

УДК: 52-355:51

## ЗАКОН ПОДОБИЯ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА. IV.

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 5 октября 1996

Продолжение статей [1-3]. Найдено явное представление матрицы Фишера спектральной плотности, что позволило вычислить нижнюю границу дисперсии произвольной несмещенной оценки плотности. Для сравнения с точными результатами приводятся основные формулы, описывающие сглаженные оценки плотности. Путем численного моделирования на примере процесса AR-1 показано, что относительная точность оценивания плотности  $q$  является некоторой универсальной функцией параметра  $w = (F-1)/N$ , где  $F$  - количество подлежащих оценке параметров, а  $N$  - длина временного ряда. Соотношение  $q = \theta(w)$ , - закон подобия. - выясняет причину, по которой ряд предложенных ранее оценок плотности (и, в частности, периодограмма Шустера) оказались статистически несостоятельными. Именно эти оценки предполагают чрезмерно детальную модель спектральной плотности. Необходимость согласования сложности модели с данными наблюдений следует из ограниченности информации о спектре случайного процесса, заключенной в выборке отсчетов ряда фиксированного объема.

8. *Периодограмма Шустера и сглаженные оценки плотности.* Начиная с этого раздела, мы обратимся непосредственно к спектральному оцениванию. Для сравнения с дальнейшими точными результатами нам понадобятся некоторые оценки, широко использующиеся на практике. Помимо собственно периодограммы Шустера, мы рассмотрим в качестве типических два связанных с ней выражения: оценку Бартлетта [4,5], модифицированную Гренандером и Розенблаттом [6], и оценку Парзена [7]. Достаточно полное описание соответствующих методов можно найти в монографии Андерсона [8].

Периодограмма Шустера была определена соотношением (1.1). Производя в нем фактическое возведение во вторую степень и учитывая (6.14) и (6.15), получаем:

$$p_N(f) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \exp(-i \cdot 2\pi n f) \bar{c}_n = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \exp(-i \cdot 2\pi n f) (1 - |n|/N) c_n, \quad (8.1)$$

где, в продолжение (3.3), введена безразмерная периодограмма

$$p_N(f) \equiv P_N(v)/\delta t, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2, \quad (8.2)$$

а  $\bar{c}$  и  $c$  - соответственно смещенные и несмещенные оценки коэффициентов ковариации  $r$ . Поскольку статистические свойства последних известны (см. §6), соотношение (8.1) позволяет выяснить

аналогичные свойства  $p_N(f)$ , которые упоминались во *Введении*.

Согласно (2.12) и (3.3), спектральная плотность  $s(f)$  исходного непрерывного процесса равна

$$s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i \cdot 2\pi n f) r_n. \quad (8.3)$$

Сравнение (8.1) и (8.3) показывает, что в периодограмме Шустера точные значения ковариационных коэффициентов  $\{r_n\}$  заменяются их смещенными выборочными оценками  $\{\bar{c}_n\}$ . Если вместо (8.1) выполнить дискретное преобразование Фурье несмещенных коэффициентов  $\{c_n\}$ , то есть опустить множитель  $w_n = (1 - |n|/N)$ , то получится еще более неустойчивая оценка спектральной плотности, чем периодограмма Шустера. Причина этого ясна. Как было выяснено в §7, по выборке конечного объема с наибольшими ошибками определяются старшие коэффициенты ковариации, а именно их влияние и "обрезается" в (8.1) множителем  $w_n$ . Однако этого оказывается недостаточным для получения состоятельной оценки плотности, и потому разными авторами были предложены другие формы весовых множителей  $\{w_n\}$ , которые еще в большей степени уменьшают влияние "хвоста" оценок коэффициентов ковариации. В общем виде т.н. *сглаженная* оценка спектральной плотности задается выражением

$$s_N(f) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \exp(-i \cdot 2\pi n f) w_n c_n. \quad (8.4)$$

*Корреляционное окно*  $\{w_n\}$  предполагается здесь симметричным и неотрицательным,  $w_{-n} = w_n \geq 0$ , а  $w_0 = 1$ . С целью упрощения записи мы далее будем указывать значения  $w_n$  только при  $n \geq 0$ .

Итак, для периодограммы Шустера

$$w_n = 1 - n/N, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.5)$$

Для упоминавшегося выше модифицированного окна Бартлетта вводится дополнительный обрезующий фактор:

$$w_n = \begin{cases} (1 - n/N)(1 - n/K), & n \leq k, \\ 0, & n > k, \end{cases} \quad (8.6)$$

где  $K$  - некоторое целое число, заключенное между 0 и  $N-1$ . Наконец, окно Парзена предполагает более пологое убывание дополнительного обрезующего множителя:

$$w_n = \begin{cases} (1 - n/N) \left[ (1 - n/K)^2 \right], & n \leq k, \\ 0, & n > k. \end{cases} \quad (8.7)$$

Три оценки плотности, о которых идет речь, иллюстрируются рис. 1.2 (часть I) для процесса AR-1.

В литературе можно найти еще целый ряд аналогичных оценок. В типичных условиях все они приводят к близким результатам, и тем не менее произвол исследователя при выборе корреляционного окна представляется нежелательным.

Шаг по частоте при вычислении оценки (8.4) принимают равным спектральному разрешению. Для периодограммы Шустера последнее составляет, согласно Рэлею, величину порядка обратной продолжительности временного ряда  $T$ ; в безразмерных единицах  $\delta f \approx 1/N$ . По смыслу сглаженные оценки Бартлетта и Парзена отвечают делению всего ряда на отрезки длиной порядка  $k \cdot \delta t$ , вычислению для каждого из отрезков периодограммы Шустера (возможно, с некоторыми вариациями) и последующему усреднению совокупности полученных периодограмм. Очевидно, разрешение в смысле Рэля при этом будет  $\delta f \approx 1/K$ . Этот же результат следует из эквивалентной интерпретации Даниэля [9] процедуры сглаживания спектра, предполагающей усреднение соседних значений периодограммы Шустера со *спектральным окном*  $w(f)$ , однозначно связанным с выбранным корреляционным окном.

9. *Модель спектральной плотности в виде кусочно-линейной функции.* С точки зрения общей теории обратных задач трудности, связанные с нахождением состоятельной оценки спектральной плотности, во многом были обусловлены недостаточным вниманием, которое уделялось фундаментальному понятию *модели* изучаемого явления. Именно, еще до попытки найти обратное решение следует не только задать механизм формирования наблюдательных данных, но и *заранее фиксировать* совокупность параметров, подлежащих оцениванию. Между тем, при нахождении периодограммы Шустера модель искомой плотности видоизменяется наряду с ростом объема выборки  $N$ , причем оцениваемое количество отсчетов спектральной плотности полагается пропорциональным  $N$ .

Мы ограничимся здесь рассмотрением модели, согласно которой спектральная плотность  $s(f)$ , будучи симметричной функцией частоты, априорно задана на отрезке  $0 \leq f \leq 1/2$  в виде кусочно-линейной функции с шагом  $\delta f = 1/2M$ , где  $M$  - положительное целое число (рис.9.1). При этом оцениваются  $M+1 = F$  значений спектральной плотности в узлах:

$$s_j = s(f_j), \quad f_j = j \cdot \delta f, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (9.1)$$

Единственным свободным параметром здесь остается  $F$ . Как мы далее увидим, состоятельные оценки плотности можно найти лишь при не слишком больших значениях  $F$  - для более полного восстановления совокупности  $\{s_j\}$  выборка  $u$  просто не содержит нужной информации.

Сходные результаты получаются и для других моделей, скажем, чисто дискретной  $s(f)$  или спектральной плотности, заданной в виде кусочно-

полиномиальной функции. Отличаясь деталями, эти модели равным образом приводят к описываемому ниже закону подобия. Вид  $s(f)$  в

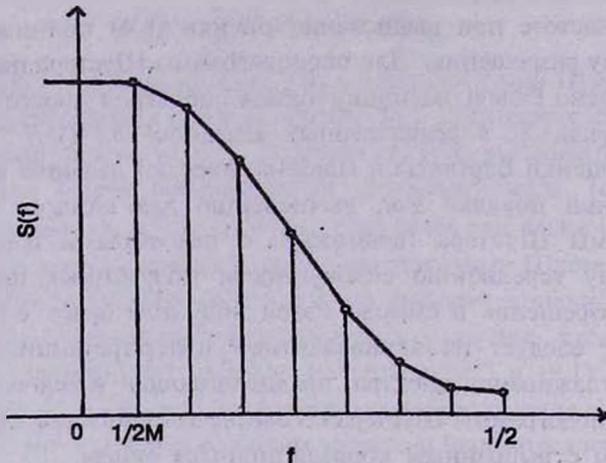


Рис. 9.1. Спектральная плотность в виде кусочно-линейной функции.

конкретной задаче должен выбираться исследователем на основании всей совокупности сведений об изучаемом процессе; если явных указаний нужного характера нет, то следует изучить несколько моделей. Как всегда, предпочтение отдается наиболее простой модели, которая позволяет с естественной точностью описать имеющиеся данные.

При сравнении принятой модели с описанными в §8 сглаженными оценками плотности следует иметь в виду возможное различие спектрального разрешения  $\delta f$ . В кусочно-линейной модели  $\delta f = 1/[2(F-1)]$ , в то время как для окон Бартлетта (8.6) и Парзена (8.7) разрешение  $\delta f = 1/K$ . Равенство разрешений достигается при  $F \approx K/2 + 1$ .

В случае, когда спектральная плотность имеет вид кусочно-линейной функции, интегралы в (4.1) находятся без труда, и мы получаем для ковариационных коэффициентов:

$$r_n = \frac{v_n}{2(F-1)} \left[ s_0 + (-1)^n s_{F-1} + 2 \sum_{k=1}^{F-2} \cos\left(\frac{\pi}{F-1} n k\right) s_k \right], \quad (9.2)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$v_n \equiv \sin^2 \left[ \frac{\pi n}{2(F-1)} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9.3)$$

Напомним, что функция  $\text{sinc}(\cdot)$  была определена соотношением (2.8). В области приближенного интегрирования выражений, содержащих под знаком интеграла тригонометрические функции [10], выражение (9.2)

известно как *формула Филона*. Здесь, однако, его смысл принципиально иной: оно дает *точное* представление коэффициентов  $\{r_n\}$  при заданной априорной информации. В матричной форме (9.2) имеет вид:

$$r = H \cdot s, \quad (9.4)$$

где  $r$  есть  $N$ -мерный вектор-столбец,  $s$  - аналогичный  $F$ -мерный вектор, а  $H$  -  $(N \times F)$ -матрица. Как обычно, при вычислениях удобно сместить нумерацию от интервала  $0, 1, \dots, N-1$  к интервалу  $1, 2, \dots, N$ . Тогда элементы матрицы  $H$  задаются формулами:

$$v_n = \sin c^2 \left[ \frac{n-1}{2(F-1)} \right], \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (9.5)$$

$$H_{mn} = \frac{v(n)}{2(F-1)} \cdot \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 2 \cos \left[ \pi(n-1)(m-1)/(F-1) \right], & m = 2, \dots, F-1, \\ (-1)^{n-1}, & m = F. \end{cases} \quad (9.6)$$

Матрица Фишера коэффициентов ковариации  $\{r_n\}$  размерами  $N \times N$  была найдена в §7; мы далее будем обозначать ее посредством  $I_r$ . Пусть также  $I_s$  - соответствующая  $(F \times F)$ -матрица Фишера спектральной плотности. Для нахождения  $I_r$  воспользуемся известным законом преобразования матрицы Фишера при линейном преобразовании параметров [11]. В данном случае из (9.4) следует:

$$I_s = H' \cdot I_r \cdot H. \quad (9.7)$$

Поскольку формулы (7.6) дают точное представление  $I_r$  при любых значениях  $N$ , а матрица  $H$  должна задаваться самим исследователем в соответствии с выбранной им моделью плотности, представление матрицы Фишера спектральной плотности в виде (9.7) также является точным. Оно позволяет, в частности, указать нижнюю границу дисперсии всякой несмещенной оценки спектральной плотности  $s^*$ . Согласно *неравенству информации* [11,12], эта граница определяется диагональными элементами обратной матрицы Фишера:

$$\text{Var}(s^*) \geq \text{diag}(I_s^{-1}). \quad (9.8)$$

В качестве иллюстрации мы провели соответствующие вычисления для процесса AR-1 (см. §3) при разных значениях коэффициента корреляции  $\rho$  и длины временного ряда  $N$  вплоть до  $N=1024$ . На рис. 9.2 представлен профиль матрицы  $I_r$  для тех же условий, которые указаны на рис.7.1 (в данном случае смещение графика составило  $-5 \cdot 10^{-4}$ ). Важно отметить, что при возрастании  $N$  матрица Фишера  $I_r$ , подобно  $I_s$ , все более приближается к чисто диагональной матрице, то есть оценки плотности для разных точек спектра становятся все менее коррелированными. Рис.9.3 показывает для случая белого шума ( $\rho=0$ ) оригинальную

спектральную плотность  $s(f)$  и стандартное отклонение наилучшей несмещенной оценки  $s^*(f)$ , вычисленное согласно (9.8). Наконец, на рис.9.4 показана зависимость относительной точности оценки спектральной плотности, определенной соотношением

$$q(f) \equiv \sigma_{\min} [s^*(f)] / s(f), \quad (9.9)$$

от значений параметра

$$w \equiv \frac{F-1}{N}, \quad (9.10)$$

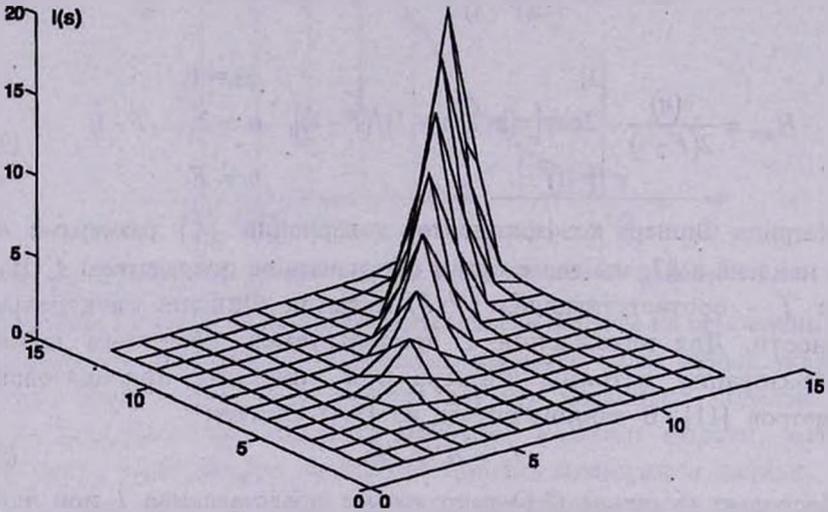


Рис. 9.2. Профиль матрицы Фишера  $I$ , спектральной плотности процесса AR-1 при  $\rho = 0.7$ ,  $N = 24$ .

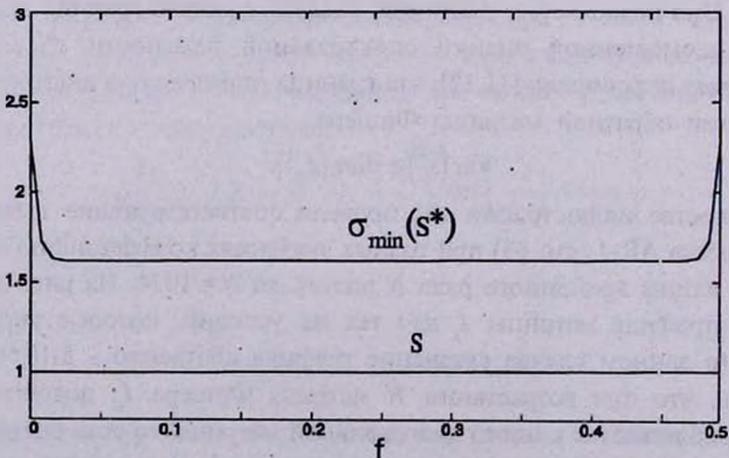


Рис. 9.3. Спектральная плотность белого шума  $s$  и стандартное отклонение наилучшей ее несмещенной оценки  $\sigma_{\min}(s^*)$  при длине временного ряда  $N = 128$ .

то есть относительного количества частот, для которых оценивается спектр. Стандартное отклонение  $\sigma_{\text{min}}(s^*)$  вычислялось согласно (9.8) для середины спектрального участка Найквиста. Изменение  $q(f)$  с частотой внутри указанного участка было пренебрежимо малым; лишь в узкой области вблизи границ  $f = 0, \pm 1/2$  точность оценивания падала (см. рис.9.3; границы интервала Найквиста во всех отношениях представляют собой особые точки).

Результаты вычислений достаточно уверенно свидетельствуют о том, что относительная точность оценки спектральной плотности зависит не от каждого из параметров  $F$  и  $N$  в отдельности, но только от их комбинации (9.10), то есть

$$q = \vartheta(w). \quad (9.11)$$

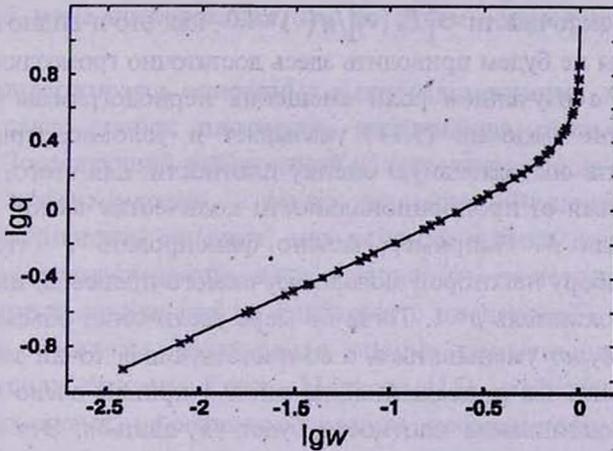


Рис. 9.4. Зависимость относительной точности оценивания спектральной плотности  $q$  от параметра  $w$  согласно расчетам (звездочки). Аппроксимация формулой (9.12) показана сплошной линией.

Малость разброса точек около гладкой кривой на рис.9.4 тем более поразительна, что при расчетах диапазоны самих значений  $F$  и  $N$  охватывали почти три порядка величины. При малых значениях  $w$  зависимость  $\lg q$  от  $\lg w$  становится линейной с наклоном  $1/2$ . Явный вид функции  $\vartheta(w)$  должен следовать из аналитического рассмотрения; что касается результатов наших вычислений, то при  $N > 10$  с хорошей точностью можно принять

$$\vartheta(w) \approx \frac{Cw^{1/2}}{(1-w)^\gamma}, \quad C=1.88, \quad \gamma=0.30, \quad 0 < w < 1. \quad (9.12)$$

Как показывают дальнейшие расчеты, сходная форма  $\vartheta(w)$  справедлива и для других видов спектральной плотности; изменения функции  $\vartheta(w)$  можно при этом описать небольшими изменениями параметров  $C$  и  $\gamma$ .

Из закона подобия (9.11) следует, что при фиксированном значении параметра  $w$  точность всякой несмещенной оценки плотности не может быть ниже некоторого *не зависящего от длины ряда  $N$*  значения  $\theta(w)$ . Это означает, что соответствующая оценка спектральной плотности будет статистически несостоятельной. Так, для периодограммы Шустера стандартный шаг по частоте равен  $\delta\nu = 1/T$ , соответствующее количество точек на интервале Найквиста равно  $N/2$ , а параметр  $w = 1/2$ . Если бы периодограмма Шустера  $P_N(\nu)$  была строго несмещенной оценкой, то для нее из (9.12) следовала нижняя граница относительной точности в виде:  $\sigma[P_N(\nu)]/g(\nu) \approx 1.6$ . Однако  $P_N(\nu)$  - смещенная оценка, и хотя само по себе смещение невелико, а при  $N \rightarrow \infty$  вдобавок неограниченно уменьшается, в неравенстве информации важна *скорость изменения смещения*; это обстоятельство приводит для периодограммы Шустера к относительной неточности  $\sigma[P_N(\nu)]/g(\nu) \approx 1.0$ , как это и видно из формул (1.2) и (1.3). Мы не будем приводить здесь достаточно громоздкие выкладки, связанные с изучением роли смещения периодограммы Шустера.

Соотношение подобия (9.11) указывает и условие, при котором удается получить состоятельную оценку плотности: для этого, очевидно, следует отказаться от пропорциональности количества частот  $F$  и длины временного ряда  $N$ . Например, можно фиксировать  $F$  (что отвечает априорному выбору некоторой модели изучаемого процесса) или принять  $F \propto N^p$ , где показатель  $p < 1$ . Тогда по мере увеличения объема выборки  $N$  значение  $w$  будет уменьшаться, а соответствующая точка зависимости  $[q - w]$  - скользить по приведенной на рис.9.4 кривой влево и вниз, то есть точность оценивания плотности будет улучшаться. Это и означает состоятельность рассматриваемой оценки. Смысл приведенного выше вывода вполне ясен: выборка объема  $N$  не содержит информации, необходимой для восстановления спектра с шагом по частоте порядка  $\delta f \approx N^{-1}$ . Неоправданная детализация спектра приводит к известному "гистограммному" эффекту.

Строго говоря, приведенные выше результаты относятся только к несмещенным оценкам плотности. При наличии смещения нижняя граница дисперсии в информационном неравенстве может измениться, как это имеет место для периодограммы Шустера. Тем не менее, причина несостоятельности оценки не зависит от ее смещенности, она по-прежнему связана с недостатком требуемой информации (прямые расчеты сходных величин в рамках теории информации Шеннона даны в [13,14]).

Второе замечание касается того обстоятельства, что рассматриваемые выше оценки плотности являются *векторными*, то есть оцениванию подлежит вся совокупность значений плотности в интервале Найквиста. Если нас интересует плотность  $s$ , на какой-либо одной частоте  $f_i$  а

остальные значения  $s$  заданы, то переход от матрицы  $I_1$  к матрице  $I_2$  по-прежнему будет определяться формулой (9.7), но информация Фишера, касающаяся  $s_j$ , будет определяться *скалярной* величиной - элементом  $I_1(j, j)$ . При этом нижняя граница дисперсии произвольной несмещенной оценки  $s_j^*$ , определяется не обратной матрицей  $I_1^{-1}$ , а обратной величиной соответствующего диагонального элемента  $I_1$ :

$$\text{Var}(s_j^*) \geq \frac{1}{I_1(j, j)}. \quad (9.13)$$

Естественно ожидать, что граница (9.13) проходит *ниже* границы (9.8) для многомерного параметрического оценивания, то есть частное значение плотности оценивается точнее. Это подтверждается соответствующими численными результатами, которые выводились при моделировании процесса AR-1. Поскольку данный вопрос находится несколько в стороне от основной темы исследования, мы не будем останавливаться на нем подробнее.

Итак, придерживаясь описанных выше рекомендаций, можно указать на целый класс оценок плотности, являющихся *состоятельными* по Р.Фишеру. Последующий выбор одной из них опирается на другое важное понятие - *эффективности*, - также введенное Фишером. В данном случае эффективность означает, что искомая оценка должна обладать наименьшим среднеквадратическим отклонением от истинного значения (для смещенных оценок это не совпадает с дисперсией). В этой связи привлекает внимание стандартная оценка наименьших квадратов, которая, в силу теоремы Гаусса-Маркова [15], эффективна в классе несмещенных оценок, не связанных условием неотрицательности решения.

Настоящая работа выполнена при содействии Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17296а).

Крымская лаборатория

Гос. астрономического института им. П.К.Штернберга, Россия

## SIMILARITY LAW IN A TIME SERIES SPECTRAL ESTIMATION. IV

V.Yu.TEREBIZH

Continuation of [1-3]. The strict representation of Fisher matrix for the spectral density of Gaussian process is founded. This allows us to calculate a

lower bound for variance of any unbiased estimate of the density. Main formulae for the smoothed spectral estimates are given, in order to compare them with strict results. The numerical simulations of the AR-1 process show that relative accuracy of spectral estimation  $q$  is a universal function of the parameter  $w = (F-1)/N$ , where  $F$  is the number of estimated parameters and  $N$  is the length of the time series. The *similarity law*  $q = \theta(w)$  reveals the cause of inconsistency of the number of spectral estimates that were proposed earlier. Namely, those estimates assume too complicated model of spectral density. Necessity to conform the complicity of the model with the data follows from the fact that information about original spectral density that is contained in a time series of finite length is limited.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ю.Теребиж, *Астрофизика*, **40**, 139, 1997 (часть I данной серии).
2. В.Ю.Теребиж, *Астрофизика*, **40**, 273, 1997 (часть II данной серии).
3. В.Ю.Теребиж, *Астрофизика*, **40**, 413, 1997 (часть III данной серии).
4. M.S.Bartlett, *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, **8**, 27, 85, 1946.
5. M.S.Bartlett, *Biometrika*, **37**, 1, 1950.
6. U.Grenander, M.Rosenblatt, *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, Wiley, New York, 1957.
7. E.Parzen, *Ann. Math. Statist.*, **28**, 329, 1957.
8. T.W.Anderson, *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley, New York, 1971; Т.Андерсон, *Статистический анализ временных рядов*, Мир, М., 1976.
9. P.J.Daniell, *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, **8**, 27, 1946.
10. В.И.Крылов, Л.Т.Шульгина, *Справочная книга по численному интегрированию*, Наука, М., 1966.
11. А.А.Боровков, *Математическая статистика*, Наука, М., 1984.
12. M.G.Kendall, A.Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vols. 2, 3, Griffin, London, 1969; М.Кендалл, А.Стьюарт, *Статистические выводы и связи*, Наука, М., 1973; *Многомерный статистический анализ и временные ряды*, Наука, М., 1976.
13. В.Ю.Теребиж, *Успехи физ. наук*, **165**, 143, 1995.
14. V.Yu.Terebizh, *Int. Journ. of Imaging Systems and Technology*, **6**, 358, 1995.
15. С.М.Ермаков, А.А.Жиглевский, *Математическая теория оптимального эксперимента*, Наука, М., 1987.