ՀԱՅԿ ՔԱՄԱԼՅԱՆ
ՀՊՏՀ բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոնի ասիստենտ,
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու

ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՄԲ՝ «ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ» ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ՇՐՋԱՆԱԿՈՒՄ

Աշխատանքը նվիրված է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցյալի կիրառությանը որոշ տնտեսագիտական խնդիրների լուծման համար: Բերված են օրինակներ, որոնք վերաբերում են շահույթի ֆունկցիայի, եկամտի ֆունկցիայի մաքսիմումի, միջին ծախսի մաքսիմումի և պահանջարկի առաձգականության խնդիրներին:

Հիմնաբառեր. *ֆունկցիայի ածանցյալ, ծախսի ֆունկցիա, եկամտի ֆունկցիա, շահույթի ֆունկցիա, պահանջարկի ֆունկցիայի առաձգականություն*
JEL: C02, C20

Ֆունկցիայի ածանցյալի գաղափարը մեծ նշանակություն ունի գիտության տարբեր ճյուղերում, մասնավորապես՝ տնտեսագիտության մեջ: «Բարձրագույն մաթեմատիկա» դասընթացի նպատակը ապագա տնտեսագետին ծանոթացնելն է որոշակի մաթեմատիկական դրույթների, որոնց շարքում իր ուրույն տեղն ունի ֆունկցիայի ածանցյալի գաղափարը:

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է որևէ X միջակայքում, և $x_0 \in X$: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները՝ $\Delta x=x-x_0$ (արգումենտի աճ), $\Delta y=\Delta f=f(x+x_0)-f(x_0)$ (ֆունկցիայի աճ):

Դիտարկենք հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}:$$

Սահմանում 1: Եթե գոյություն ունի (վերջավոր կամ անվերջ) դիտարկվող սահման, ապա այն կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակվում է $f'(x_0)$ սիմվոլով՝

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x},$$

կամ

$$f'(x_0) = lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}:$$ [1]

Ինչպես գիտենք, ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը և էքստրեմումները գտնելու խնդիրը ուսումնասիրվում է ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով: Ձևակերպենք էքստրեմումներ գտնելու առաջին և երկրորդ կանոնները:

Էքստրեմումներ գտնելու առաջին կանոնը[2]**:**

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (ունի վերջավոր ածանցյալ) $(x_0–\delta, x_0+\delta)$ միջակայքերում, իսկ x_0 կետում անընդհատ է: Այդ դեպքում՝

1. Եթե $f'(x_0)>0,$ եթե $x \in (x_0–\delta, x_0)$ և $f'(x_0)<0,$ $x \in (x_0, x_0+\delta),$ ապա x_0 կետը մաքսիմումի կետ է:
2. Եթե $f'(x_0)<0,$ եթե $x \in (x_0–\delta, x_0)$ և $f'(x_0)>0,$ $x \in (x_0, x_0+\delta),$ ապա x_0 կետը մինիմումի կետ է:
3. Եթե $f'(x_0)$-ը նշանը չի փոխում $(x_0–\delta, x_0)$ և $(x_0, x_0+\delta)$ միջակայքերում, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Էքստրեմումներ գտնելու երկրորդ կանոնը[3]**:**

Դիցուք՝ $f'(x_0)=0,$ և x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում՝

1. Եթե $f''(x_0)>0$, ապա x_0 կետը մաքսիմումի կետ է:
2. Եթե $f''(x_0)<0$, ապա x_0 կետը մինիմումի կետ է:

Այժմ ներմուծենք որոշ տնտեսագիտական դրույթներ:

Սահմանում 2: Դիցուք՝ $C(x)$ ֆունկցիան x միավոր ապրանք արտադրելու ծախսի ֆունկցիան է: Այդ դեպքում $C'(x_0)$-ն կներկայացնի x_0 միավոր ապրանք արտադրելու սահմանային ծախսը: Սահմանային ծախսի ֆունկցիան մոտավորապես հավասար է մեկ միավոր լրացուցիչ ապրանք արտադրելու ծախսին.

$$C'(x_0) \approx C(x_0+1) – C(x_0)$$[4]:

Սահմանում 3: Դիցուք՝ $R(x)$ ֆունկցիան x միավոր ապրանք արտադրելու պարագայում ստացված եկամտի ֆունկցիան է: Այդ դեպքում $R'(x_0)$-ն կներկայացնի x_0 միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում սահմանային եկամուտը: Սահմանային եկամտի ֆունկցիան մոտավորապես հավասար է մեկ միավոր լրացուցիչ ապրանք արտադրելու եկամտին՝

$$R'(x_0) \approx R(x_0+1)-R(x_0)$$[5]:

---

[1] Տե՛ս **Վ.Խ. Մուսոյան,** Մաթեմատիկական անալիզ, մաս 1, Ե., 2009, էջ 93:
[2] Տե՛ս նույն տեղը., էջ 124:
[3] Տե՛ս նույն տեղը., էջ 125:
[4] Տե՛ս **Hoffman L.D., Bradley G.L.,** Calculus for Bussines, Economics and Social and Life Scineces, McGraHill 2010, էջ 156:

Սահմանում 4: Դիցուք՝ $P(x)$ ֆունկցիան x միավոր ապրանք արտադրելու պարագայում ստացված շահույթի ֆունկցիան է: Այդ դեպքում $P'(x_0)$-ն կներկայացնի x_0 միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում սահմանային շահույթը: Սահմանային շահույթի ֆունկցիան մոտավորապես հավասար է մեկ միավոր լրացուցիչ ապրանք արտադրելու շահույթին՝

$P'(x_0) \approx P(x_0+1)-P(x_0)$[6]:

Օրինակ 1. Ենթադրենք՝ արտադրողը հաշվարկել է, որ x միավոր ապրանք արտադրելու համար ծախսի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝ $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 7x + 65$, և այդ նույն քանակով արտադրելու դեպքում գինը կլինի՝ $p(x) = \frac{1}{2}(100 + x)$:

Պահանջվում է գտնել սահմանային ծախսի և սահմանային եկամտի ֆունկցիաները, 10-րդ միավոր ապրանք արտադրելու ծախսը և եկամուտը:

Սահմանային ծախսի ֆունկցիան գտնելու համար ածանցենք $C(x)$ ֆունկցիան՝

$$C'(x) = \frac{1}{2}x + 7:$$

10-րդ միավոր ապրանքի սահմանային ծախսը 9 միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում մեկ միավոր լրացուցիչ ապրանք արտադրելու սահմանային ծախսն է: Հաշվենք՝

$$C'(9) = \frac{9}{2} + 7 = 11.5,$$

որը կներկայացնի 10-րդ միավոր ապրանք արտադրելու սահմանային ծախսը:

Կազմենք եկամտի ֆունկցիան՝

$$R(x)2xp(x) = \frac{1}{2}x(100 + x) = \frac{1}{2}x^2 + 50x:$$

Սահմանային եկամտի ֆունկցիան կազմելու համար ածանցենք եկամտի ֆունկցիան՝

$$R'(x) = x + 50:$$

Ճիշտ նույն դատողություններով, ինչպես սահմանային ծախսի դեպքում, 10-րդ միավոր ապրանք արտադրելու սահմանային եկամուտը կհաշվենք հետևյալ կերպ՝

$$R'(9)=59:$$

Օրինակ 2. Ենթադրենք՝ արտադրողը հաշվարկել է, որ x միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում շահույթի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 15x^2 - 200x - 300:$$

Պահանջվում է գտնել՝

1. սահմանային շահույթի ֆունկցիան,
2. սահմանային շահույթը՝ $x=15$ և $x=25$ արժեքների դեպքում:

Ածանցենք սահմանային շահույթի ֆունկցիան՝

$$P'(x) = -x^2 + 30x - 200:$$

[5] Տե՛ս **Hoffman L.D., Bradley G.L.,** Calculus for Bussines, Economics and Social and Life Sciences, McGraHill, 2010, էջ 157:

[6] Տե՛ս նույն տեղը:

Վերջինը կլինի սահմանային շահույթի ֆունկցիան:

Ածանցյալի մեջ տեղադրելով $x=10$՝ կստանանք $P'(15)=25>0$: Ստացանք, որ սահմանային շահույթը դրական է, ինչը կնշանակի, որ 16-րդ միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում շահույթը կաճի 25 միավորով: Ճիշտ նույն կերպ $P'(25)=-75<0$, ինչը կնշանակի 26-րդ միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում շահույթը կնվազի 75 միավորով:

Այժմ անդրադառնանք այնպիսի հարցերի, որոնք վերաբերում են եկամտի, շահույթի մաքսիմալացմանը և ծախսի ֆունկցիայի մինիմալացմանը: Դիտարկենք հետևյալ օրինակները.

Օրինակ 3. Ենթադրենք՝ արտադրողը հաշվարկել է, որ x միավոր ապրանք արտադրելու համար ծախսի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝ $C(x)=\frac{1}{2}x^2+x+65$, և այդ նույն քանակով արտադրելու դեպքում գինը կլինի $p(x)=50-3x$: Պահանջվում է գտնել արտադրանքի այն միավորը, որի պարագայում կլինի մաքսիմալ շահույթ:

Ինչպես գիտենք, շահույթի ֆունկցիան կներկայացնի հետևյալ առնչությունը՝

$$P(x)=R(x)-C(x),$$

որտեղ՝

$$R(x)=xp(x):$$

Կազմենք շահույթի ֆունկցիան՝

$$P(x)=-\frac{7}{2}x^2+45x-65$$

և ածանցենք այն՝

$$P'(x)=-7x+49:$$

Կստանանք, որ $P'(x)=0$, երբ $x=7$: Օգտվելով էքստրեմում գտնելու երկրորդ կանոնից՝ կստանաք $P''(7)=-7<0$: Վերջինս նշանակում է, որ $x=7$-ը մաքսիմումի կետ է:

Օրինակ 4. Ենթադրենք՝ արտադրողը հաշվարկել է, որ x միավոր ապրանք արտադրելու համար ծախսի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝ $C(x)=2x^2+70x+32$: Պետք է պարզել, որ միավոր արժեքի դեպքում միջին ծախսը կլինի մինիմալ:

Միջին ծախսի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$A(x)=\frac{C(x)}{x}=2x+70+\frac{32}{x}:$$

Գտնենք միջին ծախսի ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$A'(x)=2-\frac{32}{x^2}:$$

Կստանանք, որ $A'(x)=0,$ երբ $x=4$: Հաշվենք միջին ծախսի ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը և տեղադրենք $x=4$:

$$A'(4)=\frac{64}{4^3}=1>0:$$

Ստացանք, որ միջին ծախսը 4 միավոր ապրանք արտադրելու դեպքում կլինի մինիմալ:

Տնտեսագիտության մեջ կարևոր դեր է խաղում պահանջարկի ֆունկցիայի առաձգականության գաղափարը: Ներմուծենք պահանջարկի առաձգականության գաղափարը:

Սահմանում 5: Ենթադրենք՝ ապրանքի x միավոր գնի պարագայում պահանջարկի ֆունկցիան $D(x)$-ն է: Դիտարկենք հետևյալ առնչությունը՝

$$E(x) = \frac{x}{D(x)} \frac{dD(x)}{dx},$$

որը կանվանենք «պահանջարկի առաձգականություն»:

Առաձգականությունը ցույց է տալիս, թե ապրանքի մեկ տոկոս աճին համապատասխան մոտավորապես քանի տոկոսով կփոփոխվի պահանջարկը[7]:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

Օրինակ 5. Ենթադրենք՝ ապրանքի x միավոր գնի պարագայում պահանջարկի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$D(x)=360-4x: (0 \leq x \leq 90):$$

Պահանջվում է՝

1. Գտնել պահանջարկի առաձգականության ֆունկցիան:
2. Հաշվել առաձգականությունը $x=40$ միավոր գնի դեպքում և մեկնաբանել այն:

1. Կազմենք հետևյալ առնչությունը՝

$$E(x) = \frac{x}{D(x)} \frac{dD(x)}{dx} = \frac{x}{360-4x} \frac{d(360-4x)}{dx} = \frac{-4x}{360-4x}:$$

Ստացված ֆունկցիան կներկայացնի պահանջարկի առաձգականության ֆունկցիան:

2. Հաշվել առաձգականությունը x=40 միավոր գնի դեպքում՝

$$E(40)=-0.8:$$

Ստացանք, որ պահանջարկի առաձգականության ֆունկցիան հավասար է –0.8-ի, ինչը նշանակում է, որ ապրանքի գնի 10% բարձրացման դեպքում պահանջարկը կնվազի մոտավորապես 8%-ով:

Այժմ դիտարկենք պահանջարկի առաձգականության հետ կապված հետևյալ գաղափարները:

Ենթադրենք՝ ապրանքի x միավոր գնի պարագայում պահանջարկի ֆունկցիան $D(x)$-ն է: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. Եթե $|E(x)|>1$, ապա կասենք, որ պահանջարկը առաձգական է: Պահանջարկի առաձգականություն նշանակում է, որ գնի բարձրացման դեպքում պահանջարկը տոկոսային առումով ավելի շատ կնվազի, քան այդ գնի տոկոսային աճն է:
2. Եթե $|E(x)|<1$, ապա կասենք, որ պահանջարկը ոչ առաձգական է: Պահանջարկի ոչ առաձգականություն նշանակում է, որ գնի բարձրացման դեպքում պահանջարկը տոկոսային առումով ավելի քիչ կնվազի, քան այդ գնի տոկոսային աճն է:
3. Եթե $|E(x)|=1$, ապա կասենք, որ պահանջարկը միավոր առաձգական է:

Պահանջարկի միավոր առաձգականություն նշանակում է, որ գինը ինչ տոկով աճի, պահանջարկը մոտավորապես նույն տոկոսով կնվազի[8]:

Պահանջարկի առաձգականությունը սերտ կապ ունի շահույթի ֆունկցիայի հետ: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. Եթե առաջարկի ֆունկցիան առաձգական է $(|E(x)|>1)$, ապա գինը բարձրացնելուց հետո շահույթը կնվազի:

---

[7] Տե՛ս **Hoffman L.D., Bradley G.L.,** Calculus for Bussines, Economics and Social and Life Sciences, McGraHill, 2010, էջ 249:

[8] Տե՛ս նույն տեղը, էջ 251:

2. Եթե առաջարկի ֆունկցիան ոչ առաձգական է *(|E(x)|<1)*, ապա գինը բարձրացնելուց հետո շահույթը կաճի:
3. Եթե առաջարկի ֆունկցիան միավոր առաձգական է *(|E(x)|=1)*, ապա գնի բարձրացումը շահույթի վրա գրեթե չի ազդի[9]:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը, որը վերաբերում է պահանջարկի ֆունկցիայի առաձգականության բնույթին:

Օրինակ 5. Ենթադրենք՝ ապրանքի x միավոր գնի պարագայում պահանջարկի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$D(x) = 1200 - x^2: \ (0 \le x \le \sqrt{1200}):$$

Պահանջվում է պարզել, թե ֆունկցիան երբ է առաձգական, ոչ առաձգական, միավոր առաձգական, և այդ դեպքերում ինչ ազդեցություն է լինում շահույթի ֆունկցիայի վրա:

Կազմենք պահանջարկի առաձգականության ֆունկցիան՝

$$E(x) = \frac{x}{D(x)}\frac{dD(x)}{dx} = \frac{x}{1200 - x^2}\frac{d(1200 - x^2)}{dx} = \frac{-2x^2}{1200 - x^2}:$$

Պահանջարկի առաձգականության բնույթը պարզելու համար պահանջարկի առաձգականության ֆունկցիայի մոդուլը հավասարեցնենք 1-ի:

$$\left|\frac{-2x^2}{1200 - x^2}\right| = 1:$$

Ձևափոխենք՝

$$\frac{2x^2}{1200 - x^2} - 1 = 0:$$

Կստանանք, որ՝

$$\frac{2x^3 - 1200}{1200 - x^2} = 0:$$

Լուծելով ստացված հավասարումը՝ կստանանք, որ $x=20$:

Դիտարկենք հետևյալ ենթադեպքերը.

1. Երբ $x=20$ պահանջարկի ֆունկցիան միավոր առաձգական է: Այս դեպքում շահույթի ֆունկցիան մնում է գրեթե նույնը:
2. Երբ $0 \le x < 20$, ապա $|E(x)|<1$, այսինքն՝ պահանջարկի ֆունկցիան առաձգական է: Այս պարագայում գինը բարձրացնելուց շահույթի ֆունկցիան կնվազի:
3. Երբ $20 < x < 20\sqrt{3}$, ապա $|E(x)|>1$, այսինքն՝ պահանջարկի ֆունկցիան ոչ առաձգական է: Այս պարագայում գինը բարձրացնելուց շահույթի ֆունկցիան կնվազի:

«Բարձրագույն մաթեմատիկա» դասընթացի դասավանդման ժամանակ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցյալը ուսումնասիրելիս կարևոր է ունկնդրին նյութը խիստ մաթեմատիկական ապացույցներով մատուցելը: Գործնական դասաժամերին մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցման տեխնիկային ծանոթացնելուց հետո օգտակար կլինի ներկայացնել այնպիսի խնդիրներ, ինչպիսիք դիտարկված են այս աշխատանքում: Այս բնույթի խնդիրները կարող են խթանել ապագա տնտեսագետի հետաքրքրությունը՝ առավել նպատակադրված սովորելու «Բարձրագույն մաթեմատիկա» դասընթացը, քանի որ տնտեսագիտական որոշ խնդիրների լուծման համար օգտագործվում են մաթեմատիկական մեթոդներ:

---

[9] Տե՛ս **Hoffman L.D., Bradley G.L.,** Calculus for Bussines, Economics and Social and Life Sciences, McGraHill, 2010, էջ 252:

Օգտագործված գրականություն

1. Մուսոյան Վ.Խ., Մաթեմատիկական անալիզ, մաս 1, Եր., 2009:
2. Գևորգյան Գ.Գ. և ուրիշներ, Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք, Եր., 2014:
3. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, том (2), 2001.
4. Hoffman L.D., Bradley G.L., Calculus for Bussines, Economics, and Social and Life Sciences, McGraHill, 2010.

ГАИК КАМАЛЯН
Ассистент кафедры высшей математики АГЭУ,
кандидат физико-математических наук

Методы решения некоторых задач экономического характера с применением производной одной переменной в рамках курса высшей математики.– Работа посвящена использованию производной функции одной переменной некоторых экономических проблем. В работе приведены примеры касающиеся задач функции прибыли, максимума функции дохода, минимума средних затрат и эластичности спроса.

Ключевые слова: *производный функции, функция стоимости, функция дохода, функция прибыли, эластичность спроса.*
JEL: C02, C20

HAYK KAMALYAN
Assistant Professor at the Chair of Higher Mathematics,
PhD of Mathematics

Methods of Solving Some Economic Problems by Using One Variable Derivative in the Course of Higher Mathematics.–
The paper touches upon the application of one variable function derivative for solving some economic problems. The work provides examples referring to the problems related to profit function, revenue function maximum, average cost minimum and demand elasticity.

Key words: *derivative of a function, cost function, revenue function, profit function, elasticity of demand.*
JEL: C02, C20