

УДК: 52:531.51

О ФОРМУЛЕ ТОЛМЕНА В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

М. Р. АВАКЯН, Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

Поступила 14 февраля 1991

Принята к печати 13 марта 1991

В рамках скалярно-тензорных и скалярно-тензорно-биметрических теорий гравитации полная масса вещества и постоянного гравитационного поля выражена в виде интеграла только по пространству, завязаному материей.

1. В ОТО формула Толмена выражает полную энергию постоянно-го гравитационного поля и тяготеющих масс через интеграл от тензора энергии—импульса вещества (см., например, [1]). В данной работе аналогичная формула выведена в рамках скалярно-тензорных теорий с нулевой космологической функцией связи. В этих теориях гравитационное поле наряду с метрическим тензором g_{ik} характеризуется также скалярным полем φ . Уравнения поля имеют вид [2]

$$\varphi R^k_i = T^k_i - \frac{1}{2} \delta^k_i T + \varphi_{;i}^k + \frac{1}{2} \delta^k_i \varphi_{;n}^n + \frac{\zeta(\varphi)}{\varphi} \varphi_{;i} \varphi^{;k}, \quad (1a)$$

$$\varphi_{;n}^n = \frac{T - \zeta'(\varphi) \varphi_{;n} \varphi^{;n}}{3 + 2\zeta(\varphi)}, \quad (1b)$$

где R_{ik} — тензор Риччи пространства — времени; T_{ik} — тензор энергии — импульса гравитирующих масс; $\varphi_{;i} = \partial\varphi/\partial x^i$; $\varphi^{;n} = g^{nm} \varphi_{;m}$ и, наконец, $\zeta(\varphi)$ — априори заданная функция связи; $\zeta'(\varphi) = \partial\zeta/\partial\varphi$. Например, в известной теории Йордана-Бранса-Дикке [3–8] $\zeta(\varphi) = \text{const}$.

Нетрудно доказать равенство

$$\varphi R^0_0 - \varphi_{;0}^0 = (\sqrt{-g} \varphi g^{0i} \Gamma_{i0}^a)_{;a} / \sqrt{-g} \quad (2)$$

для постоянного гравитационного поля, когда g_{ik} и φ не зависят от времени. Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3; а

Γ_{kl}^i — символы Кристоффеля, соответствующие метрическому тензору g_{ik} . В силу (2) $\frac{0}{0}$ — компонента уравнения (1а) сводится к соотношению

$$\left[\sqrt{-g} (\varphi g^{0i} \Gamma_{i0}^{\alpha} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta}) \right]_{, \alpha} = \sqrt{-g} (T_0^0 - \frac{1}{2} T). \quad (3)$$

Интегрируя его по достаточно большому объему V и применяя теорему Гаусса, находим

$$\int_{\partial V} \sqrt{-g} (\varphi g^{0i} \Gamma_{i0}^{\alpha} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta}) dS_{\alpha} = \int_V (T_0^0 - \frac{1}{2} T) \sqrt{-g} d^3 x, \quad (4)$$

где dS_{α} — элемент поверхности ∂V . На больших расстояниях от системы [1, 2, 7, 8].

$$g_{00} = 1 - 2G_0 \frac{M}{r} + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 (1 + 2G_0 \frac{M_s}{r} + \dots), \quad (5)$$

r — расстояние от гравитирующих масс, G_0 — ньютоновская гравитационная постоянная, скорость света $c=1$, M — тяготеющая масса, M_s — «скалярная масса» (см. [9]), а φ_0 определяется равенством

$$\frac{2 + \zeta_0}{3 + 2\zeta_0} = 4\pi G_0 \varphi_0, \quad \zeta_0 = \zeta(\varphi_0). \quad (6)$$

Подставив (5) в левую часть (4), находим

$$M - M_s = \frac{1}{4\pi G_0 \varphi_0} \int (T_0^0 - \frac{1}{2} T) \sqrt{-g} d^3 x. \quad (7)$$

Таким образом, остается вычислить M_s . Преобразуя (1б) к виду

$$(\sqrt{-g} |3 + 2\zeta| \varphi_{, \alpha})_{, \alpha} = b T \sqrt{-g}, \quad b = \frac{\sqrt{|3 + 2\zeta|}}{3 + 2\zeta}, \quad (8)$$

аналогично выводу (7) убеждаемся, что

$$M_s = \frac{1}{4 + 2\zeta_0} \int \frac{b}{b_0} T \sqrt{-g} d^3 x, \quad b_0 = b(\varphi_0). \quad (9)$$

Следовательно верна формула

$$M = \frac{1}{8\pi G_0 \varphi_0} \int [2T_0^0 + \left(\frac{b}{\sqrt{|3 + 2\zeta|}} - 1 \right) T] \sqrt{-g} d^3 x, \quad (10)$$

являющаяся аналогом формулы Толмена

$$M = \int (T_0^0 - T_2^2) \sqrt{-g} d^3 x. \quad (11)$$

(10) переходит в (11) при $\xi \rightarrow \infty$, так как в этом случае скалярно-тензорные теории переходят в ОТО [6]. Когда же $\xi = \text{const}$ (теория Йордана-Бранса-Дикке)

$$M_* = \frac{1}{4 + 2\xi} \int T \sqrt{-g} d^3x, \quad M = \int \left(T_0^0 - \frac{1 + \xi}{2 + \xi} T_2^2 \right) \sqrt{-g} d^3x. \quad (12)$$

Второе из этих равенств было выведено в [10, 11] для случая сферически-симметрического гравитационного поля.

2. В [10—12] был предложен класс скалярно-тензорно-биметрических теорий (СТБТ), в которых наряду с g_{ik} и φ фигурирует также плоская фоновая метрика γ_{ik} . Уравнения поля имеют вид [12]

$$\varphi R_{ik} + \varphi_{,n} \bar{\Gamma}_{ik}^n - \varphi_{,(i} \bar{\Gamma}_{k)a}^a - \frac{\zeta(\varphi)}{\varphi} \varphi_{,i} \varphi_{,k} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T, \quad (13a)$$

$$2\zeta \varphi_{;n}^n + \left(\zeta' - \frac{\zeta}{\varphi} \right) \varphi_{,n} \varphi^{,n} + \varphi g^{ik} \left(\bar{\Gamma}_{in}^i \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{ln}^n \right) = 0, \quad (13b)$$

где $\bar{\Gamma}_{ik}^i = \Gamma_{ik}^i - \tilde{\Gamma}_{ik}^i$ — тензор аффинной деформации, $\tilde{\Gamma}_{ik}^i$ — символы Кристоффеля, соответствующие метрике γ_{ik} , а взятые в круглые скобки индексы i, k означают симметризацию соответствующего выражения. Для постоянного гравитационного поля из (13a) следует соотношение

$$\int_{\partial V} \sqrt{-g} \varphi g^{0i} \Gamma_{00}^i dS_0 = \int_V \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) \sqrt{-g} d^3x \quad (14)$$

(ср. с (4)) в системе координат с $\tilde{\Gamma}_{00}^0 = 0$. Такие координаты получают-ся преобразованием

$$t = \bar{t}, \quad x^* = f^a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (15)$$

(f^a произвольные функции) из координат, соответствующих интервалу

$$ds_0^2 = \gamma_{ik} d\bar{x}^i d\bar{x}^k = \frac{1}{c_0} d\bar{t}^2 - \frac{1}{c_1} (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2), \quad (16)$$

поскольку в этом случае $\tilde{\Gamma}_{00}^0$ преобразуются как компоненты тензора; c_0, c_1 — космологические коэффициенты связи [2]. Подставив в (14) разложения (5) и учитывая соотношение

$$\varphi_0 = 1/8\pi G_0 \quad (17)$$

справедливое в СТБТ [10—12], для тяготеющей массы получим (11). Следовательно в СТБТ формула Толмена имеет тот же вид, что и в

ОТО. Для случая сферически-симметрического гравитационного поля и $\xi = \text{const}$ этот результат был получен в [10, 11].

В случае $\xi(\varphi) = \text{const}$ из (13) следует уравнение [10]

$$\{V \sqrt{-g} [2\xi \varphi_{,n} - \varphi (g^{ik} \bar{\Gamma}_{ik}^n - g^{ni} \bar{\Gamma}_{ik}^k)]\}_{,n} = V \sqrt{-g} T, \quad (18)$$

которое по аналогии с (8) позволяет определить M_0 . Для этого кроме (5) необходимо иметь также соответствующее разложение для $g_{\alpha\beta}$. В системе координат (16) из общих соображений имеем

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \left(1 + 2G_0 \frac{M_1}{r}\right) + 2G_0 \frac{M_2}{r} n_\alpha n_\beta + \dots, \quad (19)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, M_1 и M_2 — некоторые постоянные с размерностью массы, а $n_\alpha = x^\alpha/r$ (здесь и далее черту над x^α мы опускаем). После этого из пространственной части (13а), в первом исчезающем порядке по $g_{\alpha\beta}$ находим

$$M_1 = M + M_2. \quad (20)$$

Наконец, из уравнения [13, 14]

$$(\varphi_{,n} \bar{g}_{i,k}^{in} - \varphi_{,k} \bar{g}_{i,n}^{in})_{,i} = 0, \quad (21)$$

которое является следствием (13), определяем $M_2 = 0$. В (21) вертикальная черта означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрике γ_{ik} (совпадает с частной производной в случае (16)).

$\bar{g}_{ik} = g_{ik} V \sqrt{-g}$. Таким образом,

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \left(1 + 2G_0 \frac{M}{r}\right) + \dots \quad (22)$$

на больших расстояниях от гравитирующих масс. Теперь остается проинтегрировать (18) по объему V с учетом (5) и (22). В результате

$$M + 2M_2 = \int V \sqrt{-g} T d^3 x \quad (23)$$

и поэтому

$$M_2 = \frac{1}{2} \int T_\alpha^\alpha V \sqrt{-g} d^3 x. \quad (24)$$

В [10, 11] формула для $\xi M_0/M$ была выведена в случае сферически-симметрического гравитационного поля.

3. Формула Толмена (11) применима для класса метрик с $g_{00}(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, и поэтому не инвариантна относительно преобразования времени

$$t \rightarrow st, \quad (25)$$

где s — некоторая постоянная. Однако простой модификацией выкладок в рамках ОТО можно вывести модифицированную формулу

$$M = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(\infty)}} \int (T_0^0 - T_a^a) \sqrt{-g} d^3x, \quad (26)$$

совместимую с преобразованием (25). В [15] получено соответствующее выражение в частном случае сферически-симметрического гравитационного поля с интервалом

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (27)$$

и калибровкой

$$\nu(\infty) = \nu(a) + \lambda(a), \quad (28)$$

a — радиус небесного тела.

В вышеприведенных формулах для M и M_s скалярно-тензорных теорий и СТБТ также следует добавить множитель $1/\sqrt{g_{00}(\infty)}$ аналогично (26).

Ереванский государственный
университет

Институт прикладных проблем
физики АН Армении

ON TOLMAN MASS FORMULA IN THE SCALAR-TENSOR THEORIES OF GRAVITATION

M. R. AVAKIAN, L. SH. GRIGORIAN, A. A. SAHARIAN

In the framework of scalar-tensor and scalar-tensor-bimetric theories of gravitation the total mass of the matter and of the constant gravitational field is expressed in the form of an integral over the volume occupied by the matter.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1973.
2. К. Уилл, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М., 1985.
3. P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, Friedr. Vieweg and Sohn, 1955.
4. P. Jordan, *Z. Phys.*, 157, 112, 1959.
5. C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
6. Г. С. Саакян, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
7. С. Вайнберг, Гравитация и космология, Мир, М., 1975.
8. Ч. Мишнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, Мир, М., 1977.
9. S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, 25, 167, 1972.
10. Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян, *Астрофизика*, 31, 359, 1989.
11. L. Sh. Grigorian, A. A. Sahartan, *Astrophys. and Space Sci.*, 167, 271, 1990.
12. А. А. Саарян, Л. Ш. Григорян, *Астрофизика*, 32, 491, 1990.
13. А. А. Саарян, Л. Ш. Григорян, *Астрофизика*, 33, 107, 1990.
14. L. Sh. Grigorian, A. A. Sahartan, *Astrophys. and Space Sci.*, 180, 39, 1991.
15. J. Devitt, P. S. Florides, *Gen. Rel. Grav.*, 21, 585, 1989.