А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 37 АВГУСТ, 1994 ВЫПУСК 3

УДК: 524. 3—6

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ПЕРЕНОСЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В ЗВЕЗДНЫХ АТМОСФЕРАХ

С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 9 августа 1994
Принята к печати 15 августа 1994

Рассматривается нестационарный перенос излучения в линии в звездных атмосферах, моделируемых стационарной полубесконечной плоскопараллельной средой. Предполагается полное перераспределение по частоте в элементарном акте рассеяния. Считается, что задержка фотонов в среде определяется только средним временем нахождения в поглощенном состоянии. Получено явное аналитическое выражение резольвенты нестационарного интегрального уравнения переноса, представляющее собой билинейное разложение по найденным в [12] собственным функциям соответствующего стационарного уравнения переноса.

1. *Введение.* Аналитическая теория нестационарного переноса излучения, являющаяся важным разделом теоретической астрофизики, наиболее полно разработана в линейном приближении для стационарных однородных сред. Изложение результатов для этого случая можно найти в монографиях [1—3] и в обзорных статьях [4,5] (см. также сборник [6]). Статья [4] содержит обширный список работ, выполненных до 1974г. За период с 1974 по 1993гг. вышло около тридцати статей по нестационарному переносу излучения, причем почти все они посвящены монохроматическому рассеянию (см., например, [7,8]) и лишь несколько из них — переносу в линии. Из этих последних получению точных аналитических решений посвящена лишь статья [9], где рассматривалось нестационарное свечение бесконечной среды с равномерно распределенными источниками в линии.

Нестационарному переносу излучения в линии в полубесконечной плоскопараллельной среде посвящено сравнительно немного работ (см. изложение результатов в обзоре [4]), причем рассматривался лишь случай $t_2 = 0$, $t_1 \neq 0$, где t_1 и t_2 — средние времена, проводимые фотоном в поглощенном состоянии и в пути между последовательными рассеяниями соответственно. Точные аналитические решения ряда задач для этого случая найдены в явном виде в [10], где приведены, в частности, явные выражения для H–функции и резольвентной функции Φ.

В настоящей работе при тех же предложениях, что и в [10], найдено явное выражение для резольвенты нестационарного интегрального уравнения переноса. При этом используется то обстоятельство ([11], см. также [3]), что преобразование Лапласа по времени t с параметром p нестационарного решения дается соответствующим стационарным решением с заменой альбедо однократного рассеяния λ на $\lambda/(1+pt_1)$ (для рассматриваемого нами случая $t_2=0$). Для стационарной резольвенты мы берем найденное в [12] явное выражение в виде билинейного разложения по собственным функциям интегрального уравнения для полупространства. В результате удается написать общие формулы для нестационарных функций источников и интенсивности выходящего излучения при произвольном распределении первичных источников. Из этих общих формул легко получаются решения частных задач, найденные в [10] другим способом.

2. *Общие соотношения.* Будем измерять время t в единицах t_1. Основное интегральное уравнение задачи имеет вид (см., например, [4])

$$S(\tau,t)=g(\tau,t)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,d\tau'\int_{-\infty}^{t} e^{t'-t}S(\tau')\,t'dt', \tag{1}$$

где $S(\tau,t)$ — функция источников на оптической глубине в центре линии τ в момент t, $g(\tau,t)$ характеризует распределение первичных источников. Считается, что ядерная функция представима в виде

$$K(\tau)=\int_a^b e^{-\tau y}A(y)\,dy\,, \tag{2}$$

который справедлив как при монохроматическом рассеянии, так и при рассеянии в линии в предположении о полном перераспределении по частоте, причем в первом случае $a=1$, $b=\infty$, $A(y)=1/y$, а во втором $a=\beta$, $b=\infty$, $A(y)=(2A/y)\int_{f(y-\beta)}^{\infty}\alpha^2(x)\,dx$, где $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в функции безразмерной частоты $x=(\nu-\nu_0)/\Delta\nu_D$, нормируемый условием $\alpha(0)=1$, A — константа, нормирующая на 1 интеграл от профиля по частотам, β — отношение коэффициента поглощения в континууме к коэффициенту поглощения в центре линии, функция $f(t)$ определяется следующим образом: $\alpha(f(y)) = y$ при $y < 1, f(y) = 0$ при $y > 1$.

Интенсивность излучения, выходящего под углом $\arccos\mu$ на частоте x,

$$I(z,t) = (r/z) \int_0^\infty e^{-\tau/z} S(\tau,t)\, d\tau \equiv (r/z)\, \bar{S}(1/z,t) \ , \tag{3}$$

где z — частотно-угловая переменная и r — функция частоты, определяемые соотношения

$$r = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta} \ , \ z = \frac{\mu}{\alpha(x)+\beta} \ . \tag{4}$$

Обозначим через $\Gamma(\tau, \tau_1, t; \lambda)$ резольвенту уравнения (1). Тогда

$$S(\tau,t) = g(\tau,t) + \int_0^\infty d\tau' \int_{-\infty}^t \Gamma(\tau,\tau',t-t';\lambda)\, g(\tau',t')\, dt' \ , \tag{5}$$

$$I(z,t) = (r/z)\, \bar{g}(1/z,t) + (r/z) \int_0^\infty d\tau' \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}(1/z,\tau',t-t';\lambda)\, g(\tau',t')\, dt' \ , \tag{6}$$

где черта сверху обозначает преобразования Лапласа соответствующих функций по τ с параметром $1/z$.

3. *Резольвентные функции.* Согласно [11] (см. также [3]) преобразование Лапласа по времени резольвенты

$$\bar{\Gamma}(\tau,\tau_1,p;\lambda) = \Gamma(\tau,\tau_1;\lambda/(1+p)) \ , \tag{7}$$

где в правой части стоит резольвента для стационарного случая. В работе [12], посвященной изучению спектра стационарного аналога уравнения (1), показано, что этот спектр непрерывный, причем собственные числа $\lambda = 1/V(u) \in [1/V(0), \infty)$, где $V(u)$ — косинус-преобразование Фурье ядерной функции. В [12] найдены соответствующие собственные функции $s(\tau, 1/V(u))$ (см. формулу (32) в [12]) и приведено билинейное разложение (типа Гильберта—Шмидта) резольвенты по этим собственным функциям:

$$\Gamma(\tau,\tau_1;\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda V(u)}{1-\lambda V(u)}\, s(\tau,1/V(u))\, s(\tau_1,1/V(u))\, du \ , \tag{8}$$

где λ может быть произвольным комплексным числом. С учетом (8) обращенис (7) легко выполняется, и в результате находим, что

$$\Gamma(\tau,\tau_1,t;\lambda)=\frac{2\lambda}{\pi}e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t V(u)}V(u)\,s(\tau,1/V(u))\,s(\tau_1,1/V(u))\,du\ . \tag{9}$$

Для преобразования Лапласа по τ резольвенты, которое входит в выраженис для интенсивности выходящего излучения (6), из (9) имеем выраженис

$$\bar\Gamma(1/z,\ 1/z_1,t;\lambda)=$$
$$=\frac{\lambda z}{\pi}e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t V(u)}H(z,1/V(u))\,s(\tau_1,1/V(u))\sqrt{-2uV(u)V'(u)}\,du\ , \tag{10}$$

которое получается, если воспользоваться найденным в [12] соотношсниями

$$\bar s(1/z,\ 1/V(u))=s(0,1/V(u))\,z\,H(z,1/V(u))\ , \tag{11}$$

$$s(0,1/V(u))=\sqrt{-uV'(u)/[2V(u)]}\ . \tag{12}$$

В (11) входит H-функция $H(z,\lambda)$ при λ принадлежащих спсктру ($\lambda=1/V(u)$). Явное выражение H-функции на спектре получено в [10] (см. также [12]). Заметим, что при экспоненциальном убывании мощности первичных источников с глубиной $-g(\tau,t)=f(t)\,e^{-\tau/z_1}$ — в (6) войдет двумерное преобразование Лапласа резольвенты по τ и τ'.

$$\bar{\bar\Gamma}(1/z,\ 1/z_1,t;\lambda)=$$
$$=\frac{\lambda}{\pi}z\,z_1\,e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t V(u)}H(z,1/V(u))\,H(z_1,1/V(u))\,[-uV'(u)]\,du\,. \tag{13}$$

Это выражение получается из (10)—(12).

Для резольвентной функции $\Phi(\tau,t;\lambda)=\Gamma(\tau,0,t;\lambda)$ из (9) и (12) имеем

$$\Phi(\tau,t;\lambda)=\frac{\lambda}{\pi}e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t V(u)}s(\tau,1/V(u))\sqrt{-2uV(u)V'(u)}\,du\ . \tag{14}$$

а для ее преобразования Лапласа по τ с учетом (11) и (12) —

$$\bar\Phi(1/z,t;\lambda)=\frac{\lambda z}{\pi}e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t V(u)}H(z,1/V(u))\,[-uV'(u)]\,du\ , \tag{15}$$

что дает для нестационарной H–функции $H(z,t;\lambda) = \delta(t) + \bar{\Phi}(1/z,t;\lambda)$ выражение, совпадающее с найденным в [10] другим способом. Подстановка (15) в (3) дает, разумеется, явное выражение для интенсивности излучения, выходящего из среды с изотропным первичным источником в плоскости $\tau = 0$.

4. *Вероятность выхода фотона из среды.* Обозначим через $A\,\alpha(x)\,p\,(\tau,z,t)$ плотность вероятности того, что фотон, поглощенный на глубине τ в момент $t = 0$, выйдет из среды в момент t на частоте x в направлении $\arccos\mu$ (см. формулу (4) для z). Очевидно, $p\,(\tau,z,t)$ есть функция источников в среде с распределением первичных источников $g(\tau,t) = (\lambda/4\pi)\,e^{-t-\tau/z}$ при $t > 0$ и $g(\tau,t) = 0$ при $t < 0$, дает при подстановке в (5) с учетом (10)

$$p\,(\tau,z,t) = \tag{16}$$

$$= \frac{\lambda z}{2\pi^2}\,e^{-t}\int_0^\infty e^{\lambda t\,V(u)} H(z,1/V(u))\,s(\tau,1/V(u))\sqrt{-uV'(u)/(2V(u))}\;du\,.$$

При выводе (16) было также использовано условие полноты системы собственных функций

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s(\tau,1/V(u))\,s(\tau_1,1/V(u))\,du = \delta\,(\tau-\tau_1)\,. \tag{17}$$

Интенсивность выходящего излучения $I(z_1,t)$ для функции источников (16) легко находится из (6) с учетом (13) и была получена в [10] другим способом. В силу обратимости оптических явлений она представляет собой интенсивность выходящего излучения при значении частотно–угловой переменной z_1 в задаче о мгновенном освещении среды излучением при частотно–угловой переменной z.

5. *Частные распределения первичных источников.* Решения для наиболее важных частных распределений первичных источников были найдены ранее в [10]. Мы рассмотрим в качестве еще одного примера случай выключения стационарных источников в момент $t = 0$: $g(\tau,t) = g(\tau)$ при $t < 0$ и $g(\tau,t) = 0$ при $t > 0$. Тогда при $t < 0$ формулы (5) и (6) дают, как легко видеть, стационарное решение, а при $t > 0$ имеем

$$S(\tau,t) = \int_0^\infty g(\tau')\,G\,(\tau,\tau',t;\lambda)\,d\tau'\ , \tag{18}$$

$$I(z,t) = (r/z) \int_0^\infty g(\tau')\bar{G}\,(1/z,\tau',t;\lambda)\,d\tau' \,, \tag{19}$$

где функции G и $\bar{G}$ определяются формулами вида (9) и (10) с подынтегральными функциями в правых частях, деленными на $1-\lambda V(u)$.

6. *Заключение.* Следует отметить, что формулы, полученные в настоящей статье, можно использовать, разумеется, и для случая монохроматического рассеяния, если вместо (4) положить $r=1$, $z=\mu$.

Наиболее важным астрофизическим применением теории нестационарного переноса излучения являются, по–видимому, вспыхивающие звезды. Такое применение для непрерывного спектра (т.е. при монохроматическом рассеянии) сделано в работе [13]. Полученные в данной статье формулы могут быть использованы при изучении свечения вспыхивающих звезд в спектральных линиях (в частности, в линии L_α).

Благодарю Американское Астрономическое общество за материальную поддержку этой работы.

Санкт–Петербургский государственный университет

ON NONSTATIONARY RADIATIVE TRANSFER IN A SPECTRAL LINE IN STELLAR ATMOSPHERES

S.I.GRACHEV

Nonstationary line radiation transfer is considered for stellar atmospheres in the framework of stationary semiinfinite planeparallel models assuming complete frequency redistribution and supposing that the photons lifetime in the medium is due to the mean lifetime in absorbed state only. The resolvent of the integral nonstationary transfer equation is found in the form of a bilinear expansion in series of eigenfunctions (obtained in [12]) of the corresponding stationary transfer equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *K.M.Case, P.F.Zweifel*, Linear Transport Theory, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1967.

(Русск. пер.: К.Кейз, П.Цвайфель, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
3. *И.Н.Минин*, Теория переноса излучения в атмосферах планет, Наука, М., 1988.
4. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, 10, 445, 1974.
5. *В.П.Гринин*, Труды астрон. обсерв. СПбГУ, 44, 236, 1994.
6. Теория звездных спектров, Наука, М., 1966.
7. *S.Karanjai, G.Biswas*, Astrophys. and Space Sci., 164, 15, 1990.
8. *S.K.Bishnu, S.R.Das Gupta*, Astrophys. and Space Sci., 134, 261, 1987.
9. *Д.И.Нагирнер*, Вестн. ЛГУ, №7, 138, 1977.
0. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, 5, 31, 1969.
1. *И.Н.Минин*, Вестн. ЛГУ, №13, 137, 1959.
2. *Д.И.Нагирнер*, Асрофизика, 15, 229, 1979.
3. *А.К.Колесов. В.В.Соболев*, Астрон. ж. 67, 357, 1990.