АСТРОФИЗИКА

ТОМ 33 АВГУСТ, 1990 ВЫПУСК 1

УДК: 52:53

ГРУШЕВИДНЫЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ С ВНУТРЕННИМИ ТЕЧЕНИЯМИ. II. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 27 июня 1989
Принята к печати 25 февраля 1990

Предложен новый метод исследования бифуркации грушевидных фигур равновесия от S-эллипсоидов Римана, основанный на принципе смежных течений в гидродинамике. Установлено, что при бифуркации: а) двумерное поле скоростей, линейное по координатам, переходит в нелинейное и трехмерное; б) однокомпонентный вектор завихренности, не зависящий от координат, переходит в двухкомпонентный вектор, величина и направление которого уже изменяются от точки к точке (исключением является случай, когда в инерциальной системе отсчета завихренность равна нулю). Ряды грушевидных фигур с внутренними течениями прослеживаются развитым методом только до членов, бесконечно близких к исходным S-эллипсоидам. Найдены все характеристики грушевидных фигур. Попутно мы обращаем внимание на ряд ошибок в исследованиях по данной теме у предыдущих авторов.

1. *Введение.* К тому, что сказано во введении к первой части нашей работы [1], добавим следующее.

Ниже исследуются фигуры равновесия, полученные при деформации поверхности S-эллипсоида Римана в замкнутую поверхность третьего порядка. Некоторые стороны интересующей нас задачи ранее рассматривались в [2] и [3]. Однако в статье [2] японские авторы, пытаясь численными методами с применением ЭВМ рассчитать некоторые последовательности неэллипсоидальных фигур равновесия с внутренними течениями, встали на ошибочный путь. И вот почему. Не исследуя сложных вопросов перехода от трехосных эллипсоидов Римана к гантелеобразным конфигурациям, они в [2] без всякого обоснования внутреннее поле скоростей в последних полагают двумерным, а завихренность его—однородной. Но, с нашей точки зрения, в том то и дело, что *при бифуркации S-эллипсоидов Римана в неэллипсоидальные фигуры поле скоростей из двумерного становится трехмерным, а завихренность этого поля, как правило, теряет свойство однородности!* Вопрос проясняется нами путем анализа деформации эллипсоида с помощью лагранжева смещения. Как оказывается, внутри заданной поверхности третьего порядка внутреннее поле скоростей имеет еще несколько степеней свободы, за счет чего и осуществляется изгиб тех плоскостей, в которых лежат линии тока.

В монографии [3] методом вариации вириальных уравнений вычислены нейтральные точки для третьих гармоник (на последовательности Якоби, стр. 124—127; на последовательностях S-эллипсоидов, разд. 50). Но на более общий вопрос, существуют ли сами грушевидные фигуры равновесия с внутренними течениями, в [3] ответа нет. Чандрасекар в подразделе 40а имел намерение вычислить точку бифуркации на последовательности Якоби и другим методом, не прибегая к вириальным уравнениям третьего порядка. Развитый им прямой метод основан на использовании непосредственно уравнений гидродинамики. Но нами обнаружено несколько упущений и неточностей у знаменитого автора. Так, при вычислении выражения для вариации гравитационного потенциала (стр. 130, формула 52) пропущено два члена*. Указанные члены отсутствуют и в итоговой формуле (55) на стр. 131**. Это отчасти исказило дальнейший ход рассуждений в [3]. Речь идет о следующем. В силу соленоидальности лагранжева смещения $\vec{\xi}(\vec{x})$ с компонентами

$$\xi_1 = S_0 + S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2; \quad \xi_2 = -2S_1 x_1 x_2; \quad \xi_3 = 0, \qquad (1)$$

которым эллипсоид Якоби деформируется в грушевидную фигуру, соответствующая вариация гравитационного потенциала $\delta\varphi$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

---

* А именно, член $2A_{112}\cdot a_1^2\cdot a_2^2\cdot x_1^3$ и член $2A_{123}\cdot a_1^2\cdot a_2^2\cdot x_1\cdot x_3^2$.

** Ошибка замаскирована тем обстоятельством, что она не влияет на интересующий Чандрасекара результат вычисления отношений полуосей бифуркационного эллипсоида Якоби (см. стр. 131). Это нетривиальное обстоятельство объясняется тем, что случай нахождения точки бифуркации на последовательности фигур относительного равновесия в некотором смысле, на фоне общего случая S-эллипсоидов с внутренними течениями, является вырожденным. Вырожденность проявляется в том, что на последовательности фигур относительного равновесия расположение искомой точки бифуркации вообще не зависит от того, входит или нет в лагранжево смещение величина S_1. Мы убедились в этом на примере двумерных конфигураций [1]; заменив при $\lambda=0$ в системе уравнений (62) не играющее теперь роли последнее уравнение на условие сохранения центра инерции

$$4S_0 + S_1 a_1^2 + S_2 a_2^2 = 0$$

и положив в новой системе $S_1=0$, после решения любой (I) пары уравнений неизменно приходим к одному и тому же значению $n = 1/3$. Но из [1] известно: $n = 1/3$ получается и при $S_1 \neq 0$. Теперь ясно: так как пропущенные Чандрасекаром члены должны умножаться именно на S_1, то при $S_1 = 0$ ошибка и не могла повлиять на результат расчетов.

$$\nabla^2 \delta\varphi = 0. \tag{2}$$

Но если мы вычислим лапласиан от чандрасекарского выражения вариации потенциала (компоненты вариации на стр. 130 в формулах (50) и (52)—(54)), то после тождественных преобразований получим выражение

$$\nabla^2 \delta\varphi = -4\pi\, G\rho\, x_1\, a_1^2 \cdot S_1 (A_{123} + 3A_{112}), \tag{3}$$

из которого следует, что для удовлетворения (2) надо в (3) дополнительно потребовать $S_1 = 0$. В то же время уравнение (2) с учетом пропущенных в [3] членов удовлетворяется без каких-либо дополнительных требований! Ясно, что условие $S_1 = 0$ является искусственным и накладывает сильное ограничение на вид самого лагранжева смещения (1), в котором исчезает, например, компонент ξ_2. Именно из этих соображений мы не согласны с тем выражением лагранжева смещения, которое приводится Чандрасекаром в формуле (58) на стр. 132.

Добавим, что в рассматриваемом ниже случае грушевидных фигур с внутренними течениями лагранжево смещение включает уже не четыре, а пять произвольных постоянных. Это обстоятельство еще более усложняет механизм деформации эллипсоида в грушевидную фигуру. Весь метод нам пришлось развивать самостоятельно, и эта задача облегчалась предварительным рассмотрением в [1] двумерного случая.

2. *Некоторые характеристики S-эллипсоидов Римана.* Равновесие и устойчивость этих фигур равновесия подробно рассматривались в [3] и [4]. В собственной системе координат уравнение поверхности

$$S = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0, \tag{4}$$

и внутреннее поле скоростей ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 \equiv \lambda$)

$$u_1 = \frac{\lambda}{n} x_2, \quad u_2 = -\lambda n\, x_1, \quad u_3 = 0, \quad (n = a_2/a_1). \tag{5}$$

Давление внутри фигуры

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right), \tag{6}$$

где p_0—центральное давление. Уравнения равновесия дают

$$\frac{2p_0}{\rho} = 2A_3\, a_3^2 = a_1^2 (2n\, \lambda\Omega - \lambda^2 - \Omega^2 + 2A_1) = a_2^2 \left(\frac{2\lambda\Omega}{n} - \lambda^2 - \Omega^2 + 2A_2\right). \tag{7}$$

Рассматриваемая фигура равновесия задается двумя параметрами:

$$0 < n \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant \frac{a_3}{a_1} \leqslant 1; \tag{8}$$

неизвестные λ, Ω и p_0. Геометрическая форма эллипсоида тесно связана с его динамическими характеристиками, что видно из уравнения

$$\Phi^2 + \frac{2n B_{12} \cdot \Phi}{A_3 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_{12} a_2^2} + 1 = 0, \text{ где } \Phi = -\frac{\lambda}{\Omega} = \frac{nf}{1+n^2} \tag{9}$$

$(f = \zeta/\Omega)$. Кроме того, из (7) также следует, что

$$\Omega^2 = \frac{2B_{12}}{1+\Phi^2}; \; \lambda^2 = 2B_{12} \frac{\Phi^2}{1+\Phi^2}; \; n\lambda\Omega = A_3 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_{12} a_2^2. \tag{10}$$

Гравитационный потенциал однородного эллипсоида

$$\varphi = J - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2. \tag{11}$$

Интегральные символы A_{ijk} и B_{ijk} являются трехмерными обобщениями выражений, данными в [1] (формула (49)).

3. *О виде лагранжева перемещения, деформирующего эллипсоид с внутренним полем скоростей в грушевидную фигуру.* Как известно ([3], стр. 129), самое общее перемещение, деформирующее несжимаемый эллипсоид в грушевидную фигуру, не имеющую симметрии относительно плоскости Ox_2x_3, можно представить в виде линейной комбинации пяти элементарных соленоидальных перемещений:

$$\vec{\xi}^{(0)} = (1, 0, 0), \quad \vec{\xi}^{(1)} = (x_1^2, -2x_1 x_2, 0), \quad \vec{\xi}^{(2)} = (x_2^2, 0, 0),$$

$$\vec{\xi}^{(3)} = (x_3^2, 0, 0), \quad \vec{\xi}^{(4)} = (0, x_1 x_2, -x_1 x_3). \tag{12}$$

Принципиальное отличие рассматриваемого нами случая от случая деформации эллипсоида Якоби, с которым имел дело Чандрасекар, заключается в следующем. При деформации эллипсоида Якоби из того факта, что комбинация

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \vec{\xi}^{(4)} - \frac{1}{n^2} \vec{\xi}^{(2)} + \frac{a_1^2}{a_3^2} \vec{\xi}^{(3)} \tag{13}$$

не изменяет, как легко убедиться, граничную поверхность (4), следует факт линейной зависимости векторов (12) по модулю эллипсоида. Последнее означает, что, имея дело с деформацией эллипсоида относительного равновесия, перемещение $\vec{\xi}^{(4)}$ можно отбросить как зависимое от других перемещений. В этом случае компоненты лагранжева перемещения имеют вид (1). Но если интересоваться не только граничной поверхностью, но и внутренней структурой эллипсоида, все обстоит совершенно иначе. Дело в том, что хотя комбинация (13) и оставляет поверхность (4) неизменной, она тем не менее в корне изменяет геометрическую структуру линий тока внутри S-эллипсоида! Если, например, в невозмущенном эллипсоиде линии тока лежат в плоскостях $Ax_3+D=0$, то после деформации комбинацией (13) вместо них имеем

$$\tilde{S}=Ax_3+D+Ax_1x_3 \tag{14}$$

—семейство искривленных квадратичных поверхностей. Резюмируя, заключаем: в рассматриваемом нами случае все векторы (12) являются линии тока лежат в плоскостях $Ax_3+D=0$, то после деформации комбиненты:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= S_0+S_1x_1^2+S_2x_2^2+S_3x_3^2, \\ \xi_2 &= (S_4-2S_1)\cdot x_1\cdot x_2, \\ \xi_3 &= -S_4\cdot x_1\cdot x_3, \end{aligned} \tag{15}$$

где $S_0, \ldots, S_4$—бесконечно малые величины, не зависящие от координат. Как легко видеть из (15), $\operatorname{div}\vec{\xi}=0$.

4. *Граничная поверхность и поле скоростей в грушевидной фигуре.* Придав всем точкам S-эллипсоида бесконечно малое лагранжево смещение $\vec{\xi}(\vec{x})$ с компонентами (15), с помощью формул (11), (12) находим уравнение граничной поверхности

$$\tilde{S}(\vec{x})=\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}-1-\frac{2x_1}{a_1^2}\left[S_0+S_1x_1^2+\left(S_2+\frac{S_4-2S_1}{n_2}\right)x_2^2+\right.$$
$$\left.+\left(S_3-\frac{a_1^2}{a_3^2}S_4\right)x_3^2\right]=0; \tag{16}$$

поле скоростей

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda}{n}x_2\left[1-(-4S_1+2S_2n^2+S_4)\cdot x_1\right], \\ u_2 &= -\lambda n\left\{x_1-S_0-(3S_1-S_4)\,x_1^2-\left(S_2+\frac{S_4-2S_1}{n^2}\right)x_2^2-S_3\,x_3^2\right\}, \\ u_3 &= -\frac{\lambda}{n}S_4\,x_2\,x_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Обратим внимание на то, что *при деформации появился отличный от нуля компонент скорости по оси* x_3. Компоненты вихря оказываются равными

$$\zeta_1 = -\lambda n\left(2S_3 + \frac{S_4}{n^2}\right)x_3, \quad \zeta_2 = 0,$$

$$\zeta_3 = -n\lambda\left\{1 + \frac{1}{n^2} - 2x_1\left[\left(3 - \frac{2}{n^2}\right)S_1 + S_2 + S_4\left(\frac{1}{2n^2} - 1\right)\right]\right\}. \tag{18}$$

Таким образом, *при деформации S-эллипсоида в грушевидную фигуру поле скоростей из двумерного становится трехмерным, а завихренность этого поля зависит от координат и имеет две отличные от нуля составляющие**. Именно эти выводы показывают ошибочность метода в статье [2] (см. выше *Введение*).

Вряд ли стоит подробно говорить о том, почему мы ограничиваемся грушевидными фигурами, бесконечно близкими к исходным S-эллипсоидам. Причина указана в разделе 3 статьи [1]: только в линейном по возмущению приближении будет выполнено граничное условие

$$\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \tilde{S} = 0. \tag{19}$$

Другими словами, развитый нами метод позволяет исследовать грушевидные фигуры лишь в линейной окрестности исходных S-эллипсоидов. Нет сомнений в том, что ряды грушевидных фигур в действительности простираются далее этой окрестности, где могут быть прослежены численным, например, способом. Ситуация совершенно аналогична рассмотренной в [1].

5. *Анализ уравнений гидродинамики.* Как было показано в [1] (см. уравнение (21)), движение однородной идеальной гравитирующей жидкости во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}(0, 0, \Omega)$ системе отсчета может быть представлено в виде

$$\operatorname{grad} H = [\vec{u}\,\vec{\zeta}^{(0)}], \tag{20}$$

где

$$H = \frac{p}{\rho} - \varphi - \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{u^2}{2}; \qquad \vec{\zeta}^{(0)} = 2\vec{\Omega} + \vec{\zeta}. \tag{21}$$

Берем первую вариацию от уравнения (20), получим

$$\operatorname{grad} \delta H = [\delta\,\vec{u}\,\vec{\zeta}^{(0)}] + [\vec{u}\,\partial\,\vec{\zeta}], \tag{22}$$

---

* В особом случае безвихревой конфигурации при деформации эллипсоида вихрь остается прежним (см. формулу (28)).

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\delta H = (2\Omega + \zeta_3)\,\delta u_2 + u_2\delta\zeta_3 = F_1(x_1,\ x_2,\ x_3);\\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\delta H = -(2\Omega + \zeta_3)\,\delta u_1 - u_1\delta\zeta_3 = F_2(x_1,\ x_2);\\ &\frac{\partial}{\partial x_3}\delta H = -u_2\delta\zeta_1 = F_3(x_1,\ x_3). \end{aligned} \tag{23}$$

Будем рассматривать (23) как дифференциальные уравнения относительно величины δH, тогда условием совместности этой системы уравнений будет

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\delta H = \operatorname{rot}\left([\delta\vec{u}\,\vec{\zeta}^{(0)}] + [\vec{u}\,\delta\vec{\zeta}]\right) = 0. \tag{24}$$

С учетом найденных в (17) и (18) выражений последнее уравнение удовлетворится при условии, если

$$\begin{aligned} &\lambda^2\left[S_4 + 2S_3\left(2n\frac{\Omega}{\lambda} - 1\right)\right] = 0,\\ &\lambda^2\left[\left(3 - \frac{2}{n^2}\right)S_1 + S_2 + \left(\frac{\Omega}{\lambda n} - \frac{3}{2}\right)S_4\right] = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Между прочим, в двумерном случае, когда $S_3 = S_4 = 0$, из последнего в (25) уравнения следует то самое требование однородности вихря, которое было получено в [1] под номером (28). В трехмерном, однако, случае уравнения (25) свидетельствуют о том, что завихренность внутри грушевидной фигуры обязательно зависит от координат. С учетом (25), выражения (18) целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \delta\zeta_1 = -2\lambda\,S_3\,x_3\left(\frac{-2\Omega}{\lambda} + n + \frac{1}{n}\right),\\ &\zeta_2 = 0,\\ &\zeta_3 = -\lambda\left\{n + \frac{1}{n} - S_4\,x_1\left(-\frac{2\Omega}{\lambda} + n + \frac{1}{n}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Любопытно: если деформация лагранжевым смещением (15) осуществляется над безвихревым (в инерциальной системе отсчета) эллипсоидом, у которого

$$2\Omega + \zeta_3 = \lambda\left(\frac{2\Omega}{\lambda} - n - \frac{1}{n}\right) = 0, \tag{27}$$

то, согласно формулам (26),

$$\zeta_1 = \delta\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \delta\zeta_3 = 0, \quad \zeta_3 = -\lambda\left(n + \frac{1}{n}\right). \tag{28}$$

Следовательно, такая грушевидная фигура в инерциальной системе также будет безвихревой. Вихрь внутри фигуры останется прежним, хотя поле скоростей становится трехмерным! Такая грушевидная фигура является особой.

Правые части уравнений (23) оказываются равными

$$F_1 = \lambda^2 n\left(2\frac{\Omega}{\lambda} - n - \frac{1}{n}\right)\left[S_0 + 3S_1x_1^2 + \left(S_2 + \frac{S_4 - 2S_1}{n^2}\right)x_2^2 + S_3x_3^2\right], \tag{29}$$

$$F_2 = 2\lambda^2 n\left(2\frac{\Omega}{\lambda} - n - \frac{1}{n}\right)\left(S_2 + \frac{S_4 - 2S_1}{n^2}\right)\cdot x_1\cdot x_2, \tag{30}$$

$$F_3 = 2\lambda^2 n\, S_3\left(2\frac{\Omega}{\lambda} - n - \frac{1}{n}\right)x_1\cdot x_3. \tag{31}$$

Легко проверить, что действительно $\operatorname{rot} F = 0$. Решая уравнения (23) с учетом выражений для правых частей из (29)—(31), можно показать (из-за отсутствия места мы это опускаем), что

$$\delta H = \lambda^2 n\, x_1\left(2\frac{\Omega}{\lambda} - n - \frac{1}{n}\right)\left[S_0 + S_1x_1^2 + \left(S_2 + \frac{S_4 - 2S_1}{n^2}\right)x_2^2 + S_3x_3^2\right]. \tag{32}$$

Проверку легко осуществить прямой подстановкой (32) в (23).

С другой стороны, беря вариацию от H из (21), имеем выражение*

$$\frac{\delta p}{\rho} = \delta H + \delta\varphi - \frac{1}{2}\delta(\vec{u}^2). \tag{33}$$

В нашу задачу входит нахождение правой части (33) как функции координат. Как нетрудно показать с помощью (17),

$$\delta\frac{\vec{u}^2}{2} = -\lambda^2 x_1\left\{S_0n^2 + n^2(3S_1 - S_4)x_1^2 + \left[-2S_1\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + S_2(2 + n^2) + S_4\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]x_2^2 + S_3n^2x_3^2\right\}. \tag{34}$$

Более трудной задачей является нахождение вариации потенциала $\delta\varphi$.

---

* Вариация от центробежного потенциала $\delta\left[\frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right]$ будет равна нулю. Объяснение этому было дано в статье [1], см. пятый раздел.

6. *Вариация гравитационного потенциала.* По определению

$$\delta\varphi = G\delta \int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = -G \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')\,\xi_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}', \tag{35}$$

где интегрирование по объему невозмущенного эллипсоида. Подставляя сюда выражения для смещений из (15), получим

$$\delta\varphi = -\sum_{i=0}^{4} S_i \delta\varphi^{(i)}, \tag{36}$$

где обозначено

$$\delta\varphi^{(0)} = -2A_1 x_1;\ \delta\varphi^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_{11} - 2\frac{\partial}{\partial x_2} D_{12};$$

$$\delta\varphi^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_{22};\ \delta\varphi^{(3)} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_{33};\ \delta\varphi^{(4)} = \frac{\partial}{\partial x_2} D_{12} - \frac{\partial}{\partial x_3} D_{13}. \tag{37}$$

Интегралы типа (их можно назвать потенциалами Ферререса)

$$D_{ij}(\vec{x}) = G \int\limits_V \rho(\vec{x}') \frac{x'_i x'_j}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \tag{38}$$

из-за отсутствия места представим общим выражением [3]:

$$D_{ij} = a_i^2 a_j^2 \Big(A_{ij} - \sum_{l=1}^{3} A_{ijl} x_l^2\Big) x_i x_j +$$

$$+ \frac{a_i^2}{4} \delta_{ij} \Big(B_i - 2\sum_{l=1}^{3} B_{il} x_l^2 + \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} B_{ilm} x_l^2 x_m^2\Big). \tag{39}$$

Подставляя (39) в (37), в итоге находим

$$\delta\varphi^{(0)} = -2A_1 x_1; \tag{40}$$

$$\delta\varphi^{(1)} = (-4A_{111} a_1^4 + 2A_{112} a_1^2 a_2^2 + B_{111} a_1^2) x_1^3 +$$

$$+ (-2A_{112} a_1^4 + B_{112} a_1^2 + 6A_{122} a_1^2 a_2^2) x_1 x_2^2 +$$

$$+ (-2A_{113} a_1^4 + 2A_{123} a_1^2 a_2^2 + B_{113} a_1^2) x_1 x_3^2 +$$

$$+ (2A_{11} a_1^4 - B_{11} a_1^2 - 2A_{12} a_1^2 a_2^2) x_1; \tag{41}$$

$$\delta\varphi^{(2)} = B_{112} a_2^2 x_1^3 + (B_{122} a_2^2 - 2A_{122} a_2^4) x_1 x_2^2 + B_{123} a_2^2 x_1 x_3^2 - B_{12} a_2^2 x_1; \tag{42}$$

$$\delta\varphi^{(3)} = B_{113} a_3^2 x_1^3 + B_{123} a_3^2 x_1 x_2^2 + (B_{133} a_3^2 - 2A_{133} a_3^4) x_1 x_3^2 - B_{13} a_3^2 x_1; \tag{43}$$

$$\delta\varphi^{(4)} = a_1^2 x_1 [A_{12} a_2^2 - A_{13} a_3^2 + (A_{113} a_3^2 - A_{112} a_2^2) x_1^2 +$$
$$+ (A_{123} a_3^2 - 3A_{122} a_2^2) x_2^2 + (3A_{133} a_3^2 - A_{123} a_2^2) x_3^2]. \qquad (44)$$

В (41) входят и два члена, пропущенные Чандрасекаром (см. *Введение*). Появление у нас выражения (44) связано с существованием внутри эллипсоида течений жидкости; у Чандрасекара это выражение не фигурирует. Каждое из выражений (40—44) удовлетворяет уравнению Лапласа (2) .Доказательство этого из-за отсутствия места мы также опускаем.

7. *Уравнение для определения точек бифуркации.* Подставляя выражения (32), (34) и (36) в уравнение (33), после преобразований последнего имеем

$$\frac{1}{\rho} \delta p = x_1 (K_0 + K_1 x_1^2 + K_2 x_2^2 + K_3 x_3^2). \qquad (45)$$

Здесь введены обозначения

$$K_0 = S_0 \left[2A_1 + \lambda^2 n \left(\frac{2\Omega}{\lambda} - \frac{1}{n} \right) \right] - S_1 (2A_{11} a_1^4 - B_{11} a_1^2 - 2A_{12} a_1^2 a_2^2) +$$
$$+ S_2 B_{12} a_2^2 + S_3 B_{13} a_3^2 - S_4 a_1^2 (A_{12} a_2^2 - A_{13} a_3^2); \qquad (46)$$

$$K_1 = S_1 \left[\lambda^2 n \left(2 \frac{\Omega}{\lambda} + 2n - \frac{1}{n} \right) + 4A_{111} a_1^4 - 2A_{112} a_1^2 a_2^2 - B_{111} a_1^2 \right] +$$
$$+ S_2 B_{112} a_2^2 - S_3 B_{113} a_3^2 + S_4 (-\lambda^2 n^2 + A_{112} a_1^2 a_2^2 - A_{113} a_1^2 a_3^2); \qquad (47)$$

$$K_2 = S_1 \left[-2 \frac{\lambda^2}{n} \left(2 \frac{\Omega}{\lambda} + \frac{1}{n} \right) + 2A_{112} a_1^4 - B_{112} a_1^2 - 6A_{122} a_1^2 a_2^2 \right] +$$
$$+ S_2 \left[\lambda^2 \left(2n \frac{\Omega}{\lambda} + 1 \right) - B_{122} a_2^2 + 2A_{122} a_2^4 \right] - S_3 B_{123} a_3^2 +$$
$$+ S_4 \left(\frac{2\lambda\Omega}{n} - A_{123} a_1^2 a_3^2 + 3A_{122} a_1^2 a_2^2 \right); \qquad (48)$$

$$K_3 = S_1 (2A_{113} a_1^4 - 2A_{123} a_1^2 a_2^2 - B_{113} a_1^2) - S_2 B_{123} a_2^2 +$$
$$+ S_3 \left[\lambda^2 \left(2n \frac{\Omega}{\lambda} - 1 \right) - B_{133} a_3^2 + 2A_{133} a_3^4 \right] +$$
$$+ S_4 (A_{123} a_1^2 a_2^2 - 3A_{133} a_1^2 a_3^2); \qquad (49)$$

Формулой (45) представлена вариация давления в любой точке внутри конфигурации, в том числе и на ее граничной поверхности. Последнее целесообразно сравнить с вариацией давления по формуле ([1], формула (35))

$$\delta p|_S = -\vec{\xi}\,\mathrm{grad}\,p. \tag{50}$$

С помощью формул (6), (7) и (15) находим

$$\frac{1}{\rho}\,\delta p|_S = \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\,x_1\left[S_0 + S_1\,x_1^2 + \left(S_2 + \frac{S_4 - 2S_1}{n^2}\right)x_2^2 + \left(S_3 - \frac{a_1^2}{a_3^2}\,S_4\right)x_3^2\right]. \tag{51}$$

Подставляя теперь (51) в (45), получим выражение

$$x_1\,(Q_0 + Q_1\,x_1^2 + Q_2\,x_2^2 + Q_3\,x_3^2) = 0, \tag{52}$$

где мы обозначили

$$\begin{gathered} Q_0 = K_0 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\,S_0; \quad Q_1 = K_1 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\,S_1; \\ Q_2 = K_2 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\left(S_2 + \frac{S_4 - 2S_1}{n^2}\right); \quad Q_3 = K_3 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\left(S_3 - \frac{a_1^2}{a_3^2}\,S_4\right). \end{gathered} \tag{53}$$

Чтобы удовлетворить последнему уравнению, достаточно потребовать совпадения в (52) выражения в круглых скобках с уравнением поверхности невозмущенного эллипсоида (4). Отсюда получим три уравнения:

$$\begin{gathered} Q_0 + Q_1\,a_1^2 = 0, \\ Q_0 + Q_2\,a_2^2 = 0, \\ Q_0 + Q_3\,a_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

Рассматривая их как алгебраические уравнения для неизвестных величин S_0, S_1, S_2, S_3 и S_4 (в общем случае пять неизвестных), к (54) следует добавить и два уравнения (25). В итоге будем иметь систему из пяти однородных алгебраических уравнений для пяти неизвестных

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{11} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{11} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ 0 & 0 & 0 & \left(4n\,\frac{\Omega}{\lambda} - 2\right) & 1 \\ 0 & \left(3 - \frac{2}{n^2}\right) & 1 & 0 & \left(\frac{\Omega}{\lambda n} - \frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} S_0/a_1^2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Vmatrix} = 0. \tag{55}$$

В (55) члены d_{ij} оказываются равными

$$d_{11} = 2A_1 + \lambda^2\left(2n\,\frac{\Omega}{\lambda} - 1\right) - \frac{2p_0}{\rho a_1^2};$$

$$d_{12} = -2A_{11}\,a_1^2 + B_{11} + 2A_{12}\,a_2^2 + \lambda^2\left(2n\frac{\Omega}{\lambda} + 2n^2 - 1\right) +$$

$$+ 4A_{111}\,a_1^4 - 2A_{112}\,a_1^2\,a_2^2 - B_{111}\,a_1^2 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}; \tag{56}$$

$$d_{13} = B_{12}\,n^2 - B_{112}\,a_2^2;\quad d_{14} = \frac{a_3^2}{a_1^2}\,(B_{13} - B_{113}\,a_1^2);$$

$$d_{15} = -A_{12}\,a_2^2 + A_{13}\,a_3^2 - \lambda^2 n^2 + a_1^2\,(A_{112}\,a_2^2 - A_{113}\,a_3^2).$$

$$d_{22} = -2A_{11}\,a_1^2 + B_{11} + 2A_{12}\,a_2^2 - 2\lambda^2\left(2n\frac{\Omega}{\lambda} + 1\right) +$$

$$+ 2A_{112}\,a_1^2\,a_2^2 - B_{112}\,a_2^2 - 6A_{122}\,a_2^4 + \frac{4p_0}{\rho a_1^2};$$

$$d_{23} = n^2\left[B_{12} + \lambda^2\left(2n\frac{\Omega}{\lambda} + 1\right) - B_{122}\,a_2^2 + 2A_{122}\,a_2^4 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\right]. \tag{57}$$

$$d_{24} = \frac{a_3^2}{a_1^2}\,(B_{13} - B_{123}\,a_2^2);$$

$$d_{25} = A_{13}\,a_3^2 - A_{12}\,a_2^2 + 2\lambda\Omega n - A_{123}\,a_2^2\,a_3^2 + 3A_{122}\,a_2^4 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}.$$

$$d_{32} = -2A_{11}\,a_1^2 + B_{11} + 2A_{12}\,a_2^2 + 2A_{113}\,a_1^2\,a_3^2 - 2A_{123}\,a_2^2\,a_3^2 - B_{113}\,a_3^2;$$

$$d_{33} = n^2\,(B_{12} - B_{123}\,a_3^2);$$

$$d_{34} = \frac{a_3^2}{a_1^2}\left[B_{13} + \lambda^2\left(2n\frac{\Omega}{\lambda} - 1\right) - B_{133}\,a_3^2 + 2A_{133}\,a_3^4 - \frac{2p_0}{\rho a_1^2}\right]; \tag{58}$$

$$d_{35} = A_{13}\,a_3^2 - A_{12}\,a_2^2 - 3A_{133}\,a_3^4 + A_{123}\,a_2^2\,a_3^2 + \frac{2p_0}{\rho a_1^2}.$$

Чтобы существовало нетривиальное решение системы уравнений (55), надо потребовать равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{11} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{11} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ 0 & 0 & 0 & \left(4n\frac{\Omega}{\lambda} - 2\right) & 1 \\ 0 & \left(3 - \frac{2}{n^2}\right) & 1 & 0 & \left(\frac{\Omega}{\lambda n} - \frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{59}$$

Раскрывая определитель (59), получим в итоге искомое уравнение для определения точек бифуркации грушевидных фигур от S-эллипсоидов Римана.

Численное решение уравнения (59) не представляет каких-либо принципиальных трудностей и может быть проведено обычным методом. Из-за отсутствия места мы не можем представить здесь результаты наших расчетов. Некоторые из численных данных приводятся в [3] на стр. 184.

8. *Заключение.* Изучение грушевидных фигур предложенным выше методом позволяет получить новую информацию, существенно дополняющую те исследования, которые Чандрасекар проводил вириальным методом. Кроме того, в рамках нового метода нами вскрыты ошибки и недостатки предыдущих исследователей. Вскрытие указанных ошибок требует серьезных аналитических усилий.

После некоторой модификации данный метод может быть применен и для исследования других неэллипсоидальных фигур равновесия (гармоники четвертого и более высокого порядка).

Педагогический институт
г. Глазов

THE PEAR-SHAPED FIGURES OF EQUILIBRIUM WITH INTERNAL MOTION.

II. THE THREE-DIMENTIONAL CASE

B. P. KONDRAT'EV

We propose a new method for the investigation of bifurcation of pearshaped figures from Rieman's S—ellipsoids. As a result of bifurcation: a) a linear two-dimensional velocity field changes into a nonlinear three—dimensional field; b) one-component vector of homogeneous vorticity—in two-component vector whose value and direction have already been altered from point to point (with the exception of the case of nonvorticity configuration). The sequences of the pear—shaped figures with internal motion are observed) up to members which infinitesimally differ from initial ellipsoids. All characteristics of pear—shaped figures are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. П. Кондратьев*, Астрофизика, 32, 471, 1990.
2. *Y. Eriguchi, Y. Hachisu*, Astron. and Astrophys., 142, 256, 1985.
3. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
4. *Б. П. Кондратьев*, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур, Наука, М., 1989, гл. 5.