

От Амбарцумяна до наших дней

ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ

А.Ф.ХОЛТЫГИН

Поступила 2 апреля 2008

Принята к печати 17 апреля 2008

Обзор вопросов диагностики разреженной плазмы газовых туманностей, начиная с пионерских работ В.А.Амбарцумяна. Излагаются как сами эти работы, так и методы диагностики, развивающие заложенные в них идеи. Описаны методы диагностики как однородной, так и неоднородной плазмы.

Ключевые слова: *планетарные туманности; межзвездная среда; диагностика плазмы*

1. *Введение.* Огромную роль в астрофизике всегда играли и продолжают играть исследования газовых туманностей. Одни из них видны на небе как протяженные светящиеся объекты вокруг или около ярких горячих звезд и называются диффузными туманностями, самым известным представителем которых является туманность Ориона. К настоящему времени хорошо известно, что диффузные туманности являются областями ионизованного газа вокруг молодых горячих звезд спектрального класса O и их часто называют областями ионизованного водорода (областями HII).

Туманности другого рода - планетарные - являются компактными светящимися областями вокруг слабых звезд - ядер планетарных туманностей. К настоящему времени число обнаруженных в Галактике планетарных туманностей приближается к двум тысячам. Много планетарных туманностей найдено и в других галактиках, как в спиральных (M31, M33 и др.), так и в неправильных и эллиптических.

Спектры газовых туманностей существенно отличаются от спектров звезд. Они состоят из слабого непрерывного спектра и большого числа интенсивных эмиссионных линий, среди которых в оптическом диапазоне доминируют линии водорода, ионизованного и нейтрального гелия. Однако самые яркие линии спектров туманностей с длинами волн $\lambda 5007\text{\AA}$ и $\lambda 4959\text{\AA}$ долго оставались неотожествленными, так как отсутствовали в

спектрах исследованных в земных лабораториях элементов. По этой причине их считали принадлежащими неизвестному элементу небулю (nebula - туманность). С этим связаны их обозначения N_1 и N_2 соответственно (линия небулия 1 и линия небулия 2).

Природа свечения туманностей в этих линиях была понята только после появления квантовой механики. В 1928г. американский астрофизик А.Боуэн показал, что линии N_1 и N_2 являются запрещенными линиями иона O^{+2} и принадлежат переходам с метастабильных уровней этого иона [1]. Им же показано, что яркий дублет $\lambda 3726 + 3729\text{Å}$ в спектрах туманностей связан с запрещенными переходами однократно ионизованного кислорода O^+ . Это открытие свидетельствовало как о низкой плотности вещества туманностей, так и о малой плотности излучения в них.

С именем С.Росселанда связано установление источника свечения туманностей, которым является переработка ультрафиолетового излучения горячих звезд, находящихся в туманностях. В конце 20-х годов прошлого века было предложено два основных механизма, формирующих излучение туманностей. Первый из них был разработан американским астрофизиком Д.Мензелом и голландским астрономом Х.Занстра. Этот механизм (рекомбинационный) начинается с ионизации атомов ультрафиолетовым излучением возбуждающей свечение туманности звезды (иногда нескольких звезд в случае диффузных туманностей). Последующая рекомбинация ионов и захват электрона на возбужденные уровни вызывает каскадные переходы на основной уровень атома через промежуточные возбужденные состояния. Низкие плотности газа в туманностях приводят к тому, что цепочка каскадных переходов практически не прерывается. Каскадные радиационные переходы вызывают свечение главным образом в линиях наиболее распространенных элементов - водорода и гелия. Это обстоятельство послужило основой для разработки Занстра [2] метода определения температур центральных звезд планетарных туманностей по интенсивностям излучения туманности в бальмеровских линиях водорода.

Второй механизм объясняет свечение туманностей в запрещенных линиях. Он был предложен А.Боуэном. Согласно этому механизму, возбуждение метастабильных уровней ионов кислорода, азота и других элементов происходит при их столкновениях с электронами. При высокой степени ионизации водорода и гелия в туманностях, обеспечиваемой УФ излучением возбуждающих свечение туманности звезд, в туманностях оказывается много электронов с энергиями больше 2-3эВ, способных возбуждать метастабильные уровни.

В настоящей работе рассматривается ситуация, сложившаяся в начале 30-х годов прошлого века, когда стали появляться работы В.А.Амбарцумяна по физике газовых туманностей, и кратко описывается, как развивалась та часть физики газовых туманностей, которая связана с использованием

предложенных Амбарцумяном методов анализа свечения плазмы туманностей в запрещенных линиях для определения физических условий в них. В силу ограниченности объема мы будем говорить только об исследованиях планетарных туманностей, хотя методы анализа спектров, разработанные им, применимы и применялись для значительно более широкого круга объектов.

Во втором разделе настоящего обзора кратко изложено содержание работ В.А.Амбарцумяна по исследованию туманностей. В разделе 3 изложены результаты его работы [3] в свете современного состояния исследований в данной области науки. Общие методы диагностики астрофизической плазмы описаны в разделе 4. В этом же разделе описаны результаты применения разработанных методов диагностики для определения физических характеристик планетарных туманностей, в том числе неоднородных.

2. Работы В.А.Амбарцумяна по исследованию газовых туманностей. Работы В.А.Амбарцумяна по исследованию спектров планетарных и диффузных туманностей (все они собраны в первом томе его *Научных трудов* [4]) относятся к 30-м годам прошлого века. Это было время становления теоретической астрофизики, и исследования газовых туманностей находились на ее переднем крае.

Первая работа В.А.Амбарцумяна в этой области [5] посвящена определению температур ядер планетарных туманностей. Им предложен оригинальный метод определения температуры, основанный на сравнении энергии $E_{H\beta}$, излучаемой туманностью в линии $H\beta$, и энергии $E_{\lambda 4686}$, излучаемой ею в линии $HeII$ $\lambda 4686$. При этом делается предположение, что все УФ кванты, излучаемые центральной звездой туманности и способные ионизовать атомы водорода и ионы гелия, поглощаются в туманности. Этот метод, получивший название *метода Амбарцумяна*, позволил получить реалистичные оценки температур центральных звезд, близкие к их современным значениям.

Характерным для В.А.Амбарцумяна было понимание близости механизмов формирования спектров туманностей и звезд с эмиссионными линиями в спектре. Методика Занстра была использована им для определения температур звезд типа Вольфа-Райе в работе [6]. В ней получены близкие к современным оценки температуры звезды HD 192163 ($T = 65000$ K).

В.А.Амбарцумян исследовал также перенос излучения в континууме и в резонансных линиях в туманностях при предположении о прямоугольном профиле коэффициента поглощения в линии. Был сделан вывод о решающей роли давления излучения в линии $\text{Ly}\alpha$ в расширении туманностей [7,8]. Данные работы вызвали большой интерес и стали началом детального обсуждения роли давления излучения в динамике газа в туманностях, так как получалось, что давление излучения в линии $\text{Ly}\alpha$ приводит к ускорению внешних частей туманности порядка 1 км/с за 10 лет и такому же замедлению

внутренних областей туманностей, что не подтверждалось наблюдениями.

Проблема была решена учеником В.А.Амбарцумяна В.В.Соболевым, который показал, что в ходе диффузии излучения фотоны из центра линии переходят в ее крылья, где коэффициент поглощения мал. Этот эффект приводит к уменьшению примерно на два порядка силы светового давления на границе туманности по сравнению с рассчитанным В.А.Амбарцумяном. В туманности, расширяющейся с градиентом скорости, сила светового давления в линии λ_0 будет меньше, чем для неподвижной туманности, вследствие доплеровского сдвига частоты фотонов в линии.

Прямым результатом дискуссии, вызванной работами В.А.Амбарцумяна, стало появление теории В.В.Соболева переноса излучения в средах с большими градиентами крупномасштабных движений [9], ставшей сегодня стандартным аппаратом при интерпретации спектров разреженных астрофизических объектов.

В другой работе В.А.Амбарцумяна [10] исследована ионизация газа в оболочках вокруг горячих звезд. Предложен метод определения лучевых концентраций массы светящегося газа туманности по энергии, излучаемой в бальмеровских линиях водорода [11].

Особенно важна уже упоминавшаяся выше работа В.А.Амбарцумяна по диагностике разреженного газа туманностей [3]. Он исследовал процесс заселения метастабильных уровней атомов. В итоге им была выведена формула, связывающая температуру газа туманностей с отношением интенсивностей наблюдаемых запрещенных линий в их спектрах. На основе этих исследований был предложен метод определения температуры туманностей по отношениям интенсивностей запрещенных линий в их спектрах.

С самого начала было ясно, что этот метод применим не только для туманностей, но и для широкого круга других объектов: оболочек новых и сверхновых звезд, диффузных туманностей, корон Солнца и звезд и многих других объектов.

Работы В.А.Амбарцумяна 30-х годов обобщены им в книге *Теоретическая астрофизика* [12], ставшей первым учебником на русском языке по данному предмету. Из этого учебника вырос классический курс теоретической астрофизики [13], ставший на многие годы основным учебником по этой дисциплине. Он был переведен на несколько языков. Многие идеи и методы В.А.Амбарцумяна вошли впоследствии в *Курс теоретической астрофизики* В.В.Соболева [14].

В последующие годы В.А.Амбарцумян стал заниматься другими областями астрофизики, однако идеи, заложенные в упомянутых выше работах, стали основой многих направлений исследований планетарных и диффузных туманностей [15].

Ограниченный объем настоящей статьи не позволяет проследить эволюцию

всех идей, высказанных в статьях В.А.Амбарцумяна 30-х годов, посвященных физике газовых туманностей. По этой причине мы сконцентрируемся на анализе работы [3] по физике свечения туманностей в запрещенных линиях, содержание которой изложено им также в монографии [12].

3. Атомы и ионы в метастабильных состояниях. Взгляд В.А.Амбарцумяна.

3.1. Накопление атомов в метастабильных состояниях.

Решающее значение в определении интенсивностей линий в спектрах туманностей имеет расчет населенностей возбужденных уровней атомов и ионов. В работе В.А.Амбарцумяна [12] рассмотрены задачи об определении

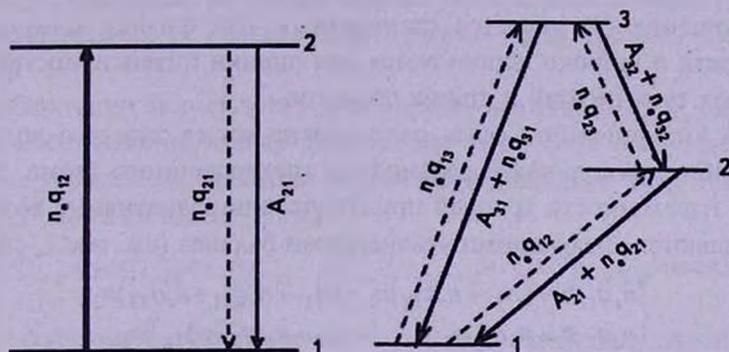


Рис.1. Схема образования линий в спектрах планетарных туманностей при их возбуждении электронами. Слева: двухуровневый атом. Тонкая сплошная линия - радиационные переходы $2 \rightarrow 1$, пунктир - деактивации уровня 2 электронным ударом, жирной сплошной линией показано возбуждение уровня 2 электронным ударом. Справа: трехуровневый атом. Сплошные линии показывают переходы с вышележащих на нижележащие уровни за счет спонтанных радиационных переходов и деактиваций электронным ударом, пунктир - возбуждение уровней столкновениями с электронами.

населенностей двухуровневого и трехуровневого атомов. Решение первой задачи (см. рис.1, слева) определяется уравнением стационарности

$$b_{12} n_1 - (A_{21} + a_{21}) n_2 = 0. \tag{1}$$

Здесь n_k - населенность уровня k , A_{21} - эйнштейновский коэффициент вероятности перехода $2 \rightarrow 1$, $n_1 b_{12}$ - число атомов, переходящих в метастабильное состояние 2 под действием столкновений в 1 см^3 за 1 с, $n_2 a_{21}$ - число ударных переходов вниз. Для удобства читателя будем использовать современные обозначения для числа возбуждений и деактиваций: $b_{12} = n_e q_{12}$ и $a_{21} = n_e q_{21}$, где q_{12} и q_{21} - скорости столкновительного возбуждения и деактивации для перехода $1 \rightarrow 2$, n_e - электронная концентрация плазмы.

Уравнение (1) определяет отношение населенностей уровней 1 и 2:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{n_e q_{21}}{A_{21} + n_e q_{21}} e^{-h\nu_{12}/kT}. \tag{2}$$

Здесь T - кинетическая температура плазмы, которая для туманностей равна электронной температуре T_e . В дальнейшем, следуя традиции, будем говорить именно об электронной температуре туманности. Важное заключение, сделанное еще до выполнения квантово-механических вычислений сечений и скоростей возбуждения атомов электронным ударом и аргументированное в [3], состоит в том, что при малой плотности газа в туманностях, когда $A_{21} \gg n_e q_{21}$, энергия, излучаемая в запрещенной линии $2 \rightarrow 1$ за 1 с единичным объемом разреженной плазмы с электронной концентрацией n_e , находящейся при температуре T_e , зависит только от числа возбуждений под влиянием столкновений с электронами:

$$E_{21} \approx n_e n_1 q_{12} h \nu_{12}. \quad (3)$$

Соотношение (3) является стандартным для физики плазмы низкой плотности и широко используется для оценки интенсивностей линий в спектрах туманностей и других объектов.

В.А. Амбарцумяном была рассмотрена также задача о возбуждении метастабильных уровней для модели трехуровневого атома. В данном случае населенности уровней при отсутствии радиативных возбуждений определяются следующими уравнениями баланса (см. рис. 1, справа):

$$\begin{cases} n_e q_{12} n_1 + (A_{32} + n_e q_{32}) n_3 = (A_{21} + n_e q_{21} + n_e q_{23}) n_2, \\ n_e q_{13} n_1 + n_e q_{23} n_2 = (A_{31} + A_{32} + n_e (q_{31} + q_{32})) n_3. \end{cases} \quad (4)$$

Решение уравнений (4) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e q_{12} (A_{31} + A_{32} + n_e q_{31} + n_e q_{32}) + n_e q_{13} (A_{32} + n_e q_{32})}{(A_{21} + n_e q_{21}) (A_{31} + A_{32} + n_e q_{31} + n_e q_{32}) + n_e q_{23} (A_{31} + n_e q_{31})}, \\ \frac{n_3}{n_1} = \frac{n_e q_{12} n_e q_{23} + n_e (A_{21} + n_e q_{21} + n_e q_{23})}{(A_{21} + n_e q_{21}) (A_{31} + A_{32} + n_e q_{31} + n_e q_{32}) + n_e q_{23} (A_{31} + n_e q_{31})}. \end{cases} \quad (5)$$

В условиях разреженной плазмы планетарных туманностей вкладом радиационного перехода $3 \rightarrow 1$ и столкновительных деактиваций в создание населенностей уровней 2 и 3 можно пренебречь. В итоге оказывается, что

$$\begin{cases} E_{21} \approx n_e (q_{12} + q_{13}) n_1 h \nu_{12}, \\ E_{32} \approx n_e q_{13} n_1 h \nu_{23}. \end{cases} \quad (6)$$

В дальнейшем вместо энергии E_{ki} , излучаемой туманностью в линии $k \rightarrow i$, будем, в соответствии со сложившейся традицией, использовать *интенсивность линии* I_k . Под I_k понимается исправленное за межзвездное поглощение отношение потока излучения в рассматриваемой линии к потоку излучения в линии Н β .

3.2. Определение электронной температуры по линиям небуля.

Из соотношений (6) следует, что отношение интенсивностей линий $2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 2$ равно

$$\frac{I_{21}}{I_{32}} = \frac{E_{21}}{E_{32}} = \frac{v_{12}}{v_{23}} \left(1 + \frac{q_{12}}{q_{13}} \right). \quad (7)$$

В случае обычно наиболее сильных в спектрах туманностей запрещенных линий двукратно ионизованного кислорода отношение $I_{21}/I_{32} = I(N_1 + N_2)/I([\text{OIII}]\lambda 4363)$ - это отношение суммарной интенсивности небулярных линий N_1 и N_2 к интенсивности авроральной линии $[\text{OIII}]\lambda 4363$.

Чтобы найти отношение интенсивностей (7), необходимо уметь вычислять величину q_{12}/q_{13} . В начале 30-х годов прошлого века, когда В.А.Амбарцумян получал соотношения (2)-(7), не были известны даже оценочные значения скоростей возбуждения атомов и ионов электронным ударом. Вычисление этих скоростей было очень непростой задачей. Первые реалистичные расчеты сечений возбуждения O^{2+} электронным ударом были сделаны только в 1940г. [16].

В.А.Амбарцумян использовал для оценки величины q_{12}/q_{13} хорошо известное соотношение между скоростями процессов возбуждения и деактивации уровней электронным ударом и предположил, что отношение $(g_2 q_{21})/(g_3 q_{31})$ равно единице. Тогда

$$\frac{q_{12}}{q_{13}} = \frac{g_2 q_{21}}{g_3 q_{31}} e^{h\nu_{23}/kT_e} \approx e^{h\nu_{23}/kT_e}, \quad \frac{I_{21}}{I_{32}} = \frac{v_{12}}{v_{23}} \left(1 + e^{h\nu_{23}/kT_e} \right) \approx 0.9 e^{33000/T_e}. \quad (8)$$

Следует подчеркнуть, что при температурах, характерных для туманностей, зависимость отношения I_{21}/I_{32} от T_e , определяемая экспоненциальным множителем $\exp(h\nu_{23}/kT_e)$, очень сильная. При $T_e = 7000$ К этот множитель равен 111, при $T_e = 10000$ К - 27, а при $T_e = 15000$ К - 9.

Итак, найдя отношение I_{21}/I_{32} из наблюдений, можно надежно оценить соответствующее значение электронной температуры T_e . Таким путем В.А.Амбарцумян получил для электронных температур туманностей $T_e \approx 7000$ К и сделал вывод о том, что температура электронного газа в туманностях значительно ниже температур их центральных звезд. Полученное значение T_e с современной точки зрения является несколько заниженным. Однако, учитывая, сколь скромны были сведения о физике столкновений атомов с электронами, имевшиеся в 1930-х годах, точность этой оценки кажется удивительной.

Причиной того, что метод Амбарцумяна в его первоначальной простейшей форме все же дает разумные оценки температуры, является сильная (экспоненциальная) зависимость от температуры числа электронов, способных возбуждать верхние уровни рассматриваемых атомных переходов.

Для иллюстрации на рис.2 представлена функция распределения электронов по скоростям для электронных температур 10000 и 15000 К. На рисунке отмечены пороги возбуждения уровней 1D и 1S иона O^{3+} . Они служат верхними уровнями для, соответственно, небулярных линий N_1 и N_2 и для авроральной линии $[\text{OIII}]\lambda 4363$. Из рисунка ясно видно, что

эффективность возбуждения уровней O^{3+} электронным ударом, которая определяется долей электронов с энергиями выше порога возбуждения, должна сильно зависеть от температуры.

Отношение интенсивностей авроральной линии [ОШ] $\lambda 4363$ и небулярных линий [ОШ] $\lambda 4959 + \lambda 5007$ определяется по сути дела отношением чисел электронов со скоростями $v \geq 1370$ км/с и $v \geq 940$ км/с, соответственно. Таким образом, отношение интенсивностей линий [ОШ] позволяет определить зависящее от температуры отношение концентраций в плазме электронов с разными энергиями и, тем самым, оценить ее электронную температуру.

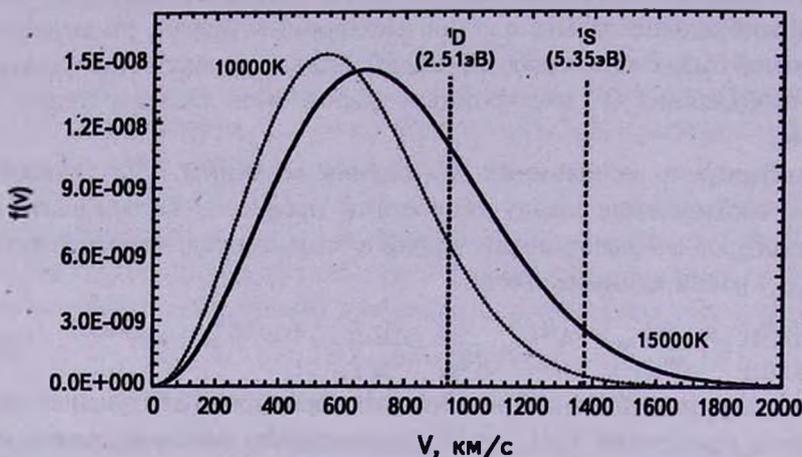


Рис.2. Функции распределения электронов по скоростям в равновесной плазме с температурами $T_e = 10000$ К (пунктир) и $T_e = 15000$ К (жирная сплошная линия). Вертикальными пунктирными линиями отмечены пороги возбуждения уровней $1D$ и $1S$ иона O^{3+} .

Простая идея о возможности использования относительных интенсивностей линий спектров газовых туманностей для определения физических условий в них явилась тем зернышком, из которого выросла методика диагностики разреженной астрофизической плазмы, которая интенсивно развивалась, начиная с 1940-х годов.

3.3. *Силы столкновений и уточнение отношения I_{21}/I_{32} .* Рассмотрим, насколько точна первоначальная формула В.А.Амбарцумяна для отношения интенсивностей небулярных и авроральной линии [ОШ], воспользовавшись современными данными о скоростях атомных процессов.

Вернемся к выражениям (5), определяющим населенности метастабильных уровней. В пределе малых значений электронной концентрации, $n_e \ll A_{21}/q_{12}$, отношение интенсивностей линий

$$\frac{I_{21}}{I_{32}} = \frac{v_{12}}{v_{23}} \left[1 + \frac{q_{12}}{q_{13}} \left(1 + \frac{A_{31}}{A_{32}} \right) \right]. \quad (9)$$

Чтобы сравнить это точное, в пределе малых значений n_e , выражение (9) с оценочной формулой (8), полученной при предположении, что $(g_2 q_{21}) / (g_3 q_{31}) = 1$ и $A_{31} = 0$, следует вычислить отношение q_{12} / q_{13} для характерных для планетарных туманностей температур $T_e = 10000 + 20000$ К.

Скорости возбуждения и деактивации электронным ударом q_j и $q_{j\downarrow}$ (при $j > i$) выражаются через соответствующие сечения реакций $\sigma_{ij}(v)$ и $\sigma_{j\downarrow}(v)$, зависящие от скорости сталкивающегося с атомом электрона v :

$$q_j = \int_{v_0}^{\infty} \sigma_{ij}(v) v f(v) dv, \quad q_{j\downarrow} = \int_0^{\infty} \sigma_{j\downarrow}(v) v f(v) dv, \quad (10)$$

где v_0 - минимальное (пороговое) значение скорости электронов, способных возбуждать переход $i \rightarrow j$, $f(v)$ - максвелловская функция распределения электронов по скоростям (см. рис.2). Современные квантовомеханические вычисления показывают, что сечения $\sigma_{ij}(v)$ и $\sigma_{j\downarrow}(v)$ очень сложно зависят от энергии. Однако усредненные по энергии сечения в случае метастабильных состояний характеризуются более простой зависимостью от v и приближенно обратно пропорциональны энергии электрона. Поэтому их обычно представляют в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(v) = \frac{\hbar^2}{4\pi m^2} \frac{\Omega_{ij}}{g_i v^2}, \quad (11)$$

где величина Ω_{ij} - зависящее от скорости электрона безразмерное эффективное сечение (обычно порядка единицы), часто называемое *силой столкновения*. Силы столкновения для возбуждения и деактивации равны, т.е. $\Omega_{ij} = \Omega_{j\downarrow}$, а сечение деактивации $\sigma_{j\downarrow}(v)$ дается формулой, аналогичной (11), с заменой g_i на g_j . Подставляя (11) в формулы (10), получим

$$q_j = \frac{A_0}{g_i T_e^{1/2}} \langle \Omega_{ij} \rangle e^{-h\nu_{ij}/kT_e}, \quad q_{j\downarrow} = \frac{A_0}{g_j T_e^{1/2}} \langle \Omega_{ij} \rangle. \quad (12)$$

Здесь размерная константа $A_0 = 8.6287 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1} \text{ К}^{1/2}$, $\langle \Omega_{ij} \rangle$ - усредненная по максвелловскому распределению скоростей электронов *сила столкновения*, обычно называемая *эффективной силой столкновения*. Для нее часто используется обозначение $\Upsilon_{ij} = \langle \Omega_{ij} \rangle$.

Используя данные каталога [17], вычислим при $T_e = 10^4$ К отношение

$$\left(\frac{g_2 q_{21}}{g_3 q_{31}} \right) = \frac{\Upsilon_{12}}{\Upsilon_{13}} \approx 7.9. \quad (13)$$

Зависимость данного отношения от температуры весьма слабая. При $T_e = 1.2 \cdot 10^4$ К оно равно 7.7, при $T_e = 1.5 \cdot 10^4$ К - 7.6. При использовании для вычисления отношения (13) сил столкновений, полученных М.Ситоном и приведенных в [14], оно оказывается равным 8.9.

Таким образом, мы видим, что отношение (13) существенно отличается от принятого Амбарцумяном. Тем не менее, вследствие экспоненциальной

зависимости отношения скоростей возбуждения q_{12}/q_{13} от параметра $h\nu_{23}/kT_e \approx 32970/T_e$, где T_e выражено в градусах Кельвина, ошибка в определении температуры не слишком велика.

Используя выражения (12) для скоростей столкновительных переходов и учитывая, что отношение $A_{31}/A_{32} = 0.15$ [17], вычислим величину $R = I_{21}/I_{32}$ для иона O^{2+} :

$$R = \frac{I(4959 \text{ \AA}) + I(5007 \text{ \AA})}{I(4363 \text{ \AA})} = 0.9 + 7.9 e^{32970/T_e}. \quad (14)$$

4. *Диагностика газа в туманностях.* Идеи, заложенные в работе В.А.Амбарцумяна по анализу процессов заселения метастабильных состояний атомов, оказались необычайно плодотворными для решения задач диагностики плазмы.

Состояние проблемы диагностики плазмы газовых туманностей, сложившееся к середине 40-х годов прошлого века, было изложено в сборнике *Физические процессы в газовых туманностях*, переведенном на русский язык [18]. Классическими работами по физике туманностей и диагностике плазмы туманностей в 1950–1960гг. стали книга [19] и обзор [20]. В 1980-х годах вышла монография [21], в которой достаточно подробно изложены методы диагностики плазмы применительно к планетарным туманностям, а в 2000г. опубликована книга [22], в которой дано доступное, даже для студентов младших курсов, изложение этих же вопросов. Наиболее же полное современное изложение методик диагностики астрофизической плазмы дано в монографии [23], второе издание которой вышло в 2006г. [24]. Интерес к теоретическому анализу процессов заселения уровней атомов столкновениями с электронами не угасает, примером чего служит только что появившаяся статья [25], посвященная этой теме.

4.1. *Элементарные методы диагностики.* Элементарные методы применяются при анализе свечения однородной или почти однородной плазмы. Под однородной плазмой мы понимаем плазму с постоянными по всему ее объему значениями температуры и плотности, характеризуемыми, соответственно, средней электронной температурой T_e и средней электронной концентрацией n_e . В этом случае набор параметров, описывающих состояние плазмы, включает в себя только относительные содержания ионов элементов, присутствующих в плазме, и параметры T_e и n_e . Методика нахождения параметров однородной плазмы, описывающих наблюдаемые спектры газовых туманностей и других объектов, изложена в книгах [21,23,24,26,27].

4.1.1. *Определение электронной температуры.* Для определения электронной температуры туманностей чаще всего используются линии [OII]. В пределе малых значений электронной концентрации, $n_e < 10^5 \text{ см}^{-3}$, отношение R интенсивностей линий $N_1 + N_2$ и 4363\AA описывается формулой (14).

Согласно [22], величина константы перед экспоненциальным множителем равна 7.6. Небольшое различие с приведенным выше значением K_0 связано с различием в используемых атомных константах. Постоянное слагаемое 0.9 в формуле (14) часто опускают.

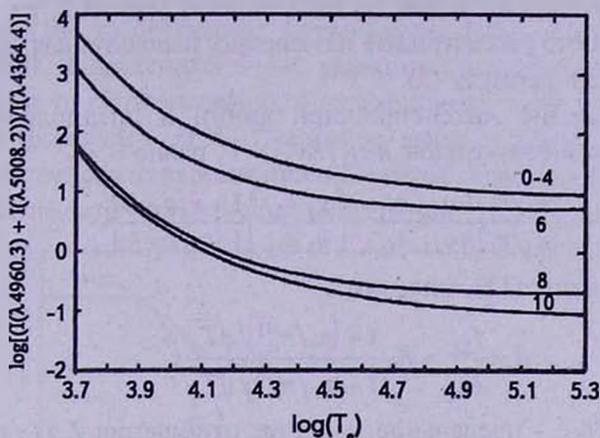


Рис.3. Отношения интенсивностей линий [OII] $(I(4959\text{Å}) + I(5007\text{Å}))/I(4363\text{Å})$ в зависимости от T_e при различных значениях n_e (по [28]). Логарифмы значений n_e указаны у соответствующих кривых.

Для бóльших значений n_e следует учитывать роль деактиваций (ударов второго рода). На рис.3 показана рассчитанная в работе [28] зависимость отношения R от T_e . Видно, что для типичных для планетарных туманностей значений $n_e \leq 10^5 \text{ см}^{-3}$ отношение R не чувствительно к n_e . Для более плотного газа следует принимать во внимание зависимость от n_e .

Для определения температуры можно использовать отношения интенсивностей линий и других элементов. В качестве индикаторов электронной температуры используются линии изоэлектронных с O^{2+} ионов C^0 , N^+ , F^{3+} , Ne^{4+} , а также ионов Ne^{2+} , Ne^{4+} , Mg^{4+} , Ne^{6+} и др. Определения электронной температуры по отношениям интенсивностей запрещенных линий выполнены для большого числа туманностей. Большие подборки таких определений можно найти, например, в работах [29-31].

4.1.2. *Определение электронной концентрации.* Для определения электронных концентраций в астрофизических объектах часто используется отношение интенсивностей в дублетах I_{21}/I_{31} с близко расположенными верхними уровнями и разностью энергий $h\nu_{23}/kT_e \ll 1$. К ним относятся такие линии как [NI] $\lambda 5202/5199$, [OII] $\lambda 3729/3726$, [SII] $\lambda 6731/6716$ и других ионов, соответствующие переходам с дублетных уровней $^2D_{5/2}$ и $^2D_{3/2}$ конфигураций np^3 с $n = 2 - 4$.

Этот метод определения электронной концентрации не рассматривался В.А.Амбарцумяном, однако соответствующие соотношения легко можно

получить из приведенных в его работах формул. В силу малости величины $h\nu_{23}$ вероятность перехода $A_{32} \ll A_{31}$, что означает, что атомы из возбужденного состояния 3 при малых $n_e \ll A_{21}/q_{21}$ переходят, преимущественно, на основной уровень 1. Из этого следует, что возбуждение уровня 3 практически не влияет на населенность уровня 2, т.е. заселение уровней 2 и 3 можно рассматривать независимо, используя для определения их населенностей формулу (2).

Тогда отношение интенсивностей линий в предположении, что отношение энергий переходов $h\nu_{12}/h\nu_{13} = 1$, равно

$$\frac{I_{21}}{I_{31}} = \frac{(n_2/n_1)h\nu_{12}A_{21}}{(n_3/n_1)h\nu_{13}A_{31}} = \frac{(g_2q_{21})}{(g_3q_{31})} \frac{1+n_eq_{31}/A_{31}}{1+n_eq_{21}/A_{21}}. \quad (15)$$

Используя формулы (12), получим

$$R = \frac{I_{21}}{I_{31}} \approx R_0 \frac{1 + (n_e/n_e^{(1)})/\sqrt{T_e}}{1 + (n_e/n_e^{(2)})/\sqrt{T_e}}. \quad (16)$$

Здесь $R_0 = Y_{12}/Y_{13}$ - предельное значение отношения I_{21}/I_{31} при малых значениях n_e . В приближении LS -связи отношение $Y_{12}/Y_{13} = g_2/g_3$. В случае, если уровень $J=5/2$ лежит ниже уровня $J=3/2$ (например, у ионов O^+ , N^{2+}), величина $R_0 = 6/4 = 1.5$. При ином расположении уровней (у иона S^+) $R_0 = 2/3$.

Концентрация $n_e^{(1)} = g_3A_{31}/(A_0Y_{13})$, а $n_e^{(2)} = g_2A_{21}/(A_0Y_{12})$. Учитывая слабую зависимость эффективных сил столкновений от T_e , концентрации $n_e^{(1)}$ и $n_e^{(2)}$ можно считать не чувствительными к электронной температуре.

Пусть $n_e^{min} = \min(n_e^{(1)}, n_e^{(2)})$, а $n_e^{max} = \max(n_e^{(1)}, n_e^{(2)})$. Тогда при $n_e \ll n_e^{min}$ отношение $R \approx R_0$, а при $n_e \gg n_e^{max}$ отношение $R \approx g_2A_{21}/g_3A_{31}$. Последнее очевидно, так как при высоких электронных концентрациях населенности уровней бальцмановские, а отношение $n_2/n_3 = (g_2/g_3)\exp(h\nu_{23}/kT_e) \approx g_2/g_3$. В интервале $n_e^{min} < n_e < n_e^{max}$ отношение R чувствительно к электронной концентрации и может использоваться для ее определения.

Подставляя в формулу (16) значения вероятностей переходов и сил столкновений для иона O^+ по [28] и выполняя простые преобразования, получим

$$\frac{I_{3729}}{I_{3727}} = 0.42 \frac{1+207\sqrt{T_e}/n_e}{1+22\sqrt{T_e}/n_e}. \quad (17)$$

При больших значениях n_e становятся важными переходы между уровнями 2 и 3 под действием электронных ударов. Учет этих переходов может быть выполнен при использовании точного для трехуровневого атома решения (5) уравнений баланса населенностей. Тогда

$$\frac{I_{3729}}{I_{3727}} = 0.42 \frac{1+57\sqrt{T_e}/n_e}{1+13\sqrt{T_e}/n_e}. \quad (18)$$

Тем самым мы видим, что учет столкновительных переходов между уровнями 2 и 3 не меняет ни вид зависимости отношения интенсивностей линий дублетов от T_e и n_e , ни его предельных значений при очень малых и очень больших значениях n_e . Однако коэффициенты перед отношением $\sqrt{T_e}/n_e$ в формуле (18) существенно изменяются. При использовании сил столкновений, приведенных в [14], указанные коэффициенты становятся равными 43 и 10 соответственно, а коэффициент перед дробью в правой части этой формулы - 0.35. Сказанное выше иллюстрирует рис.4, на котором представлено отношение интенсивностей линий запрещенного дублета [OII] в зависимости от n_e , рассчитанное в [28].

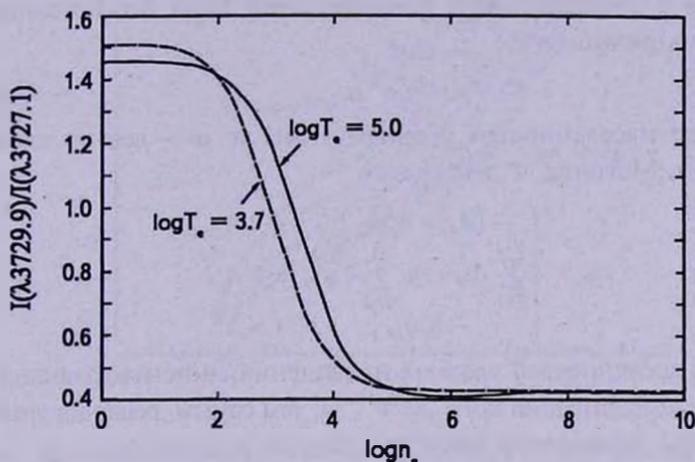


Рис.4. Отношение интенсивностей линий [OII] $I(3729\text{Å})/I(3726\text{Å})$ в зависимости от n_e при различных значениях T_e (по [28]).

При нахождении значений n_e для планетарных туманностей используются, главным образом, линии ионов O^+ и S^+ [29,30,32]. Наиболее полный каталог электронных концентраций в планетарных туманностях приведен в статье [33].

4.2. Совместная n_e - T_e диагностика. Модели двух- и трехуровневых атомов, с которых начиналось определение параметров плазмы газовых туманностей, являются слишком грубым описанием реальной картины возбуждения линий атомов и ионов столкновениями с электронами. Даже в хорошо изученном случае возбуждения небулярных линий двукратно ионизованного кислорода O^{2+} учет тонкого расщепления уровней нижнего терма 3P (который рассматривался В.А.Амбарцумяном и многими другими авторами как один уровень) и добавление в уравнения баланса населенностей метастабильного уровня $^5S^0$ конфигурации $2s2p^3$ приводит к необходимости рассматривать шестиуровневую модель атома. Для более полного описания спектров атомов и ионов, с включением переходов в жестком ультрафиолете

и рентгеновской области спектра, необходимо зачастую рассматривать модель атома, включающую десятки уровней. Так, в работе [34] рассматривается модель атома Fe^{5+} с 80 уровнями.

Переход к многоуровневым моделям атома требует решения систем большого числа уравнений стационарности. Кроме того, в населенности метастабильных уровней при их заселении помимо столкновений с электронами могут вносить вклад и другие процессы, в частности фото- и диэлектронные рекомбинации на высокие уровни и каскадные переходы с них.

Уравнения стационарности, определяющие населенности уровней n_k какого-либо атома или иона X^{m+} , при учете переходов вследствие столкновений с электронами и рекомбинаций иона можно записать в компактном матричном виде

$$\mathcal{T}n = n_e n^+ \alpha, \quad (19)$$

где n - вектор населенностей уровней атома и α - вектор скоростей рекомбинации. Матрица \mathcal{T} имеет вид

$$\mathcal{T}_{ik} = \begin{cases} -(A_{ki} + n_e q_{ki}), & i < k, \\ \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj} + n_e \sum_{j \neq k}^N q_{kj}, & i = k, \\ -n_e q_{ki}, & i > k. \end{cases} \quad (20)$$

Нахождение населенностей уровней из решения системы уравнений (19) требует знания концентрации иона $X^{(m+)+}$ и, тем самым, решения уравнений ионизационного равновесия для атома X .

Для резонансных линий и линий переходов с низковозбужденных уровней ионов астрофизически значимых элементов вкладом рекомбинаций в населенности уровней, возбуждаемых электронным ударом, можно пренебречь и положить правую часть системы уравнений (19) равной нулю. В этом случае уравнения (19) определяют только относительные населенности уровней $n_k/n(X^{m+})$. Для получения абсолютных значений населенностей необходимо задание величины $n(X^{m+})$ - полной концентрации иона X^{m+} , а система уравнений (19) должна быть дополнена уравнением

$$\sum_k n_k = n(X^{m+}). \quad (21)$$

Увеличение числа уровней, учитываемых в уравнениях стационарности, приводит к увеличению числа переходов, для которых могут быть рассчитаны отношения интенсивностей линий. В работе [35] рассчитаны отношения

$$R_1 = \frac{I(4363\text{\AA})}{I(4959\text{\AA}) + I(5007\text{\AA})}, \quad R_2 = \frac{I(1661\text{\AA}) + I(1667\text{\AA})}{I(4959\text{\AA}) + I(5007\text{\AA})}. \quad (22)$$

На рис.5 представлена область возможных значений отношений R_1 и R_2 для типичных для планетарных туманностей электронных температур и.

При получении интенсивностей линий нескольких ионов также можно одновременно определить значения n_e и T_e , что иллюстрируется на рис.6. По осям графика отложены значения n_e и T_e , а кривые на графике показывают, при каких значениях T_e и n_e отношение интенсивностей указанных на рисунке линий равно полученному по наблюдаемым интенсивностям линий в спектре планетарной туманности NGC7026. Если n_e и T_e одинаковы во

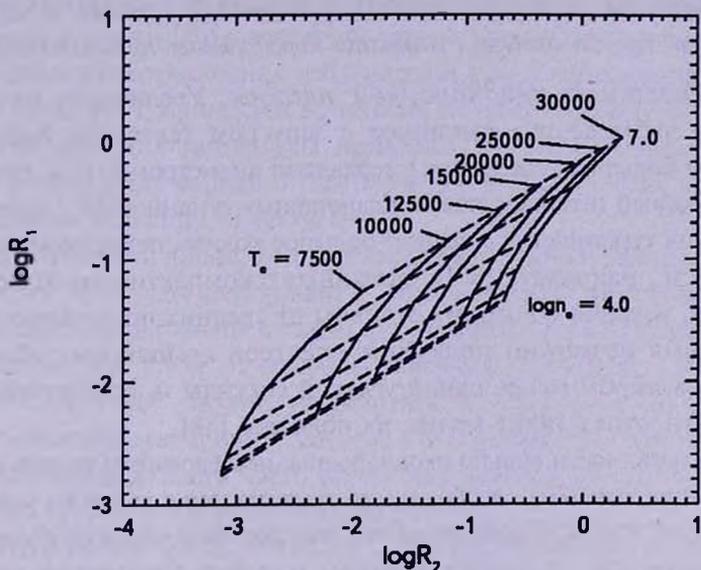


Рис.5. Отношения интенсивностей линий [OIII] R_1 и R_2 в зависимости от T_e и n_e . Значения $\log n_e$ возрастают снизу вверх от 4.0 до 7.0 с шагом 0.5.

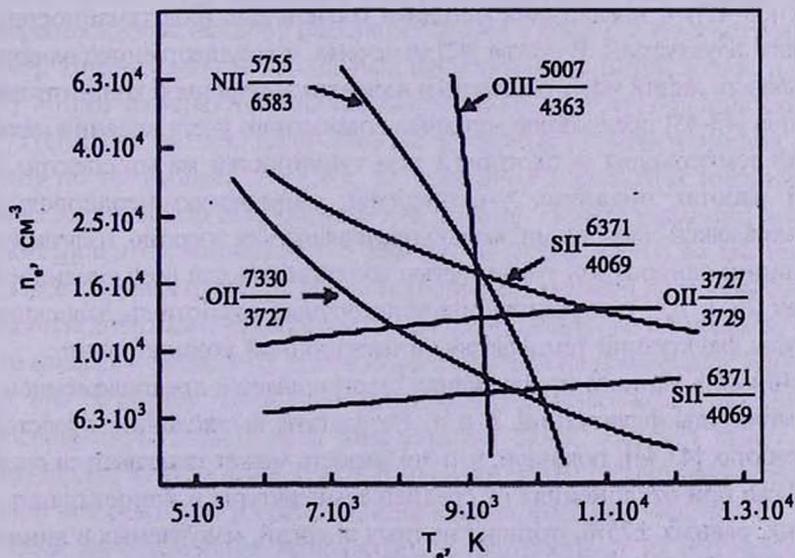


Рис.6. Совместное определение электронной концентрации n_e и электронной температуры T_e для туманности NGC7026 (по [21]).

всей излучающей плазме, то все кривые должны пересекаться в одной точке. Реально, в силу неоднородности туманностей, существует значительный разброс значений T_e и n_e , поэтому данный метод позволяет получить только оценочные значения параметров.

Комплекс методов определения параметров плазмы низкой плотности по интенсивностям запрещенных линий в их спектрах, начиная с 1950-х годов использовался также для анализа физических условий в коронах Солнца и звезд, где он получил название *коронального приближения* [36].

4.3. Диагностика неоднородной плазмы. Увеличение качества спектральных наблюдений, связанное с запуском телескопа Хаббла и вводом в строй больших телескопов с зеркалами диаметром 8-10 м, привело к открытию крайней неоднородности планетарных туманностей. Оказалось, что изображения туманностей содержат большое количество мелкомасштабных деталей (см., например, [37]), связанных с компактными областями в туманностях, условия в которых отличны от средних по туманности. В настоящее время возможно получение спектров компактных областей туманностей размером менее одной угловой секунды и, соответственно, детальная диагностика таких малых их областей [38].

О том, что туманности сильно неоднородны, исследователи предполагали еще до получения детальных изображений туманностей с высоким угловым разрешением. Еще в 50-60-х годах прошлого века для объяснения особенностей спектров туманностей, не согласующихся с моделью однородной плазмы постоянной температуры и плотности, было высказано предположение о существовании мелкомасштабных флуктуаций температуры в туманностях (см., например, [39-41]) и предложена методика расчета спектров туманностей с учетом таких флуктуаций. В статье [42] отмечено, что существенное влияние на интенсивности линий могут оказывать и вариации электронной концентрации.

В работах [43-45] предложена методика совместного учета влияния малых флуктуаций температуры и плотности газа туманностей на их спектры. В указанных работах показано, что энергию, излучаемую неоднородной туманностью в какой-либо линии, можно представить как энергию, излучаемую в данной линии однородной туманностью со средними для всей туманности значениями $\overline{T_e}$ и $\overline{n_e}$, умноженную на поправочный множитель, зависящий от амплитуды флуктуаций температуры и электронной концентрации.

Применимость данного приближения ограничивается предположением о малости амплитуды флуктуаций T_e и n_e . Результаты вычислений, представленных в работах [43,44], показали, что эта малость может трактоваться очень широко. Даже при отклонениях от средней температуры и концентрации в туманностях, равных $\pm 25\%$, отличия полных энергий, излучаемых в линиях видимой и УФ областей спектра, вычисленных при предположении о малости амплитуды флуктуаций электронной температуры и концентрации и при

точном интегрировании переменного коэффициента излучения по всему объему туманности, в большинстве случаев не превышают 3-5%.

Полная амплитуда вариаций температуры в туманности складывается из крупномасштабных, связанных с относительно медленным уменьшением средней температуры с возрастанием расстояния от центральной звезды (характерные размеры, сравнимые с размерами самой туманности), и мелкомасштабных, с размерами, значительно меньшими размера туманности. Согласно расчетам [46], амплитуды крупномасштабных вариаций малы. В то же время для согласования наблюдаемых и теоретических интенсивностей линий спектров туманностей во многих случаях необходимо использовать большие значения амплитуды вариаций T_e . Таким образом, основной вклад в амплитуду вариаций температуры в туманностях вносят мелко-масштабные вариации (флуктуации).

Интенсивности линий, возбуждаемых электронным ударом, очень сильно зависят от амплитуды флуктуаций T_e , интенсивности же рекомбинационных линий малочувствительны к таким флуктуациям. При наличии флуктуаций T_e с амплитудой $\pm 10\%$ от среднего значения температуры интенсивность линии CIII] $\lambda 1907$ может увеличиться в 1.5-2 раза по сравнению с интенсивностью этой линии в спектре с однородной по температуре плазмы, тогда как интенсивности чисто рекомбинационных линий H β и СП $\lambda 4267$ остаются практически неизменными [44].

Методика диагностики плазмы с флуктуациями как температуры, так и концентрации атомов проанализирована в работе [44]. Для нахождения оптимальных значений параметров используется принцип максимального правдоподобия [47]. При этом учитывается существенно разная точность измерения интенсивностей различных линий в спектрах газовых туманностей [48,49]. Интенсивности I_λ сильных (сравнимых по интенсивности с линией H β) линий измеряются значительно точнее, чем интенсивности слабых ($I_\lambda/I(\text{H}\beta) \leq 1$) линий. Если ошибка измерения интенсивностей сильных линий не превышает 5% [50], то ошибка в измерении интенсивностей слабых линий может достигать 30-50% и более. При определении небулярных параметров это обстоятельство обычно не принимается во внимание.

Предложенная в работах [43,44] методика диагностики неоднородной плазмы позволила добиться очень хорошего описания спектров туманностей. Разности наблюдаемых и модельных интенсивностей линий не превосходят 5-10%. Кроме того, она позволяет найти глобальные характеристики всей туманности, а не относящиеся к какому-либо конкретному иону, как это имеет место в элементарных методах диагностики. В недавней работе [51] описано использование данной методики при расчете ионизационных моделей туманностей.

Если же отклонения температуры и плотности от их средних значений нельзя полагать малыми, то необходимо рассматривать реальные распределения

дифференциальной меры эмиссии по объему плазмы. В этом случае набор параметров, описывающих состояние плазмы, необходимо дополнить параметрами, описывающими распределение дифференциальной меры эмиссии. Подобный подход к задаче диагностики неоднородной плазмы описан в работе [52].

4.4. Диагностика плазмы туманностей и проблема углерода.

Несмотря на долгие годы работы и достигнутое в итоге понимание основных процессов образования спектров туманностей, до сих пор остались нерешенные проблемы. К самым долгоживущим из них относится так называемая *проблема углерода*. Суть ее заключается в том, что при определении содержаний углерода по интенсивностям рекомбинационных линий (*рекомбинационные содержания*), для определения которых используется, главным образом, чисто рекомбинационная линия CII $\lambda 4267$, получаются величины, иногда на порядок и более превосходящие содержания, определяемые при использовании интенсивностей линий, возбуждаемых электронным ударом [49] (*столкновительные содержания*). При дальнейшем исследовании оказалось, что проблема углерода является в не меньшей степени также проблемой азота и кислорода, так как и для этих элементов сохраняется указанное выше соотношение между содержаниями, получаемыми по рекомбинационным и столкновительным линиям [53].

Начиная с [39], причину существенного различия рекомбинационных и столкновительных содержаний видели в существовании температурных флуктуаций. В работе [49] указано, что интенсивности слабых рекомбинационных линий могут быть переоценены. В пользу этого предположения свидетельствует выполненное в [48] моделирование процесса измерения интенсивностей слабых линий. Отметим, что с проблемой завышения измеряемых интенсивностей слабых линий исследователи планетарных туманностей сталкивались неоднократно [20].

В [43] предложено решение проблемы углерода как результата совокупного влияния двух эффектов. Первый из них - влияние флуктуаций электронной температуры, что приводит к увеличению интенсивностей столкновительных линий и, соответственно, к уменьшению определяемого по этим линиям содержания углерода по сравнению со случаем модели туманности без флуктуаций электронной температуры. Второй эффект - завышение интенсивностей слабых рекомбинационных линий, что приводит к завышению рекомбинационных содержаний.

Предполагалось, что повышение точности измерений интенсивностей рекомбинационных линий позволит окончательно решить проблему углерода. К сожалению, эти надежды не оправдались. Точность измерения интенсивностей линий увеличилась на 1-2 порядка, но расхождения между рекомбинационными и столкновительными содержаниями остались, что отмечено в [38]. В этой же работе в качестве решения проблемы предложено существование

в туманностях малых конденсаций (размером ≈ 1000 а.е.) с дефицитом водорода и с повышенным содержанием CNO и более тяжелых элементов. Такие конденсации считаются главным источником излучения в рекомбинационных линиях. Отметим, однако, что согласно оценкам [53] степень ионизации CNO элементов в таких конденсациях может оказаться слишком мала для формирования заметного излучения в рекомбинационных линиях.

5. *Заключение.* Наш краткий обзор показал, что идеи В.А.Амбарцумяна о возможности определения параметров разреженной плазмы по интенсивностям линий упали на благодатную почву. Методы диагностики разреженной плазмы, которые родились изначально из анализа спектров газовых туманностей, выросли в обширный раздел физики плазмы, в том числе астрофизической, и используются едва ли не в половине работ, посвященных анализу спектров широкого класса астрофизических объектов, от звезд и межзвездной среды до межгалактического газа.

Астрономический институт им. В.В.Соболева
 Санкт-Петербургского государственного университета,
 Россия, e-mail: afk@astro.spbu.ru

DIAGNOSTICS OF PLANETARY NEBULAE PLASMA

A.F.KHOLTYGIN

Starting with the pioneering Ambartsumian's papers, the problems of diagnostics of low density plasma of planetary nebulae are reviewed. We discuss both the early papers of Ambartsumian and the papers developing the methods of plasma diagnostics based on Ambartsumian's ideas. The diagnostics methods for both homogeneous and inhomogeneous nebular plasma are described.

Key words: *planetary nebulae:interstellar medium:plasma diagnostics*

ЛИТЕРАТУРА

1. I.S.Bowen, *Astrophys. J.*, 67, 1, 1928.
2. H.Zanstra, *Publ. Dom. Astroph. Obs.*, 4, 209, 1931.
3. V.Ambarzumian, *Цирк. Пулк. обс.*, №6, 10, 1933.

4. В.А.Амбарцумян, Научные труды, том 1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
5. *V.Ambarzumian*, Цирк. Пулк. Обс., №4, 1932.
6. *V.Ambarzumian*, Nature, 129, 725, 1932.
7. *V.Ambarzumian*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 93, 50, 1932.
8. В.А.Амбарцумян, Уч. Зап. ЛГУ, №31, 5, 1939.
9. В.В.Соболев, Движущиеся оболочки звезд, Изд. ЛГУ, Л., 1947.
10. *V.Ambarzumian*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 95, 469, 1935.
11. *V.Ambarzumian*, Zeit. für Astroph., 6, 107, 1933.
12. В.А.Амбарцумян, Теоретическая астрофизика, ГОНТИ, Л.-М., 1939.
13. В.А.Амбарцумян, Э.Р.Мустель, А.Б.Северный, В.В.Соболев, Теоретическая астрофизика, Гостехиздат, М., 1952.
14. В.В.Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1985.
15. История Астрономии в России и СССР, под ред. В.В.Соболева, Янус-К, М., 1999.
16. *M.Hebb, D.Menzel*, Astrophys. J., 92, 408, 1940.
17. В.В.Головатый, А.А.Сапар, Т.Х.Феклистова, А.Ф.Холтыгин, Атомные данные для спектроскопии разреженной астрофизической плазмы. Газовые туманности, Валгус, Таллинн, 1991.
18. Д.Мензел, Д.Бэкер, Л.Аллер, Д.Шортли, М.Хэбб, Л.Гольдберг, Физические процессы в газовых туманностях, Изд. Иностран. Лит., М., 1948.
19. *L.H.Aller*, Gaseous Nebulae, Chapman & Hall, London, 1956.
20. *L.H.Aller, У.Лиллер*, Планетарные туманности, Мир, М., 1972.
21. *С.Потташ*, Планетарные туманности, Мир, М., 1987.
22. *S.Kwock*, The Origin and Evolution of Planetary Nebulae, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
23. *D.E.Osterbrock*, Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei, Univ. Sci.Books, Univ. Minnesota, 1989.
24. *D.E.Osterbrock, G.J.Ferland*, Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei, 2nd. ed., University Science Books, Sausalito, CA, 2006.
25. *M.Taylor, J.M.Vilchez*, arXiv:0709.3473v3, 2008.
26. З.Б.Рудзикас, А.А.Никитин, А.Ф.Холтыгин, Теоретическая атомная спектроскопия. Изд. ЛГУ, Л., 1990.
27. К.В.Бычков, А.Ф.Холтыгин, Элементарные процессы в астрофизической плазме, М., 2007.
28. *M.Kafatos, J.P.Lynch*, Astrophys. J. Suppl. Ser., 42, 611, 1980.
29. *M.J.Seaton*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 114, 154, 1954.
30. *J.B.Kaler*, Astrophys. J., 160, 887, 1970.
31. *J.B.Kaler*, Astrophys. J., 308, 322, 1970.
32. *M.J.Seaton, D.E.Osterbrock*, Astrophys. J., 125, 665, 1956.
33. *L.Stangellini, J.B.Kaler*, Astrophys. J., 343, 811, 1989.
34. *G.X.Chen, A.K.Pradhan*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 147, 111, 2000.
35. *F.L.Crawford, F.P.Keenan, K.M.Aggarwal et al.*, Astron. Astrophys., 362, 730, 2000.
36. *P.L.Dufton*, Comp. Phys. Comm., 13, 25, 1977.

37. *L.Bianchi, H.Ford, R.Bohlin, F.Paresce, G. de Marchi*, *Astron. Astrophys.*, 301, 537, 1997.
38. *Y.G.Tsamis, J.R.Walsh, D.Pequignot et al.*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 355, 2008.
39. *M.Peimbert*, *Astrophys. J.*, 150, 825, 1967.
40. *M.Peimbert, R.Costero*, *Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya*, 5, 3, 1969.
41. *R.H.Rubin*, *Astrophys. J.*, 155, 841, 1969.
42. *R.H.Rubin*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 69, 897, 1989.
43. *A.F.Kholtygin*, *Astron. Astrophys.*, 329, 691, 1998.
44. *А.Ф.Холтыгин*, *Астрофизика*, 43, 627, 2000.
45. *A.F.Kholtygin, J.C.Brown, J.P.Cassinelli et al.*, *Astron. Astrophys. Trans.*, 22, 499, 2003.
46. *R.Gruenwald, S.M.Viegas*, *Astron. Astrophys.*, 303, 535, 1995.
47. *З.Брандт*, *Статистические методы анализа наблюдений*, Мир, М., 1975.
48. *C.Rola, D.Pelat*, *Astron. Astrophys.*, 287, 677, 1994.
49. *C.Rola, G.Stasinska*, *Astron. Astrophys.*, 282, 199, 1994.
50. *W.A.Feibelman, S.Hyung, L.H.Aller*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 278, 625, 1996.
51. *M.Taylor, J.M.Vilchez*, arXiv:0711.1474v1, 2008.
52. *P.G.Judge, V.Hubeny, J.C.Brown*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 475, 275, 1997.
53. *А.Ф.Холтыгин, Т.Х.Феклистова*, *Астрон. ж.*, 69, 960, 1992.