

$$\varphi(\eta)=\frac{\varphi^0(\eta)}{1-\frac{\lambda}{2}\frac{\eta}{(1+k\eta)}\int_0^1\frac{\left(1-\frac{k\mu}{\sqrt{1-\lambda}}\right)}{(\mu+\eta)}\varphi(\mu)d\mu}, \qquad (53)$$

где $\varphi^0(\eta)=\left(1+k\eta/\sqrt{1-\lambda}\right)/(1+k\eta)$ является уже довольно хорошим приближением к φ - функции.

Расчеты, проведенные нами, показали, что наилучшие результаты получаются (для всех значений λ) при использовании уравнения (53), особенно если требуется высокая точность. Надеемся, что применение изложенной выше общей методики исследования задач переноса приведет в дальнейшем к еще большим упрощениям при рассмотрении конкретных ситуаций, а также получению новых относительно компактных асимптотических формул высокой точности.

Blasewitzer Ring 50-13593, Berlin,
e-mail: edanieljan@yahoo.de

ON THE UNIFIED STRUCTURE OF THE ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS IN THE PLANE-PARALLEL HOMOGENEOUS MEDIUM

E.Kh.DANIELIAN

In the proposed work the basic concepts are presented, which make it possible to develop the system of the analytical solution of the standard problems of the radiative transfer theory. These solutions are found with the application of Ambartsumyan's method of "addition of layers" in Sobolyev's probabilistic approach of the transfer processes. These solutions are compact in form and easy to calculate. New formulas for the resolvents and resolvent functions are obtained, and also the unified expression of integral form for the solution of different problems of the transfer theory for the semi-infinite medium and for layer of the finite thickness. A block-diagram of sequence of the stages of solution of standard problems is introduced. It is emphasized, that by the solution of problems for the semi-infinite medium, a fundamental role plays Ambartsumyan's function - $\varphi(\eta)$ (more precisely, $1/\varphi(\eta)$), and for the finite thickness an analogous role is assigned to functions $a(\eta,\tau_0)$ and $b(\eta,\tau_0)$.

Key words: *radiative transfer theory:analytical solutions*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э.Х.Даниелян*, Астрофизика, **19**, 335, 1983.
2. *Э.Х.Даниелян*, Астрофизика, **19**, 711, 1983.
3. *Э.Х.Даниелян*, Астрофизика, **36**, 225, 1993.
4. *Э.Х.Даниелян*, Астрофизика, **37**, 129, 1994.
5. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Ереван, 1960.
6. *И.Н.Минин*, Докл. АН СССР, **120**, 63, 1958.
7. *Р.Р.Андреасян*, *Э.Х.Даниелян*, Сообщ. БАО, **50**, 114, 1978.
8. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **41**, 44, 1964.
9. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
10. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, М., Наука, 1972.
11. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **55**, 1072, 1978.
12. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН Арм ССР, № 1-2, 1944.
13. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., **28**, 5, 355, 1951.
14. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
15. *Э.Х.Даниелян*, *М.А.Мнацаканян*, Сообщ. БАО, **46**, 101, 1975.
16. *Э.Х.Даниелян*, *О.В.Пикичян*, Астрофизика, **13**, 275, 1977.
17. *T.W.Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference on Electromagnetic Scattering, Univ. Massachusetts, 1965, p.697.
18. *J.L.Carlstedt*, *T.W.Mullikin*, Astroph. J., Suppl. Ser., **12**, 113, 1966.
19. *Н.Н.Роговцов*, *А.М.Самсон*, Ж. прикладн. спектроскоп., **25**, 512, 1976.
20. *Э.Х.Даниелян*, Астрофизика, **12**, 579, 1976.
21. *Д.И.Нагирнер*, Лекции по теории переноса излучения, С-Пб. Унив., 2001.
22. *О.В.Пикичян*, Астрофизика, **14**, 169, 1978.
23. *В.А.Фок*, Матем. сб. **14** (56), №1-2, 3, 1944.
24. *К.М.Кейз*, *П.Ф.Цвайфель*, Линейная теория переноса, М., Мир, 1972.