

УДК: 524.8:531.51

О СТРУННОЙ КОСМОЛОГИИ С ДИЛАТОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. II

А.А.СААРЯН

Поступила 16 сентября 1996

Принята к печати 1 октября 1996

Продолжены исследования по струнной космологии с непертурбативным дилатонным потенциалом, начатые в первой части работы. Методами качественной теории динамических систем рассмотрена картина космологической эволюции изотропной гравитационно-дилатонной модели для различных случаев поведения потенциала в области сильной связи. Обсуждаются особенности моделей с потенциалами, принимающими отрицательные значения в некоторых интервалах значений поля дилатона. Рассмотрен конкретный механизм генерации непертурбативного потенциала, основанный на конденсации калибрина в скрытом секторе калибровочной группы.

1. *Введение.* Данная статья является второй частью работы, посвященной космологическим моделям в низкоэнергетической теории струн с дилатонным потенциалом. В первой части [1] было показано, что (см. также [2-5]) в общем конформном представлении низкоэнергетическая теория струн эквивалентна обобщенной D -мерной скалярно-тензорной теории Йордана-Бранса-Дикке с самодействующим скалярным полем и зависящим от этого поля негравитационным лагранжианом.

Для плоской анизотропной космологической модели с n изотропными подпространствами $M^i, i=1, \dots, n$, система полевых уравнений сводится к автономной динамической системе $(n+2)$ -го порядка относительно функций $\varphi, x = \dot{\varphi}, \dot{R}_i/R_i$ (см. (I3.1) (здесь и ниже римская цифра I перед номерами формул указывает на формулы из [1])), где φ - поле дилатона, R_i - масштабный фактор подпространства M^i , точка над буквой означает производную по времени. Из этой динамической системы можно получить замкнутую систему

$$\dot{\varphi} = x, \quad \dot{x} = -\gamma y - e^{f\varphi} V'(\varphi), \quad \dot{y} = -y^2 + e^{f\varphi} \left[\mathcal{V}' / 2 + 2A^2 V \right] \quad (1.1)$$

с дополнительным ограничением

$$(y + fx/2)^2 \geq A^2 (x^2 + 2e^{f\varphi} V), \quad (1.2)$$

где знак равенства соответствует изотропным моделям. Здесь

$$f = c - \frac{4}{D-2} = \frac{2b}{D-2}, \quad A = \frac{2\sqrt{D-1}}{D-2}, \quad y = \sum_{i=1}^n n_i \dot{R}_i / R_i + bx, \quad (1.3)$$

$$V(\varphi) = \frac{D-2}{8} \exp\left(\frac{4\varphi}{D-2}\right) \bar{V}(\varphi),$$

параметр c связывает метрики в конформном и струнном представлениях: $G^{MN} = e^{c\varphi} \bar{G}^{MN}$, $\bar{V}(\varphi)$ - дилатонный потенциал в струнном представлении (см. выражение (12.1) для низкоэнергетического струнного действия). В [1] показано, что в ходе космологической эволюции анизотропные решения будут стремиться к изотропным или уходить в бесконечность фазового пространства. Были рассмотрены случаи точно решаемых потенциалов.

Данная работа посвящена качественному анализу изотропных космологических моделей для различных случаев поведения дилатонного потенциала в области сильной связи. Результаты анализа подытожены на рис. 1-4. В разделе 3 исследованы особенности грави-дилатонных моделей с потенциалами, принимающими отрицательные значения в некоторых областях значений дилатона. Здесь же рассмотрен реалистичский пример потенциала, генерируемого конденсацией калибрино в скрытом секторе калибровочной группы.

2. Качественный анализ изотропной грави-дилатонной модели.

В изотропной грави-дилатонной космологической модели $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ и в условии (1.2) имеет место знак равенства. Это позволяет снизить порядок динамической системы (1.1), исключив одну из трех функций φ, x, y . В качестве исходных выберем функции φ и x . Соответствующая система примет вид

$$\dot{\varphi} = x, \quad \dot{x} = fx^2/2 \pm Ax \sqrt{x^2 + 2e^{f\varphi} V(\varphi)} - e^{f\varphi} V'(\varphi). \quad (2.1)$$

Масштабный фактор определяется из соотношения

$$h = \frac{R}{R} = -f \frac{\dot{\varphi}}{2} \mp \frac{2}{(D-2)\sqrt{D-1}} \sqrt{x^2 + 2e^{f\varphi} V(\varphi)}. \quad (2.2)$$

В этом разделе мы исследуем основные свойства динамической системы (2.1) методами качественной теории динамических систем. Одним из наиболее важных этапов качественного анализа является нахождение особых точек и выяснение их характера. В конечной части фазовой плоскости (φ, x) особыми для системы (2.1) являются точки $(\varphi_0, 0)$, где φ_0 является экстремумом потенциала, причем в этой точке значение самого потенциала должно быть неотрицательным

$$V'(\varphi_0) = 0, \quad V(\varphi_0) \geq 0. \quad (2.3)$$

Соответствующими решениями являются D -мерное пространство-время Минковского при $V(\varphi_0) = 0$ и решение де-Ситтера при $V(\varphi_0) > 0$. Собственные числа особых точек имеют вид

$$\lambda_{1,2} = e^{f\varphi_0/2} \left(-A\sqrt{V_0/2} \pm \sqrt{A^2 V_0/2 - V_0''} \right). \quad (2.4)$$

Здесь и ниже мы пользуемся обозначением $V_0^{(n)} = V^{(n)}(\varphi_0)$. Характер особой точки определяется величинами V_0 и V_0'' . В зависимости от их значений имеем следующие типы особых точек:

1) при $V_0'' < 0$ имеем $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ и особая точка является седлом. Например, на рис. 1а ей соответствует точка А, (на приведенных ниже рисунках проведено отображение фазовой плоскости (φ, x) на единичный круг согласно

$$\varphi = \frac{\rho}{1-\rho} \cos\theta, \quad x = \frac{\rho}{1-\rho} \sin\theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.5)$$

что позволяет включить в исследуемую схему также бесконечно удаленные точки плоскости (φ, x) . Направления сепаратрис в особой точке (на рис. 1а это сепаратрисы A_1B_1, A_2B_2) определяются собственными векторами $\vec{n}^{(i)}$:

$$\vec{n}^{(i)} = (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} (1, \lambda_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

2) Для значений

$$0 < V_0'' < A^2 V_0 / 2 \quad (2.7)$$

из выражений собственных чисел (2.4) следует, что оба они одинакового знака и особая точка является устойчивым узлом ($\lambda_i < 0$) (см. соответствующую точку на рис. 2а), собственные векторы которого по-прежнему определяются соотношениями (2.6). Все траектории в окрестности особой точки, кроме исключительных, касаются собственного вектора $\vec{n}^{(1)}$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$). Случаю $V_0'' = A^2 V_0 / 2$ соответствует устойчивый звездный узел.

3) При

$$0 < A^2 V_0 / 2 < V_0'' \quad (2.8)$$

особая точка является невырожденным устойчивым фокусом (см. фокусы на рис. 1-3) при $V_0 \neq 0$, причем вращение вокруг особой точки происходит по направлению движения часовой стрелки (в пункте 5 мы увидим, что фокусом является также особая точка в случае $V_0 = 0$).

4) Пусть

$$V_0 > 0, \quad V_0^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad V_0^{(m)} \neq 0, \quad m \geq 3. \quad (2.9)$$

Одно из собственных чисел равно нулю и поэтому особая точка является вырожденной. Для простоты будем работать в эйнштейновском представлении. Введем новую функцию

$$\bar{\varphi} = x + A\sqrt{2V_0}(\varphi - \varphi_0), \quad (2.10)$$

систему (2.1) в окрестности особой точки можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varphi}} &= Q(\bar{\varphi}, x), \quad \dot{x} = -A\sqrt{2V_0}x + Q(\bar{\varphi}, x), \\ Q(\bar{\varphi}, x) &= -\frac{V_0^{(m)}}{(m-1)!} \frac{(\bar{\varphi} - x)^{m-1}}{(A\sqrt{2V_0})^{m-1}} - \frac{x^3}{2V_0} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Согласно стандартной схеме (см., например, [6,7]) отсюда следует, что особая точка имеет характер а) седла при четном m и $V_0^{(m)} < 0$; б) устойчивого узла при четном m и $V_0^{(m)} > 0$; в) особой точки с одним устойчивым узловым сектором и двумя седловыми при нечетном m (см. рис.2б), траектории узлового сектора стремятся к особой точке справа от сепаратрисы $x = -A\sqrt{2V_0}(\varphi - \varphi_0)$ при $V_0^{(m)} > 0$ и слева - при $V_0^{(m)} < 0$. Эти устойчивые сепаратрисы разделяют узловой сектор от седловых.

5) При $V_0 = 0, V_0'' > 0$ соответствующая линейная система в особой точке имеет центр и, следовательно, как и в предыдущем случае требуется дополнительный анализ с включением нелинейных членов. Такой анализ показывает, что особая точка является устойчивым фокусом, вращение траекторий вокруг которого происходит по направлению движения часовой стрелки. Асимптотическое поведение решений в окрестности особой точки имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \frac{D-2}{\sqrt{D-1}} \frac{\cos(\sqrt{V_0} e^{j\omega_0/2} t)}{\sqrt{V_0} e^{j\omega_0/2} t}, \\ h &= \frac{1}{\sqrt{D-1} t} \left[\frac{2}{\sqrt{D-1}} - b \sin(\sqrt{V_0} e^{j\omega_0/2} t) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В частности, в эйнштейновском представлении $h = 2/(D-1)t$, и мы приходим к результату работы [8], где рассматривается потенциал $m^2 \varphi^2$.

6) И, наконец, при $V_0 = V_0'' = 0$ оба собственных числа равны нулю. Пусть

$$V_0^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad V_0^{(m)} \neq 0, \quad m \geq 3. \quad (2.13)$$

Для неотрицательных потенциалов m должно быть четным числом и $V_0^{(m)} > 0$. Анализ по стандартной схеме (см., например, [6]) приводит к заключению, что соответствующая особая точка является устойчивым фокусом.

Рассмотрим теперь поведение фазовых траекторий динамической системы (2.1) на бесконечности фазовой плоскости. Прежде всего заметим, что если потенциал удовлетворяет условию

$$V(\varphi) \cdot \text{ср}(\pm 2A\varphi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

то его вкладом на бесконечности фазовой полуплоскости $\pm x > 0$ можно пренебречь (об особом решении, для которого это не так, см. ниже) и решения системы (2.1) имеют вид (14.7), (14.8), а $(2\sqrt{D-1} \mp b)t \rightarrow +\infty$. В этой стадии поведение модели является кинетически доминированным для дилатона: $\varphi^2 \gg V(\varphi)$. Кроме этих решений система (2.1) при условии (2.14) имеет также одно особое решение, не удовлетворяющее условию кинетической доминантности. В области $\varphi \rightarrow \infty$ это решение имеет следующее асимптотическое поведение:

1) для потенциалов со степенной зависимостью на бесконечности

$$V(\varphi) \sim B|\varphi|^m, \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

оно в этой области имеет вид

$$x(\varphi) \approx -\frac{V'(\varphi)\exp(f\varphi/2)}{A\sqrt{2V(\varphi)}} \sim -\frac{m}{A}\sqrt{\frac{B}{2}}|\varphi|^{m/2-1}e^{f\varphi/2} \operatorname{sgn} \varphi, \quad \varphi \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

с масштабным фактором

$$R \approx \exp\left[\frac{-8}{(D-2)^2} \int \frac{V(\varphi)}{V'(\varphi)} d\varphi\right] \sim \exp\left[\frac{-4\varphi^2}{(D-2)^2 m}\right]. \quad (2.17)$$

Временная зависимость этого решения при $f=0$ имеет вид

$$\varphi = \pm \left[\frac{m(m-4)}{2A} \sqrt{\frac{B}{2}} t \right]^{2/(4-m)}, \quad m \neq 0, 4, \quad (2.18)$$

где $t \rightarrow +\infty, -\infty, +0$ соответственно при $m < 0, 0 < m < 4, m > 4$. При $m=4$

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(-4\sqrt{2} \sqrt{B} t/A\right), \quad t \rightarrow -\infty. \quad (2.19)$$

В случае $m=0$ во второй оценке (2.16) следует учесть следующие поправки. Если

$$V(\varphi) \sim B + B_k/|\varphi|^k, \quad k > 0, \quad \varphi \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

то особое решение имеет вид

$$x(\varphi) = \frac{kB_k}{A\sqrt{2B}} |\varphi|^{-k-1} \operatorname{sgn} \varphi, \quad (2.21)$$

со следующей временной зависимостью:

$$\varphi = \left[\frac{k(k+2)}{A\sqrt{2B}} B_k t \right]^{1/(k+2)}, \quad R = R_0 e^{ht}, \quad h = \text{const}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

В неэйнштейновских представлениях ($f \neq 0$) зависимость $\varphi(t)$ в области $\varphi \rightarrow \infty$ определяется экспоненциальным множителем в (2.16) и имеет вид

$$|\varphi|^{1-m/2} e^{-f\varphi/2} = \pm \frac{mf}{2A} \sqrt{\frac{B}{2}} t, \quad \varphi \rightarrow \pm\infty, \quad (2.23)$$

при $m \neq 0$ и

$$|\varphi|^{k+1} e^{-f\varphi/2} = \mp \frac{kB_k f}{2A\sqrt{2B}} t, \quad \varphi \rightarrow \pm\infty, \quad (2.24)$$

при $m=0$ (см. (2.20)).

Для этого решения $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \infty$.

2) Для потенциалов с экспоненциальной зависимостью на бесконечности:

$$V(\varphi) \sim V_0 e^{f\varphi}, \quad \varphi \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

особое решение существует при

$$|\beta| < 2A \quad (2.26)$$

и в пределе $\varphi \rightarrow \infty$ имеет вид (14.14) с зависимостью от времени (14.15) или (14.17), если $f + \beta = 0$. Заметим, что для этого решения $\dot{\varphi}^2 = V'(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \infty$.

Перейдем теперь к систематическому изучению фазовой картины системы (2.1) на бесконечности методами качественной теории динамических систем. Для этого введем полярные координаты (ρ, θ) согласно (2.5). Теперь точкам на бесконечности фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ соответствуют точки окружности $\rho=1$. Введя также новую временную координату η согласно $d\eta = dt/(1-\rho)$, исходную систему (2.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\eta} &= \rho^2(1-\rho)\sin\theta \left[(1/\rho-1)\cos\theta + \frac{f}{2}\sin^2\theta - \right. \\ &\quad \left. - A\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + 2(1/\rho-1)^2 V(\varphi)e^{f\varphi}} - (1/\rho-1)^2 V'(\varphi)e^{f\varphi} \right], \\ \frac{d\theta}{d\eta} &= -(1-\rho)\sin^2\theta + \rho\cos\theta \left[\frac{f}{2}\sin^2\theta - \right. \\ &\quad \left. - A\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + 2(1/\rho-1)^2 V(\varphi)e^{f\varphi}} - (1/\rho-1)^2 V'(\varphi)e^{f\varphi} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\varphi = \rho\cos\theta/(1-\rho)$. Если потенциал при $\varphi \rightarrow \infty$ имеет вид (2.15) с $m \leq 2$, то в эйнштейновском представлении особыми для системы (2.27) являются следующие точки окружности $\rho=1$ (картина фазовых траекторий в общем конформном представлении получается из эйнштейновского представления преобразованием $x \rightarrow x \exp(-f\varphi/2)$):

1) точка $\theta=0$ - устойчивый узел при $m < 0$ или $m=0, B_k < 0$ (см. (2.20)), причем все траектории входят в особую точку из сектора $\theta > 0$ (см. рис. 1б). Если $m > 0$ или $m=0, B_k > 0$, то эта особая точка является седлом с двумя секторами (точка на рис. 1а), неустойчивой сепаратрисой которых является особое решение (2.16);

2) точка $\theta=\pi/2$. В ее окрестности потенциальными членами можно пренебречь и особая точка является неустойчивым вырожденным узлом, причем траектории выходят из особой точки, находясь левее от оси $\theta=\pi/2$ (точка B_1 на рис. 1а);

3) $\theta=\pi$. Характер этой особой точки тот же, что и в случае $\theta=0$. Теперь при $m < 0$ траектории входят в особую точку из сектора $\theta > \pi$;

4) $\theta=3\pi/2$. Точка является неустойчивым вырожденным узлом. Вблизи нее траектории выходят в область $\theta > 3\pi/2$ (точка B_2 на рис. 1а).

В случае $m > 2$ следует ввести новую временную координату $d\eta' = (1-\rho)^{2i-2} \cdot dt$. Соответствующий анализ в этом случае показывает, что при $m < 4$ особые точки и их качественный характер те же, что и при $m=2$, с тем отличием, что теперь сепаратрисы точек $\theta=0$ и $\theta=\pi$ касаются

окружности $\rho=1$. При $m=4$ особыми являются следующие точки окружности $\rho=1$:

$$\theta = \pi/2, \quad \theta = 3\pi/2, \quad \theta = -\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}B/A), \quad \theta = \pi - \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}B/A). \quad (2.28)$$

Фазовая картина в окрестности первых двух из них та же, что и выше. Последние две точки являются седловыми с двумя секторами, неустойчивой сепаратрисой которых является особое решение (2.16) с временной зависимостью (2.19) (см. рис. 2а). При $m>4$ на окружности $\rho=1$ остаются две особые точки $\theta=\pi/2$ и $\theta=3\pi/2$. Они являются вырожденными с одним неустойчивым узловым и одним седловым секторами, сепаратрисой которых является особое решение (2.16) с асимптотическим поведением (2.17) и (2.18) при $t \rightarrow +0$ (см., например, точку $\theta=3\pi/2$ на рис. 2б и 3б). Для точки $\theta=\pi/2$ узловой сектор находится справа от сепаратрисы, для точки $\theta=3\pi/2$ - слева. Аналогичная картина верна и для потенциалов с экспоненциальным поведением (2.25) при условии (2.26). Теперь сепаратриса, разделяющая узловые и седловые секторы особых точек, описывается уравнением (14.16).

И, наконец, если при $\varphi \rightarrow \infty$ потенциал стремится к бесконечности по закону (2.25) с $\beta \geq 2A$ или быстрее, то соответствующая динамическая система не имеет особых точек на бесконечности.

Результаты проведенного качественного анализа гравитационно-дилатонных космологических моделей, описываемых динамической системой (2.1), подытожены на рис. 1-3, где приведены фазовые картины эйнштейновского представления ($f=0$) после предварительного отображения фазовой плоскости (φ, x) на единичный круг ($0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) согласно (2.5). Фазовые картины в общем конформном представлении получаются преобразованием $x \rightarrow xe^{-f/2}$. Рассмотрены модели расширения, соответствующие нижнему знаку в (2.1). Модели сжатия получаются отсюда преобразованием $t \rightarrow -t, x \rightarrow -x$. Следует отметить, что истинные траектории лежат на поверхности (см. (1.5) со знаком равенства и в эйнштейновском представлении)

$$y^2 = A^2 \left[x^2 + 2V(\varphi) \right] \quad (2.29)$$

в фазовом пространстве (φ, x, y) и фазовые портреты в плоскости (φ, x) есть ортогональные проекции истинной картины на горизонтальную плоскость. На рисунках эти портреты приведены для качественно различных случаев поведения дилатонного потенциала в области сильной связи $\varphi \geq -1$. Во всех случаях предполагается, что $V(\varphi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow -\infty$, вследствие чего характер особых точек $\rho=1, \theta=\pi/2$ и $\rho=1, \theta=\pi$ один и тот же на всех рисунках. В частности, вблизи первой из них (см., например, точку B_1 на рис. 1а) траектории описываются решением (14.7) (с верхним знаком) нулевого потенциала.

Для потенциала, изображенного на рис. 1а, в зависимости от соотно-

шения между его значениями в локальном максимуме и минимуме, воз-

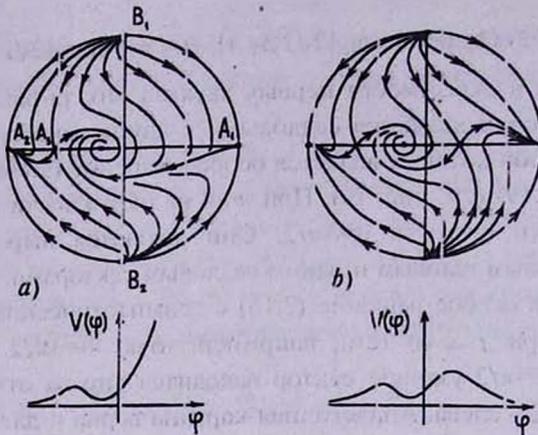


Рис.1. Фазовые портреты моделей расширения динамической системы (2.1) в эйнштейновском представлении, соответствующие изображенным потенциалам. Предполагается, что в локальных минимумах потенциала выполнено условие (2.8). В случае (a) поведение потенциала при $\varphi \rightarrow +\infty$ является степенным: $V(\varphi) \sim \varphi^m$, $0 < m \leq 2$.

можны три качественно различных случая, когда конечной точкой эволюции особого решения, соответствующего неустойчивой сепаратрисе седла A_1 , является 1) фокус, 2) точка A_2 , 3) точка A_2 . На рис.1a изображен фазовый портрет для первого из этих вариантов. Вблизи седла асимптотика особого решения, соответствующего выходящей сепаратрисе, имеет вид (2.21) и описывает эволюцию, начинающуюся в бесконечно далеком прошлом, согласно (2.23) (верхний знак) и

$$h = \frac{\sqrt{8B} \varphi^{m/2}}{(D-2)\sqrt{D-1}}, \quad \varphi \rightarrow -\infty, \quad 0 < m < 4. \quad (2.30)$$

Так как вблизи этой сепаратрисы $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$, то в этой области следует ожидать возникновения инфляционных стадий. Вопросы общности и условий реализации этих стадий расширения в ОТО с массивным скалярным полем рассмотрены в [8] (см. также [9] для струнных моделей с квадратичным дилатонным потенциалом). С учетом $\dot{\varphi}^2 \ll V$ из (2.2) для моделей расширения имеем

$$h \approx \frac{\sqrt{8V(\varphi)}}{(D-2)\sqrt{D-1}}. \quad (2.31)$$

Для отношения масштабного фактора в некоторый начальный момент времени t_i к масштабному фактору в некоторый конечный момент времени t_f из (2.1), (2.31) получаем

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} \approx \exp \left[\frac{-1}{D-2} \int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \frac{dx}{x + \left[\frac{2V(\varphi)}{D-2} \right]^{1/2} / A} \right] \quad (2.32)$$

Отсюда следует, что значительный рост масштабного фактора возможен для тех траекторий, которые к моменту t , подходят достаточно близко к сепаратрисе, выходящей из точки A_1 (в инфляционных стадиях отношение $R(t_f)/R(t_i)$ должно быть порядка 10^{25} - 10^{30}). Заметим, что, согласно (2.17), отношение (2.32) можно выразить через начальное и конечное значения поля дилатона

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} \approx \exp \left[\frac{4(\varphi_i^2 - \varphi_f^2)}{m(D-2)^2} \right], \quad (2.33)$$

откуда видно, что даже небольшое изменение дилатона может обеспечить достаточную степень инфляции. Приближенная формула (2.33) верна во всех конформных представлениях (конформные преобразования приводят к линейным по φ поправкам в экспоненте, которые при достаточно больших φ (напомним, что мы рассматриваем окрестность точки A_1) малы по сравнению с квадратичными членами этой формулы). Таким образом, инфляционный рост масштабного фактора вблизи особого решения (2.16) происходит во всех конформных представлениях. Отметим также, что если в окрестности локального максимума потенциал является достаточно плоским, то инфляционные траектории могут существовать и в окрестности выходящей сепаратрисы соответствующей седловой точки (точка A_1 на рис.1а).

Вывод о существовании инфляционных траекторий в окрестности особого решения (2.16) справедлив и для потенциалов (2.15) с $m \geq 4$. На рис.2а изображен случай $m=4$, когда для инфляционной сепаратрисы $x = -\sqrt{8B}\varphi/A$ при $\varphi \rightarrow +\infty$. Предполагалось, что локальный минимум удовлетворяет условию (2.7) и поэтому соответствующая особая точка

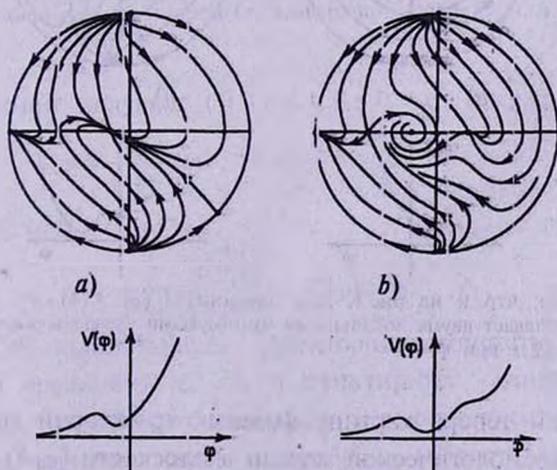


Рис.2. То же, что и на рис.1. В локальном минимуме потенциала (а) выполнено условие (2.7), а при $\varphi \rightarrow +\infty$, $V(\varphi) \sim \varphi^4$. Для потенциала (б) $V(\varphi) \sim \varphi^m$, $m > 4$ или $V(\varphi) \sim e^{\beta\varphi}$, $0 < \beta < 2A$ при $\varphi \rightarrow +\infty$.

является устойчивым узлом. Для потенциала на рис.2*b* соответственно имеем (2.8) и $m > 4$, когда особая точка $\rho = 1, \theta = 3\pi/2$ является вырожденной с узловым и седловым секторами, сепаратрисой которых является особое решение (2.16). Имется также другая вырожденная особая точка на полуоси $\theta = 0$, соответствующая точке перегиба потенциала. Фазовая картина имеет вид рис.2*b* и для потенциалов (2.25) при условиях (2.26) и $\beta > 0$. При $\varphi \rightarrow +\infty$ сепаратриса в точке $\rho = 1, \theta = 3\pi/2$ в этом случае описывается уравнением (14.14) (с $f = 0$) и временной зависимостью масштабного фактора

$$R \sim t^{16/\beta^2(D-2)^2}, \quad t \rightarrow +0. \quad (2.34)$$

При условии $\beta < 4/(D-2)$ это соответствует моделям степенной или расширенной инфляции (extended inflation) [9-11] в эйнштейновском представлении. На обоих фазовых картинах рис.2 изображен случай, когда конечной точкой эволюции особого решения (2.16) является локальный минимум потенциала.

Для экспоненциальных на бесконечности потенциалов (2.25) с $\beta > 2A$ точка $\rho = 1, \theta = 3\pi/2$ не является особой, и соответствующая фазовая картина имеет вид, изображенный на рис.3*a*. Фазовая картина для экспоненциального на бесконечности потенциала с двумя локальными минимумами, удовлетворяющего условию (2.26), приведена на рис.3*b*. Предположено выполнение условия (2.8) в обоих минимумах.

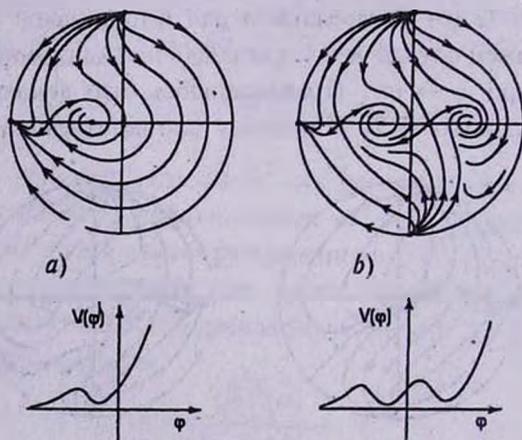


Рис.3. То же, что и на рис.1. Для потенциала (а) $V(\varphi) \sim e^{A\varphi}$, $\beta > 2A$ при $\varphi \rightarrow +\infty$. Потенциал (б) обладает двумя локальными минимумами удовлетворяющие условию (2.8) и $V(\varphi) \sim e^{A\varphi}$, $0 < \beta < 2A$ при $\varphi \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь картину фазовых траекторий гравитационно-дилатонной изотропной космологической модели в плоскости (φ, h) . Исключив x из системы уравнений (1.1), с помощью (1.2) (со знаком равенства) в эйнштейновском представлении получим следующую динамическую

систему:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{(D-1)(D-2)h^2/4 - 2V(\varphi)}, \quad \dot{h} = -(D-1)h^2 + \frac{8V(\varphi)}{(L^2-2)^2}. \quad (2.35)$$

В случае положительных потенциалов для этой системы классически доступной является область фазовой плоскости, определяемая неравенством

$$|h| \geq A\sqrt{2V(\varphi)}/(D-1). \quad (2.36)$$

Ее граница - особая кривая динамической системы (в плоскости (φ, h)) ей соответствует ось $x=0$). В конечной части фазовой плоскости других особых точек нет. Здесь мы исследуем только модели расширения (верхняя полуплоскость (φ, h)), так как сжимающиеся модели получаются преобразованием $t \rightarrow -t, h \rightarrow -h$, при этом решения с верхним и нижним знаками меняются местами.

Характерные фазовые картины для двух типов потенциалов изображены на рис.4, где предварительно проведено отображение полуплоскости $(\varphi,$

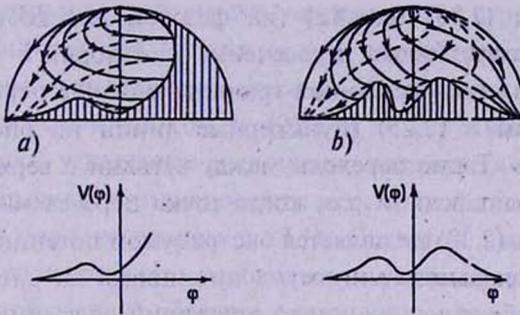


Рис.4. Фазовые портреты моделей расширения динамической системы (2.35) для двух типов потенциалов. Сплошные (пунктирные) линии соответствуют верхнему (нижнему) знаку. В локальном минимуме потенциала (а) выполнено условие (2.8), и для потенциала (b) - условие (2.7).

$h)$, $h > 0$ на верхний полукруг $(0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi)$ согласно

$$\varphi = \frac{\rho}{1-\rho} \cos\theta, \quad h = \frac{\rho}{1-\rho} \sin\theta, \quad (2.37)$$

а недоступная область

$$h < \frac{2}{D-2} \sqrt{\frac{2V(\varphi)}{D-1}}, \quad V(\varphi) > 0 \quad (2.38)$$

заштрихована. Сплошные фазовые траектории соответствуют верхнему знаку в первом уравнении (2.35), а пунктирные - нижнему. Точка $\rho = 1, \theta = \pi/2$ является неустойчивым узлом. В ее окрестности при $\theta > \pi/2$ потенциальными членами можно пренебречь (область слабой связи, $\varphi \ll -1$) и уравнение фазовых траекторий имеет асимптотический вид

$$h = h_0 e^{\mp A\varphi \operatorname{sgn} h_0}, \quad \varphi \rightarrow -\infty. \quad (2.39)$$

Точка $\rho = 1$, $\theta = \pi$ является седловой точкой для решений с $\dot{\varphi} > 0$ и узловой - для решений с $\dot{\varphi} < 0$. Такое поведение фазовых траекторий в области слабой связи характерно для всех гравидилатонных моделей, вследствие универсального соотношения (12.2) для непертурбативных потенциалов.

Рассмотрим эволюцию модели, описываемую уравнениями (2.35) с верхним знаком (сплошные линии на рис.4). Все эти модели начинают свою эволюцию в области слабой связи $\varphi \ll -1$. Поле дилатона сначала возрастает и входит в область сильной связи. Из системы уравнений (2.35) следует, что

$$\dot{h} = -\frac{4}{(D-2)^2} \dot{\varphi}^2 \quad (2.40)$$

и поэтому функция $h(t)$ всегда убывает. Следовательно для рассматриваемых нами траекторий с $\dot{\varphi} > 0$ убывает также функция $h(\varphi)$. В ходе дальнейшей эволюции, в зависимости от поведения потенциала в области сильной связи, соответствующая фазовая траектория уходит в бесконечность (рис.4b) или в некоторый конечный момент времени достигает границы области (2.36) (рис.4a) (на фазовой плоскости (φ, x) этому моменту соответствует точка пересечения траекторий с осью x на рис. 1-3). После достижения указанной границы решение переходит на ветвь с нижним знаком в (2.25) (пунктирные линии на рис.4) и дилатон начинает убывать. Такие переходы между ветвями с верхним и нижним знаками происходят всякий раз, когда точка пересечения траектории с границей области (2.38) не является экстремумом потенциала. Например, в окрестности локального минимума потенциала на рис.4a с условием (2.8) происходит бесконечное число отражений от границы недоступной области, пока траектория достигнет точки минимума (соответствующая точка на плоскости (φ, x) является фокусом (см., например, рис.1)). В случае же (2.7) (рис.4b) фазовые траектории достигают этого минимума после одного отражения (на плоскости (φ, x) эта точка является узлом (рис.2a)).

До сих пор анализ фазовой картины на плоскости (φ, x) проводился в эйнштейновском представлении. Фазовые траектории в общем конформном представлении с параметром s получаются преобразованием

$$h_c = e^{f\varphi/2} \left[h \mp \frac{f}{2} (D-2) \sqrt{(D-1)h^2 - \frac{8V}{(D-2)^2}} \right] \quad (2.41)$$

где f определяется соотношением (1.3).

3. *Гравидилатонные модели с отрицательными потенциалами.* Проведенный выше анализ предполагал неотрицательную определенность дилатонного потенциала. В частности, это привело к невозможности существования смешанных плоских моделей расширения - сжатия в

фазовой плоскости (φ, \dot{h}) , где модели расширения и сжатия разделены классически недоступной областью (2.38). В этом разделе мы рассмотрим особенности моделей с потенциалами, являющиеся отрицательно определенными в некоторых интервалах значений дилатонного поля. В фазовой плоскости (φ, \dot{h}) , эти интервалы являются окнами, связывающими модели расширения и сжатия. Из (2.35) видно, что в областях с отрицательными значениями потенциала функция $h(t)$ эйнштейновского представления может обратиться в нуль, при этом $\dot{\varphi} \neq 0$. Отсюда, совместно с (2.40), получаем, что $\dot{h} < 0$ и, следовательно, в ходе дальнейшей эволюции расширение переходит на сжатие, которое уже никогда не останавливается и модель стремится к сингулярной точке. Это соответствует тому, что в конечной области фазовой плоскости (φ, \dot{h}) с отрицательным значением потенциала, динамическая система, описывающая грави-дилатонную космологическую модель, не имеет точек покоя (особых точек).

В общем конформном представлении интервалы на оси φ с отрицательными значениями потенциала связывают решения с верхним и нижним знаками в (2.1). В pre-big-bang сценариях струнной космологии [12,13] эволюция моделей состоит из двух стадий, связанных дуальными преобразованиями масштабного фактора. Первая из них (pre-big-bang) описывается верхним знаком в (2.1) и в струнном представлении представляет собой ускоренное расширение типа суперинфляции, а вторая соответствует обычным фридмановским моделям с постоянным дилатоном и описывается нижним знаком в (2.1). С учетом вышесказанного мы приходим к заключению, что необходимым условием реализации такого сценария является наличие областей с отрицательными значениями потенциала (см. также [14]). Однако это условие недостаточно для успешного выхода (graceful exit) из первой фазы во вторую. Ряд теорем типа по-го [15-17] (перейдя к струнному представлению эти теоремы можно проиллюстрировать на приведенных выше фазовых диаграммах) указывает на то, что для этого, вероятно, необходима промежуточная квантовая стадия (о квантовом подходе см. [18]).

Рассмотрим сначала простой пример квадратичного потенциала

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} M^2 (\varphi^2 - \varphi_0^2), \tag{3.1}$$

принимая отрицательные значения в интервале $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$. Картина фазовых траекторий динамической системы (2.35) для этого потенциала приведена на рис.5а, где классически недоступная область

$$h^2 < 8V / (D-1)(D-2)^2 \tag{3.2}$$

заштрихована. Сплошные (пунктирные) линии соответствуют решениям системы (2.35) с верхним (нижним) знаком. Изображен случай $\varphi_0 = 1/A$,

когда прямые $h = \pm A\sqrt{2V_0} \frac{\varphi}{D-1}$ являются точными решениями. Интервал на оси φ с отрицательными значениями потенциала связывает области с положительным (модели расширения) и отрицательным (модели сжатия) h . Рассмотрим, например, эволюцию модели, описываемую траекторией ABC на рис.5а. Эта эволюция начинается в конечный момент времени из сингулярной точки $h = +\infty, \varphi = -\infty$ в области слабой связи.

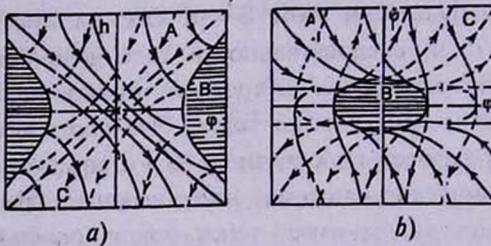


Рис.5. Фазовые картины гравитационных космологических моделей в фазовых плоскостях (а) (φ, h) и (б) $(\varphi, \dot{\varphi})$ для потенциала (3.1) с $\varphi_0 = 1/A$.

Траектория описывается решением (2.30) (верхний знак) нулевого потенциала, а временные зависимости - соотношениями (14.9) (верхний знак). В ходе эволюции функция h убывает, а дилатон входит в область сильной связи. Рост поля дилатона продолжается вплоть до точки пересечения фазовой траектории с границей области (3.2) (точка В на рис.5а). В этой точке $\dot{\varphi} = 0, dh/d\varphi = 0$ и дальнейшая эволюция описывается системой (2.35) с нижним знаком (пунктирная линия ВС). В этой стадии обе функции $\varphi(t)$ и $h(t)$ убывают и в некоторый конечный момент времени траектория пересечет ось φ в интервале $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$. В этот момент расширение сменяется на сжатие. Система переходит в область слабой связи, где вид траекторий описывается соотношением (2.39) (нижний знак, $h_0 < 0$). Модель заканчивает свою эволюцию в сингулярной точке $h \rightarrow -\infty, \varphi \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим теперь картину фазовых траекторий в плоскости (φ, x) . Для динамической системы (2.1) часть этой плоскости, определяемая неравенством

$$V(\varphi) < 0, \quad x^2 < -2e^{f\varphi}V(\varphi), \quad (3.3)$$

является классически недоступной. Как уже отмечалось выше, граница этой области является фазовой траекторией системы. Соответствующее особое решение задается соотношениями

$$x = \pm \sqrt{-2e^{f\varphi}V(\varphi)}, \quad h = -fx/2, \quad t = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{-2e^{f\varphi}V(\varphi)}}. \quad (3.4)$$

В эйнштейновском представлении для потенциала (3.1) недоступная область представляет собой внутренность эллипса и для решения (3.4)

имеем $\varphi \sim \cos Mt$. Соответствующая фазовая картина приведена на рис.5б, где сплошные линии соответствуют моделям расширения в эйнштейновском представлении (нижний знак в (2.1)), а пунктирные - моделям сжатия. Почти горизонтальные траектории представляют потенциально доминированные на бесконечности решения (2.16), для которых $\dot{\varphi} \rightarrow \mp \text{Msgn} \varphi / A$ при $\varphi \rightarrow \infty$. Рассмотрим конкретную траекторию ABC. Модель начинает свою эволюцию в области слабой связи в состоянии расширения, где уравнение траектории имеет вид (14.7) с верхним знаком. Далее функция $\dot{\varphi}$ уменьшается, а поле дилатона входит в область сильной связи, где начинают играть важное значение потенциальные члены. В некоторый конечный момент времени траектория достигает границы недоступной области (точка B на рис.5б) в касательном направлении. В точке касания $h = 0$ (эйнштейновское представление) и дальнейшая эволюция описывается траекторией BC с $h < 0$, т.е. в точке B расширение сменяется на сжатие. Эволюция заканчивается в области $\varphi \rightarrow +\infty (-\infty)$, если точка касания траектории с особым решением (3.4) находится выше (ниже) потенциально доминированных пунктирных траекторий.

Перейдем теперь к исследованию моделей с реалистическим непертурбативным дилатонным потенциалом. Конкретный вид такого потенциала зависит от механизма нарушения суперсимметрии. В качестве такого механизма мы рассмотрим конденсацию калибрино в скрытом секторе калибровочной группы [19-24]. Если N - число конденсатов, то при фиксированных значениях других модулей потенциал $V(\varphi)$ может быть представлен в виде

$$V(\varphi) = e^{2\varphi} \sum_{i=1}^N (c_i + d_i e^{-2\varphi} + e_i e^{-4\varphi}) \exp(-a_i e^{-2\varphi}), \quad (3.5)$$

где a_i, c_i, d_i, e_i - постоянные. Для двух конденсатов он имеет вид, изображенный на рис.6. В локальном минимуме значение потенциала отрицательно и $V \rightarrow -\infty$ при $\varphi \rightarrow +\infty$. На этом же рисунке приведены фазовые картины грави-дилатонных космологических моделей эйнштейновского представления на плоскостях $(\varphi, x = \dot{\varphi})$ (рис.6а) и (φ, h) (рис.6б), предварительно отображенные на единичный круг ($0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$), согласно (2.5) (с заменой $x \rightarrow h$ во втором случае). Классически недоступные области заштрихованы. Сплошные (пунктирные) линии соответствуют моделям расширения (сжатия) на рис.6а и моделям с $\dot{\varphi} > 0$ (< 0) на рис.6б. На рис.6а седловые точки A_2 и A_1 соответствуют локальным максимумам потенциала. Траектории расширения, лежащие левее сепаратрисы $B_1 A_2$, начинают свою эволюцию в некоторый конечный момент времени в точке из области слабой связи ($\varphi \rightarrow -\infty$). Здесь асимптотическое поведение имеет вид (14.7), (14.8) с верхним знаком и $f = 0$ в эйнштейновском

представлении. В ходе дальнейшей эволюции поле дилатона сначала растет, затем, достигая максимума (точка пересечения фазовой траектории

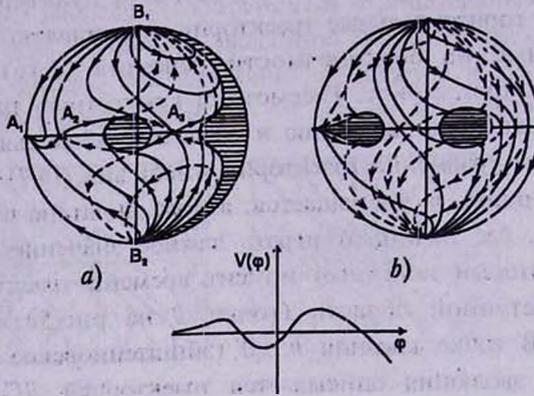


Рис.6. Фазовые картины эйнштейновского представления гравитационно-дилатонных космологических моделей для потенциала (3.5) с $N=2$ в плоскостях (a) $(\phi, \dot{\phi})$ и (b) (ϕ, h) , предварительно отображенные на единичный круг.

с осью ϕ), убывает, траектория уходит в глубь области слабой связи и стремится к точке A_1 при $t \rightarrow +\infty$. В окрестности этой точки решение описывается соотношениями (14.7) и (14.8) с нижним знаком. Для фазовых траекторий левее сепаратрисы B_2, A_2 дилатон является монотонной функцией времени. В начальной стадии эволюции $\phi \gg 1$, в конечной стадии - $\phi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Сплошные траектории левее сепаратрис B_1, A_2, B_2 являются единственными моделями, для которых пространство расширяется в ходе всей эволюции. Для остальных моделей фазовые траектории в некоторый конечный момент времени (кроме сепаратрис $B, A_2, B, A_3, i=1,2$, которые стремятся к точкам A_2 и A_3 при $t \rightarrow +\infty$) достигают границы запрещенной области. В точках касания с границей расширение сменяется на сжатие (сплошная траектория переходит в пунктирную), которое заканчивается в конечный момент времени в сингулярных точках B_1 и B_2 . На рис.6b моменту перехода расширение-сжатие соответствует точка пересечения траектории с осью ϕ . Такой переход возможен в тех интервалах оси ϕ , в которых потенциал отрицателен. Из рис.6b непосредственно видно, что все траектории, кроме указанных выше (с конечной точкой $h \rightarrow +0, \phi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$), заканчивают эволюцию в нижней точке с $h = -\infty$ и $\phi = +\infty, -\infty$, соответственно для сплошных и пунктирных траекторий. Таким образом, потенциал (3.5) с двумя конденсатами калибрино не может фиксировать поле дилатона при конечных его значениях, а, следовательно, и выход на модели Фридмана. Здесь следует отметить, что в окрестности конечной точки эволюции характерный масштаб кривизны порядка длины струны

и становятся важными поправки к низкоэнергетическому действию (12.1) с высшими производными, являющимися следующими членами разложения по параметру α' .

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства науки и высшего образования Республики Армения.

Ереванский государственный университет,
Армения

ON STRING COSMOLOGY WITH DILATON POTENTIAL. II

A.A.SAHARIAN

The investigations in string cosmology with nonperturbative dilaton potential, started in the first part, are considered. The picture of cosmological evolution for the various potentials in strong coupling region are considered by qualitative methods. The generic features of negative defined potentials are discussed. The concrete case of the nonperturbative potential induced by gaugino condensation in a hidden sector of the gauge group is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Саарян, *Астрофизика*, 40, 233, 1997.
2. А.А.Саарян, *Астрофизика*, 38, 101, 1995.
3. А.А.Саарян, *Астрофизика*, 38, 291, 1995.
4. А.А.Саарян, *Астрофизика*, 38, 447, 1995.
5. А.А.Саарян, *Астрофизика*, 39, 279, 1996.
6. Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. Наука, М., 1976.
7. О.И.Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. Наука, М., 1980.
8. В.А.Белинский, Л.П.Грицук, Я.Б.Зельдович, И.М.Халатников, Ж. Эксперим. и теор. физ. 89, 346, 1985.
9. M.C.Bento, O.Bertolami. P.M.Sa, *Phys. Lett.*, B262, 11, 1991.

10. *D.La. P.J.Steinhardt*, Phys. Rev. Lett., **62**, 376, 1989.
11. *J.D.Barrow. K.Maeda*, Nucl. Phys., **B341**, 249, 1990.
12. *M.Gasperini. G.Veneziano*, Astropart. Phys., **1**, 317, 1993.
13. *G.Veneziano*, hep-th/9510027.
14. *R.Brustein, G.Veneziano*. Phys. Lett., **B329**, 429, 1994.
15. *N.Kaloper. R.Madden. K.A.OLive*. Nucl. Phys., **B452**, 677, 1995.
16. *N.Kaloper, R.Madden. K.A.OLive*. hep-th/9510117.
17. *R.Easther, K.Maeda, D.Wands*, hep-th/9509074.
18. *M.Gasperini, J.Maharana, G.Veneziano*, prepr. CERN-TH/96-32.
19. *H.P.Nilles*, Phys. Lett., **B115**, 193, 1982.
20. *J.P.Derendinger, L.E.Ibanez. H.P.Nilles*, Phys. Lett., **B155**, 65, 1985.
21. *M.Dine. R.Rohm, N.Seiberg. E.Witten*, Phys. Lett., **B156**, 55, 1985.
22. *J.A.Casas, Z.Lalak, C.Munoz, G.G.Ross*, Nucl. Phys., **B347**, 243, 1990.
23. *P.Binetruy. M.K.Gaillard*, Phys. Lett., **B365**, 87, 1996.
24. *F.Quevedo*, hep-th/9511131.