АСТРОФИЗИКА

ТОМ 40 ФЕВРАЛЬ, 1997 ВЫПУСК 1

УДК: 524.8

ФРИДМАНОВСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ В СХЕМЕ КВАНТОВАНИЯ РЕДУЦИРОВАННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.Г.ПАЛИЙ[1], В.В.ПАПОЯН[1,2], В.Н.ПЕРВУШИН[1]

Поступила 28 июня 1996
Принята к печати 15 июля 1996

Показано, как, используя переменные действие - угол, в схеме квантования редуцированного фазового пространства сконструировать волновую функцию фридмановской Вселенной, заполненную гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов, а также найти физически наблюдаемые величины. Такой подход приводит к уравнению типа Шредингера, допускает простую интерпретацию волновой функции, и позволяет проследить связь с классической эволюцией, которая полностью воспроизводится в предложенной модели. В рамках редуцированной теории массивные фермионы описываются действием типа Намбу-Иона-Лазинио со спонтанным нарушением киральной симметрии. Предложенная схема приводит к следствиям, которые согласуются с принципом Маха и дираковской гипотезой больших чисел.

1. *Введение.* Физическая интерпретация волновой функции и соотношение между классической и квантовой моделями однородной Вселенной относятся к разряду нерешенных проблем современной космологии [1-7]. Расширение Вселенной возникает как эффект классического рассмотрения, базирующегося на точных решениях уравнений теории тяготения Эйнштейна для фридмановской космологической модели [8]. При квантовом рассмотрении волновую функцию Вселенной принято полагать удовлетворяющей уравнению Уиллера - де Витта (УдВ) [1,2] (что связывают с инвариантностью относительно репараметризации времени) и интерпретировать ее как стационарное состояние без какой-либо эволюции. Попытки согласовать такой подход с классическим приводят к серьезным осложнениям.

В недавно предложенной схеме квантования редуцированного фазового пространства (см., например, [4,5,7]) квантовая эволюция Вселенной описывается волновой функцией, удовлетворяющей уравнению типа Шредингера (вместо уравнения УдВ), с обычной вероятностной интерпретацией. Было показано, что параметр временной эволюции этого уравнения совпадает с классическим фридмановским временем для Вселенной с преобладанием вещества (пылевидная Вселенная) [5-7]. Однако величина редуцированной энергии квантовой Вселенной в [5-7] получилась равной лишь половине массы пыли, поэтому возникает естественный вопрос - как объяснить наличие другой половины массы. Проблемы возникают и при определении физически наблюдаемых величин (например, Хаббловской постоянной) в случае Вселенной с преобладанием излучения, эволюционный параметр волновой функции которой совпадает с классическим конформным временем.

Настоящая статья посвящена попыткам решения, если не всех, то по крайней мере, части перечисленных проблем. С этой целью рассматривается "полевая модель" фридмановской Вселенной, пыль и излучение в которой имитируются гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов. В соответствии с развитой ранее теорией описания систем со связями [10,11], конструируется редуцированная система, гамильтониан которой совпадает с сохраняющейся энергией. Даны определения ряда классических величин и приводится их квантование. Изложение распланировано следующим образом: в первом разделе формулируется модель, а во втором - дана постановка задачи в контексте фридмановского описания однородной Вселенной [8] и квантования УдВ, в последующих разделах к этой модели применяется общая схема редукции. Заключительный раздел отводится обсуждению физических результатов и их возможной космологической интерпретации.

2. *Полевая модель однородной Вселенной.* Принято считать, что эффекты квантовой космологии играют существенную роль лишь в первые моменты жизни Вселенной. Независимо от схемы квантования вопрос о соответствии квантовой и классической эволюции является ключевым и, к сожалению, нерешенным. Однако, как будет видно из дальнейшего, можно получить ответ на перефразированную постановку вопроса - какова квантовая версия современной фридмановской стадии эволюции Вселенной, заполненной радиацией и покоящейся пылью?

Для сравнения классического и квантового описания свойств Вселенной в качестве исходного выберем выражение для действия Эйнштейна -Гильберта, добавив к нему лагранжеву плотность свободных полей фотонов и n фермионов:

$$W=\int_0^T dt\int_{V_{(3)}} d^3x\sqrt{-g}\left[-\frac{{}^{(4)}R(g)}{16\pi G}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\sum_{i=1}^{n}\overline{\psi}_i(i\hbar\not{D}-m_i)\psi\right]. \qquad (1)$$

Для того, чтобы воспроизвести фридмановскую модель однородной Вселенной, достаточно ограничиться гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов в метрике Фридмана-Робертсона-Уолкера (ФРУ)

$$(ds)^2=g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu=a^2(t)\left[N_c^2(t)\,dt^2-(dl_c)^2\right], \qquad (2)$$

где $(dl_c)^2$ - интервал трехмерного пространства постоянной положительной кривизны со скаляром

$$^{(3)}R = \frac{6k}{r_0^2}$$

и объемом $V_{(3)}(k=+1) = \int d^3x = 2\pi^2 r_0^3$; N_c - та компонента метрики, соответствующее которой полевое уравнение воспроизводит баланс энергии. Интервал наблюдаемого расширяющегося пространства dl_F связан со статическим - dl_c, посредством космологического масштабного фактора a:

$$dl_F = a\,dl_c. \tag{3}$$

По аналогии с этим в дальнейшем будем различать два набора физических величин: "наблюдаемые" $[Q_F]$ и конформные $[Q_c]$, связанные соотношением:

$$Q_F^{(n)} = a^n Q_c^{(n)}, \tag{4}$$

где n - конформный вес $Q^{(n)}$ ($n = -3/2$ - для фермионов, $n = -1$ - для скаляров, $n = 0$ - для векторных полей). Переменная $Q_c^{(n)}$ инвариантна относительно конформных преобразований.

Таким образом, для действия (1) в метрике (2) и в терминах конформно-инвариантных полей, описывающих гармонические возбуждения, получим следующее выражение

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\overset{\bar{0}}{\psi}_{cj} i\hbar\gamma_0 \overset{\dot{0}}{\psi}_{cj} \right) - N_c a H_D \right] + \right. \tag{5}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_l \left(\frac{\dot{A}_l^2}{N_c} - \omega_l^2 A_l^2 N_c \right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}^2}{N_c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{a\dot{a}}{N_c} \right) - N_c \frac{ka^2}{r_0^2} \right]\beta \right\},$$

где β - константа

$$\beta = V_{(3)} \frac{6}{8\pi G}\bigg|_{k=1} = \frac{3\pi r_0^3}{2G} = \frac{3\pi r_0^3 M_{Pl}^2}{2}, \tag{6}$$

ω_l - мода возбуждения электромагнитного поля в трехмерном пространстве постоянной кривизны; $\overset{0}{\psi}_{cj}$ - наинизшее гармоническое возбуждение массивных фермионов в приближении

$$ma \gg \frac{1}{r_0}, \tag{7}$$

что имитирует пыль в состоянии покоя; H_D - гамильтониан свободного поля фермионов:

$$H_D = \sum_{j=1}^{n} \overset{\bar{0}}{\psi}_{cj} m_j \overset{0}{\psi}_{cj}. \tag{8}$$

Гамильтонову форму действия (5) сконструируем обычным образом [2,5]

$$W^{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi=A_l,\Psi} \pi_\Phi \dot{\Phi} - \left(\pi_a \dot{a} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\pi_a a) \right) - N_c H_{Ec} \right], \tag{9}$$

где

$$\pi_a = \frac{da}{N_c dt}\beta; \tag{10}$$

и π_Φ - канонические моменты масштабного фактора и полей соответственно; H_{Ec} - конформная эйнштейновская энергия

$$H_{Ec}(\pi_a, a, H_D, H_R) = -\left(\frac{\pi_a^2}{2b} + \frac{a^2 k}{2 r_0^2}\beta \right) + H_D a + H_R, \tag{11}$$

а H_R есть конформный гамильтониан полей излучения в пространстве с интервалом dl_c (3)

$$H_R = \frac{1}{2}\sum_l \left(\pi_l^2 + \omega_l^2 A_l^2 \right). \tag{12}$$

Уравнение для N_c

$$\frac{\delta W}{\delta N_c} = 0 \models\Longrightarrow H_{Ec}(\pi_a, a, H_D, H_R) = 0 \tag{13}$$

рассматривается как связь (констрайнт).

Классические уравнения приводят к сохранению величин H_D, H_R, определенных (8), (12)

$$\frac{d}{dt}H_D = 0; \qquad \frac{d}{dt}H_R = 0, \tag{14}$$

которые, поэтому можно выбрать совпадающими с начальными значениями

$$H = M_D; \qquad H_R = E_R \tag{15}$$

идентифицируемыми с массой пыли и энергией излучения.

3. *Постановка задачи.* Нетрудно убедиться, что уравнения (10)-(15) вместе с определением собственного времени

$$a N_c dt = dt_F, \tag{16}$$

приводят к известному фридмановскому расширению Вселенной

$$t_F(a, M_D, E_R) = \int_0^a a' da' \left[-\frac{a'^2 k}{r_0^2} + \frac{2}{\beta}\left(M_D a' + E_R \right) \right]^{-1/2}, \tag{17}$$

которое позволяет определить хаббловскую "постоянную"

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt_r} = H_{Hubble}(a, M_D, E_R). \tag{18}$$

В классической космологии время (16) (начиная с первой фридмановской работы 1992г.) рассматривается как наблюдаемое, а уравнение (17) трактуется как закон эволюции Вселенной.

С другой стороны, в расширенном фазовом пространстве квантовой теории УдВ [1-3] картина иная - волновая функция стационарна. Определяющее эту волновую функцию уравнение есть констрайнт (13), в котором импульс π_a заменен оператором:

$$\hat{\pi}_a = i\frac{d}{da}. \tag{19}$$

Напомним, что уравнение УдВ имеет вид:

$$\frac{1}{a}H_{Ec}\left(i\frac{d}{da}, a, M_D, E_R\right)\Psi_{WDW}(a, M_D, E_R) = 0. \tag{20}$$

Физическая трактовка подчиняющейся этому уравнению волновой функции является одной из неразрешенных проблем квантовой космологии и, поэтому, приходится опираться на весьма распространенное предположение, согласно которому квантовая Вселенная стационарна (не эволюционирует).

Таким образом, одно и то же действие (9) приводит к двум различным результатам:

а) в классической теории Вселенная эволюционирует (17,18);

б) в квантовой теории эволюции нет (20).

В настоящей работе предпринята попытка устранить это противоречие, чего, как нам представляется, можно достичь квантованием по иной схеме, суть которой в точном решении связей (констрайнт) (13), и в полной гамильтоновой редукции до квантования.

4. *Гамильтонова редукция.* Используемая схема гамильтоновой редукции [10,11] предполагает выбор переменных, которые максимально упрощают констрайнты. Один набор таких переменных был обнаружен в [5,7]. Существует каноническое преобразование

$$(\pi_a, a) \to (\Pi, T_r), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \pi_a &= \sqrt{2\beta\Pi}\, C_k\left(\frac{T_r}{r_0}\right) \qquad (C_{+1}(\eta) = \cos\eta,\ \ C_{-1}(\eta) = \cosh\eta,\ \ C_0 = 1), \\ a &= \sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}\Pi}\, S_k\left(\frac{T_r}{r_0}\right) \qquad (S_{+1}(\eta) = \sin\eta,\ \ S_{-1}(\eta) = \sinh\eta,\ \ S_0(\eta) = \eta), \end{aligned} \tag{22}$$

где $C(\eta)$, $S(\eta)$ удовлетворяют каноническому уравнению

$$\{\pi_a, a\}_{(\Pi, T_r)} = 1 \Longrightarrow C_k S'_k - C'_k S_k = 1, \tag{23}$$

которые приводят к примечательным следствиям:

а) линеаризации метрической части конформного эйнштейновского гамильтониана

$$\frac{\pi_a^2}{2\beta} + \frac{a^2 k}{2 r_0^2}\beta = \Pi, \tag{24}$$

б) и, обусловленном канонической структурой, "поглощении" временного поверхностного члена в действии Эйнштейна-Гильберта:

$$\pi_a \dot{a} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\pi_a a) = \Pi \dot{T}_r. \tag{25}$$

В терминах новых переменных (21) рассматриваемое действие (9) можно переписать в виде

$$W^H = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi = A_i, \Psi} \pi_\Phi \dot{\Phi} - \Pi \dot{T}_r - N_c H_{Ec} \right], \tag{26}$$

где

$$H_{Ec} = -\Pi + 2\overline{H}_D \sqrt{\Pi}\, S_k + H_R, \tag{27}$$

$$\overline{H}_D = \left(\frac{r_0^2}{2\beta}\right)^{1/2} H_D. \tag{28}$$

Нетрудно видеть, что новая переменная T_r является времениподобной в редуцированном фазовом пространстве со связью

$$H_{Ec} = 0 \Longrightarrow \sqrt{\Pi}_{(\pm)} = \overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}, \tag{29}$$

которая удовлетворяется тождественно, а величина

$$\Pi_{(\pm)} = H_{\pm}^{red} = \left(\overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}\right)^2 \tag{30}$$

выступает в роли редуцированного гамильтониана в выражении для редуцированного действия:

$$W_{(\pm)}^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi = A_i, u} \pi_\Phi \dot{\Phi} - H_{(\pm)}^{red} \dot{T}_{red} \right]. \tag{31}$$

Такой вид действия можно легко представить в терминах "редуцированного" времени

$$W_{(\pm)}^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dT_r \left[\sum_{\Phi = A_i, u} \pi_\Phi \frac{d\Phi}{dT_r} - H_{(\pm)}^{red} \right]. \tag{32}$$

$$H^{red}_{(\pm)} = H_R + 2\overline{H}_D^2 S_k^2 \pm 2\overline{H}_D S_k \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}. \tag{33}$$

Соотношение между начальным и "редуцированным" временем T_r следует из уравнения для импульса Π

$$\frac{\delta W^H}{\delta \Pi} = 0 \Longrightarrow dT_r = N_c dt\left[1 - \overline{H}_D S_k \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\right]. \tag{34}$$

Решения (29) приводят к следующим соотношениям

$$dT_{r(\pm)} = N_c dt\left[1 - \frac{\overline{H}_D S_k}{\overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}}\right], \tag{35}$$

или

$$dT_{r(\pm)} = \pm N_c\, dt \frac{\sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}}{\overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}}. \tag{36}$$

Уравнения (22), (29), (33) в параметрической форме воспроизводят классический фридмановский закон (17)

$$a_{(\pm)} T_r = \sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}}\left[\overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}\right] S_k, \tag{37}$$

$$dt_{F(\pm)} T_r = aN_c dt = \pm \frac{\sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}}\left[\overline{H}_D S_k \pm \sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}\right]^2 S_k}{\sqrt{(\overline{H}_D S_k)^2 + H_R}} dT_r, \tag{38}$$

$$S_k = S_k\left(\frac{T_r}{r_0}\right); \qquad (S_{+1}(\eta) = \sin\eta,\ \ S_{-1}(\eta) = \sinh\eta,\ \ S_0(\eta) = \eta).$$

В этих выражениях "редуцированное" время T_r выступает в роли параметра.

Рассмотрим далее детально случаи излучения $(H_D = 0)$ и пыли $(H_R = 0)$.

5. *Волновая функция радиационно-доминантной Вселенной.* Случай излучения описывается редуцированным действием (30), (31) при $H_D = 0$:

$$W^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\sum_l \pi_l \dot{A}_l - H^{red}\dot{T}_r\right] = \int_{t_1}^{t_2} dT_r\left[\sum_l \pi_l \frac{dA_l}{dT_r} - H_R\right]. \tag{39}$$

Это выражение, как и следовало ожидать, есть выражение для действия чистого излучения в полости. "Редуцированное" время T_r совпадает с конформным (35,36) $dT_r = N_c dt$, а эволюционный закон (37,38) сводится к хорошо известному фридмановскому расширению (17) для радиационно-доминантной стадии

$$a(T_r) = \sqrt{\frac{2\bar{r}_0^2}{\beta} H_R}\, S_k\left(\frac{T_r}{\bar{r}_0}\right), \tag{40}$$

$$dt_F(T_r) = \sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta} H_R}\, S_k\left(\frac{T_r}{r_0}\right) dT_r = a(T_r)\, dT_r. \tag{41}$$

Вместо волновой функции УдВ (20) мы имеем волновую функцию в редуцированном фазовом пространстве

$$\Psi_{WDW}(a, E_R) \Longrightarrow \Psi_{red}(T_r, A_l), \tag{42}$$

которая удовлетворяет уравнению типа Шредингера относительно "редуцированного" времени T_r*

$$+i\frac{d}{dT_r}\Psi_{red}(T_r, A_l) = H_R\, \hat{\Psi}_{red}(T_r, A_l). \tag{43}$$

Решение этого уравнения записывается в виде спектрального разложения

$$\Psi_{red}(T_r, A_l) = \sum_{E_R} e^{-iT_r E_R}\, \Phi_{E_R}(A_l), \tag{44}$$

где $\Phi_{E_R}(A_l)$ есть собственная функция конформного гамильтониана (12) и является произведением эрмитовских полиномов.

$$H_R(\hat{\pi}_l, A_l)\Phi_{E_R}(A_l) = E_R\, \Phi_{E_R}(A_l) \equiv E_R / E_R >, \tag{45}$$

$$E_R = E^0_{cas} + \sum\nolimits_l \omega_l\, n_l, \tag{46}$$

ω_l - энергия гармонических возбуждений, а n_l - числа заполнения; E^0_{cas} - энергия Казимира вакуумных колебаний в полости в конформном пространстве (dl_c).

В квантовом случае для каждого члена спектрального разложения (44) мы можем возвратиться к фридмановским наблюдаемым a, $E_F = E_R/a$, $t_F(a, E_R)$, (40), (41)

$$\langle E_R | \hat{a} | E_R \rangle = \sqrt{\frac{2\bar{r}_0^2}{\beta} E_R}\, S_k\left(\frac{T_r}{\bar{r}_0}\right) \equiv a(T_r, E_R), \tag{47}$$

---

* *Легко видеть, что уравнение (43) представляет квантовую версию определения классического импульса для переменной* T_r $(\pi_{(T_r)} = -H_R)$, *что следует из выражения для действия (39).*

$$\left\langle E_R \middle| t_F(T_r) \middle| E_R \right\rangle = \int_0^{T_r} a(T'_r, E_R)\, dT'_r. \qquad (48)$$

Волновую функцию Вселенной (44) можно интерпретировать достаточно просто - как волновую функцию излучения с постоянными квантовыми числами n_l, ω_l (46) в конформном пространстве dl_c с постоянным объемом.

Как в квантовом, так и в классическом случаях в наблюдаемом фридмановском времени мы имеем один и тот же закон эволюции.

6. *Вселенная с преобладанием вещества.* В случае "пылевидной" Вселенной $(H_R = 0)$, после редукции действие (33) с учетом (35,36) принимает вид, известный как действие Намбу-Иона-Лазинио [9]

$$W^{red} = \int_{T_r(t_1)}^{T_r(t_2)} dT_r \left[\sum_j \overset{0}{\bar\Psi}_{cj}\, i\gamma_0 \partial_{T_r} \overset{0}{\Psi}_{cj} - 2 S_k^2 \frac{r_0^2}{\beta} \left(\sum_j \overset{0}{\bar\Psi}_{cj} m_j \overset{0}{\Psi}_{cj} \right)^2 \right] \qquad (49)$$

и описывает динамику фермионов.

Фридмановское расширение в этом случае получается после канонических преобразований на связях (29)

$$a = 2 S_k^2 \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \overset{0}{\bar\Psi}_{cj} m_j \overset{0}{\Psi}_{cj}; \qquad S_k = S_k\left(\frac{T_r}{r_0}\right) \qquad (50)$$

и из уравнений движения для "геометрического" импульса П (38)

$$dT_F = 2\, a dT_r \equiv a dT_c; \qquad T_r = T_c/2, \qquad (51)$$

где T_c - конформное время (по определению). Эти два уравнения (50), (51) приводят к хорошо известным результатам для закрытой $(k = +1)$, открытой $(k = -1)$ и плоской $(k = 0)$ моделей:

$$\begin{aligned} a(k=+1) &= \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \left(\overset{0}{\bar\Psi}_{cj} m_j \overset{0}{\Psi}_{cj} \right) \left(1 - \cos\frac{T_c}{r_0} \right), \\ a(k=-1) &= \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \left(\overset{0}{\bar\Psi}_{cj} m_j \overset{0}{\Psi}_{cj} \right) \left(\frac{T_c}{r_0} - 1 \right), \\ a(k=0) &= \frac{1}{2\beta} \sum_j \left(\overset{0}{\bar\Psi}_{cj} m_j \overset{0}{\Psi}_{cj} \right) T_c^2, \end{aligned} \qquad (52)$$

здесь вместо массы Вселенной M_D присутствует ее динамический эквивалент. Это различие приводит к существенной выделенности фридмановского времени T_F (51) в рассматриваемой схеме редукции: T_F становится динамической величиной, в отличие от "редуцированного" времени T_r, которое является параметром.

Подстановка величин (50), (51) в действие (49) и формальная замена "редуцированного" времени на фридмановское приводит к теории свободных фермионов

$$\overset{0}{W}{}^{red} = \int\limits_{T_F(t_1)}^{T_F(t_2)} dT_F \left[\sum_j \overset{0}{\bar{\psi}}_j i\gamma_0 \partial_{T_F} \overset{0}{\psi}_j - \sum_j \overset{0}{\bar{\psi}}_j \overline{m}_j \overset{0}{\psi}_j\right], \tag{53}$$

масса которых составляет половину начальной.

$$\overline{m}_j = \frac{1}{2} m_j. \tag{54}$$

Проблема "половины массы" [5,7] прояснятся в рассматриваемой динамической модели, где фридмановское время (51) является динамической величиной, а формальный переход к этому времени изменяет динамическое содержание теории. Теория в терминах фридмановского времени (53) сильно отличается от теории, сформулированной через редуцированное время (49). Последнюю можно переписать в виде:

$$W^{red} = \int\limits_{\overset{0}{T}_F(t_1)}^{\overset{0}{T}_F(t_2)} d\overset{0}{T}_F \left[\sum_j \overset{0}{\bar{\psi}}_j i\gamma_0 \partial_{\overset{0}{T}_F} \overset{0}{\psi}_j - \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{\beta}\left(\sum_j \overset{0}{\bar{\psi}}_j \overline{m}_j \overset{0}{\psi}_j\right)^2\right], \tag{55}$$

через модифицированное (без динамического фактора) фридмановское время $\overset{0}{T}_F$:

$$d\overset{0}{T}_F = 4 S_k^2\left(\frac{T_R}{r_0}\right) dT_F. \tag{56}$$

В выражении (55) масса фермионов описывается уравнением Швингера-Дайсона (см., например, [9])

$$\overline{m}_j = m_j\left(\frac{r_0}{\beta}\right)\left[\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \sum_k m_k G_0\left(q_0|\overline{m}_k\right)\right], \tag{57}$$

где $G_0\left(q_0|\overline{m}\right)$ - функция Грина свободной терии (55)

$$G\left(q_0|\overline{m}\right) = \frac{1}{q_0\gamma_0 - \overline{m}_k + i\varepsilon} = -\left[\frac{\Lambda_{(+)}}{\overline{m}_k - q_0 - i\varepsilon} + \frac{\Lambda_{(-)}}{\overline{m}_k + q_0 - i\varepsilon}\right], \tag{58}$$

а

$$\Lambda_{(\pm)} = \frac{1(\pm)\gamma_0}{2} \tag{59}$$

проекционный оператор состояний с положительной и отрицательной энергиями.

Используя формулу $\left(q_0 \pm i\varepsilon\right) = \pm i\pi\delta\left(q_0\right) + P/q_0$, вместо (54), получим

$$\overline{m}_j = m_j \frac{r_0^2}{2\beta} M_{Tot}. \tag{60}$$

Этот результат можно трактовать как одну из версий принципа Маха; наблюдаемая масса частицы определяется массами остальных частиц во Вселенной. С другой стороны, полагая $\overline{m} = m$, для полной массы $M_{Tot} = \sum_k m_k$, получим:

$$\frac{r_0^2}{2\beta} M_{Tot} = 1 \Longrightarrow M_{Tot} = \frac{2\beta}{r_0^2} \sim 3\pi\, r_0 M_{Pl}^2 \approx 10^{80}\, m_p, \tag{61}$$

что согласуется с дираковской гипотезой больших чисел.

Для того, чтобы сконструировать квантовое состояние "пылевидной" Вселенной, для действия (53) используем разложение фермионных полей по операторам рождения (b^+, d^+) и аннигиляции (b, d) частиц (b^+, b) и античастиц (d^+, d)

$$\overset{0}{\psi}_k(\mathrm{T}) = \sum_s \left(b_k(s)\, u(s)\, e^{i\overline{m}_k T} + d_k^+(s)\, \upsilon(s)\, e^{-i\overline{m}_k T}\right), \tag{62}$$

$$\overset{0}{\overline{\psi}}_k(\mathrm{T}) = \sum_s \left(b_k^+(s)\, \overline{u}(s)\, e^{-i\overline{m}_k T} + d_k^+(s)\, \overline{\upsilon}(s)\, e^{i\overline{m}_k T}\right), \tag{63}$$

где (s) - спиновый индекс, а u, υ - четырехкомпонентные спиноры

$$\sum_s u(s)\overline{u}(s) = \frac{1+\gamma_0}{2} = \Lambda_{(+)}; \qquad \sum_s \upsilon(s)\overline{\upsilon}(s) = \frac{1-\gamma_0}{2} = \Lambda_{(-)}. \tag{64}$$

Собственные функции свободного гамильтониана $H_D = \sum_j \overset{0}{\overline{\psi}}_j m_j \overset{0}{\psi}_j$ имеют вид

$$H_D \Phi_{M_D}\left(\overset{0}{\psi}_j\right) = M_D \Phi_{M_D}\left(\overset{0}{\psi}_j\right); \qquad \Phi_{M_D}\left(\overset{0}{\psi}_j\right) = \prod_{k_{(+)}, k_{(-)}} \left(b_{k_{(+)}}^+\right)^{n_{k(+)}} \left(d_{k_{(-)}}^+\right)^{n_{k(-)}} |0> \tag{65}$$

и соответствуют следующему выражению для массы Вселенной

$$\overline{M}_D = \sum_{k_{(+)}} \overline{m}_{k_{(+)}} n_{k_{(+)}} + \sum_{k_{(-)}} \overline{m}_{k_{(-)}} n_{k_{(-)}}, \tag{66}$$

где $n_{k_\pm} = 0,1$ - числа заполнения. Обычно предполагают, что Вселенная содержит только частицы с $n_{k_{(+)}} = 1$, а $n_{k_{(-)}} = 0$, так что

$$\overline{M}_D = \sum_k \overline{m}_k n_k \le \overline{M}_{Tot} = \sum_k \overline{m}_k, \tag{67}$$

а $\overline{M}_{Tot}$ представляет максимальное значение массы Вселенной (61).

Волновую функцию "пылевидной" Вселенной можно представить в виде спектрального разложения

$$\Psi\left(T,\overset{0}{\psi}\right)=\sum_{M_D} e^{i\overline{M}_D \overset{0}{T}_F(T)}\,\Phi_{\overline{M}_D}\left(\overset{0}{\psi}\right), \qquad (68)$$

а затем для каждого члена этого разложения вычислить фридмановскую эволюцию (50)-(52)

$$\left\langle M_D\middle|a\middle|M_D\right\rangle = 2S^2\frac{r_0^2}{\beta}\overline{M}_D, \qquad (69)$$

в полном согласии с наблюдаемой классической картиной.

7. *Заключение.* В настоящей работе на базе действия Гильберта-Эйнштейна со свободными полями фотонов и массивных фермионов рассмотрена модель однородной Вселенной и сравниваются эффекты классического и квантового подходов. Классические уравнения такой модели описывают расширяющуюся фридмановскую Вселенную, заполненную пылью и радиацией, которые имитируются гармоническими возбуждениями фермионов и фотонов в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера. Для квантования этой модели применяется предложенная недавно схема гамильтоновой редукции [10,11], использующая переменные действие - угол и основанная на точном решении констрайнта энергии до квантования. Полученная редуцированная система приводит к волновой функции Вселенной, которая оказывается представленной в виде спектрального разложения (43), (68) по собственным состояниям редуцированного гамильтониана с сохраняющимися квантовыми числами. Эти состояния нормированы и допускают простую интерпретацию волновой функции каждого состояния как гармонического возбуждения в полости, погруженной в трехмерное пространство.

Наблюдаемое фридмановское время после редукции становится динамической переменной, а формальная подстановка его в редуцированное действие или в уравнения движения изменяет динамическое содержание теории, что имеет непосредственное отношение к сути обсуждаемого выше парадокса "половины массы" [5,6], который разрешается на квантовом уровне: исключение нефизических переменных при редукции действия приводит к эффективному четырехфермионному взаимодействию типа Намбу-Иона-Лазинио (аналогично тому, как в квантовой электродинамике исключение временной компоненты калибровочного поля приводит к кулоновскому взаимодействию). Масса фермионов (и, поэтому, "пыли") определяется уравнением Швингера-Дайсона и зависит от остальной массы во Вселенной - факт, который можно трактовать как одну из версий принципа Маха. В этой связи отметим также, что предположение о совпадении массы фермиона, которая получается как решение уравнения Швингера-Дайсона, с его массой, фигурирующей в исходном действии (1), приводит к результату, согласующемуся с дираковской гипотезой больших чисел.

В случае радиационно-доминантной Вселенной наблюдаемые фридмановские переменные не подходят для построения гильбертова пространства состояний с сохраняющимися квантовыми числами, поскольку наблюдаемая энергия фотонов изменяется в процессе эволюции. Как было показано, пространство состояний можно построить в конформных переменных, тогда волновая функция Вселенной будет представлена в виде спектрального разложения (43), (68) по собственным состояниям редуцированного (конформного) гамильтониана, собственными значениями которого являются конформная энергия фотонов и их числа заполнения.

Благодарности. Мы признательны С.Гогилидзе, А.Хведелидзе и Д.Младенову за критику и интересные обсуждения. В.Н.П. благодарен доктору Г.Рехенбергу за радушный прием в Гейзенберговском институте теоретической физики в Мюнхене. Ю.Г.П. и В.Н.П. благодарят РФФИ за финансовую поддержку (грант 96-01-01223).

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Россия
[2] Ереванский государственный университет, Армения

THE WAVE FUNCTION OF THE FRIEDMANN UNIVERSE IN THE REDUCED PHASE SPACE QUANTIZATION SCHEME

Yu.G.PALII, V.V.PAPOYAN, V.N.PERVUSHIN

Physical observables and wave function of the Friedmann Universe (filled by hermonic excitations of massive fermions and photons) are constructed in the reduced phase space quantization scheme by use the action-angle variables. This approach leads to the Schrödinger like equation for the wave function and gives us a possibility of a clear interpretation of the Universe wave function and its relation to the classical evolution. In the reduced theory, the massive fermions are described by the Nambu-Jona-Lasinio type action with the spontaneous chiral symmetry breaking. It was shown that the reduced scheme can have consequence of the type of the Mach principle and the Dirac hypothesis of large numbers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.A.Wheeler*, In Batelle Recontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, edited by C.DeWitt and J.A.Wheeler, Benjamin, New York, 1968.
2. *B.S.DeWitt*, Phys. Rev., 160, 1967, 1113.
3. *J.B.Hartle, S.W.Hawking*, Phys. Rev., D28, N12, 1983.
4. *C.Misner*, Phys. Rev., 186, 1969, 1319.
5. *A.Khvedelidze, V.Papoyan, V.Pervushin*, Phys. Rev., D51, 1995, 5654.
6. *V.Pervushin, T.Towmasjan*, Int. J. Mod. Phys., D4, 1995, 105-113.
7. *V.Pervushin, V.Papoyan, S.Gogilidze, A.Khvedelidze, Yu.Palii, V.Smirichinski*, Phys. Lett., B365, 1996, 35.
8. *A.Friedmann*, Z. Phys., 10, 1922, 377.
9. *M.K.Volkov*, Ann. Phys. (NY), 110, 1982, 363.
10. *S.A.Gogilidze, A.M.Khvedelidze, V.N.Pervushin*, Phys. Rev., D52, 1996, 1111.
11. *S.A.Gogilidze, A.M.Khvedelidze, V.N.Pervushin*, On Abelization of First Class Constraints. JINR Preprint E2-95-131, 1995, J. M. Phys, 37, 1996, 1760.