АСТРОФИЗИКА

ТОМ 33 АВГУСТ, 1990 ВЫПУСК 1

УДК: 52:531.51

СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ БИМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ. II. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ—ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А. А. СААРЯН, Л. Ш. ГРИГОРЯН

Поступила 4 мая 1990

Принята к печати 25 мая 1990

Исходя из инвариантности функционала действия относительно преобразований канониечского, метрического тензоров энергии—импульса гравитационного поля, а такскалярно-тензорной биметрической теории гравитации. Найдены явные выражения для канонического, метрического тензоров энергии—импульса гравитационного поля, а также ковариантного обобщения псевдотензора Ландау—Лифшица в ОТО.

1. *Введение.* В первой части [1] была предложена скалярно-тензорная биметрическая теория (СТБТ) гравитации. В отличие от обычных чисто динамических скалярно-тензорных теорий (см., например, [2]) она является априорно-геометрической: наряду с римановой метрикой g_{ik} и гравитационным скаляром φ в ней фигурирует также плоская фоновая метририка γ_{ik}. В лагранжевых общековариантных чисто динамических метрических теориях всегда можно выписать законы сохранения в форме

$$\tau^{ik}_{,k} = 0, \tag{1}$$

где запятая означает частную производную по координатам, а псевдотензор τ^{ik} в отсутствие гравитации переходит в тензор энергии—импульса негравитационной материи. В априорно геометрических теориях уравнение (1), вообще говоря, можно вывести [3], если абсолютные переменные допускают группу симметрии с размерностью не меньше четырех. В СТБТ абсолютной переменной является плоская метрика γ_{ik} с десятипараметрической группой симметрии, что позволяет выписать десять ковариантно сохраняющихся величин энергии—импульса и момента импульса для замкнутой системы гравитирующих тел. Данная работа посвящена законам сохранения в СТБТ.

Функционал действия имеет вид (скорость света $c=1$)

$$S=\int (L_g+L_m)\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{2}$$

где

$$L_g=-\frac{1}{2}\varphi\Lambda_g+\frac{1}{2}g^{ik}\zeta(\varphi)\varphi_{,i}\varphi_{,k}/\varphi-\Lambda(\varphi) \tag{3}$$

гравитационная часть плотности лагранжиана,

$$\Lambda_g=g^{ik}(\bar{\Gamma}^l_{in}\bar{\Gamma}^n_{kl}-\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^n_{ln}), \tag{4}$$

а $\bar{\Gamma}^l_{ik}=\Gamma^l_{ik}-\breve{\Gamma}^l_{ik}$ — тензор аффинной деформации, равный разнице между символами Кристоффеля метрик g_{ik} и γ_{ik}, соответственно. Поскольку теория метрическая, то в плотности лагранжиана материи L_m гравитационное поле фигурирует только в виде метрического тензора g_{ik}:

$$L_m=L_m(g_{ik},\ q_a,\ q_{a;\,l}), \tag{5}$$

q_a — материальные переменные, точка с запятой — ковариантная производная по g_{ik}. Уравнения поля, вытекающие из вариации (2) по g_{ik} и φ, приведены в (I.5) (римская цифра указывает на формулы из [1]). Систему (I.5) следует дополнить уравнениями движения негравитационной материи

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\,L_m)}{\delta q_a}=0. \tag{6}$$

Мы убедимся, что уравнение

$$T^k_{i;k}=0 \tag{7}$$

является следствием (6). В соответствии с известной общей теоремой [3] в данном случае оно не вытекает из уравнений гравитационного поля.

2. *Дифференциальные законы сохранения.* Из инвариантности действия относительно координатных преобразований можно вывести ряд дифференциальных тождеств, т. н. дифференциальные законы сохранения (см. [3, 4]), которые в свою очередь позволяют вывести соотношения между различными тензорами энергии—импульса гравитационного поля в СТБТ. Сначала рассмотрим произвольную физическую систему с функционалом действия

$$S=\int\limits_{\Omega}\tilde{L}(Y_A,\ Y_{A,\,l})\,d^4x \tag{8}$$

и плотностью лагранжиана $\tilde{L}$. Помимо функций, описывающих состояние системы, в набор переменных Y_A входит также фоновая метрика γ_{ik}. Вариацию действия (8) относительно бесконечно малых преобразований координат $x^l \to x^l + \eta^l(x)$ можно представить в виде

$$\delta S = \int\limits_{\Omega} \left[\left(\tilde{L}\eta^l + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Y_{A,l}} \delta_L Y_A \right)_{,l} + \frac{\delta \tilde{L}}{\delta Y_A} \delta_L Y_A \right] d^4 x. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что вариация Ли функции Y_A

$$\delta_L Y_A = d^i_{Ak} \eta^k_{|i} - Y_{A|k} \eta^k, \tag{10}$$

вертикальная черта означает ковариантную производную по γ_{ik}. Для произвольного тензора $Y^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k_p}$ имеем

$$d^i_{Ak} \equiv d^{i_1 \dots i_n \,:\, l}_{k_1 \dots k_p \,:\, k} = \delta^{i_1}_k Y^{i \dots i_n}_{k_1 \dots k_p} + \dots + \delta^{i_n}_k Y^{i_1 \dots i}_{k_1 \dots k_p} -$$
$$- \delta^i_{k_1} Y^{i_1 \dots i_n}_{k \dots k_p} - \dots - \delta^i_{k_p} Y^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k}. \tag{11}$$

Поскольку действие есть скаляр, то $\delta S = 0$. Подставив (10) в (9) и приравняв нулю подынтегральные множители перед η^i, $\eta^i_{|k}$, $\eta^l_{|ik}$ (Ω и η^i произвольны), получим следующие тождества:

$$-t^i_{k|i} = \frac{\delta \tilde{L}}{\delta Y_A} Y_{A\,k}, \quad t^i_k = H^{il}_{k|l} + d^i_{Ak} \frac{\delta \tilde{L}}{\delta Y_A}, \tag{12}$$

$$H^{il}_k = - H^{li}_k, \tag{13}$$

где введены обозначения

$$t^i_k = Y_{A|k} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Y_{A,i}} - \tilde{L} \delta^i_k, \quad H^{il}_k = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Y_{A,l}} d^i_{Ak}, \tag{14}$$

t^i_k — плотность канонического тензора энергии—импульса.

Рассмотрим тождества (12) для СТБТ, где $Y_A = \{\varphi, g_{ik}, q_a, \gamma_{ik}\}$. Подставив $\tilde{L} = \tilde{L}_g$ (см. (3), здесь и далее $\tilde{f} = \sqrt{-g}\, f$) в (12), с учетом уравнений гравитационного поля и определения тензора энергии—импульса вещества и негравитационных полей

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \tilde{L}_m}{\delta g^{ik}} \tag{15}$$

приходим к соотношениям

$$t^{i}_{(g)\,k} = H^{il}_{(g)\,k|l} - \bar{T}^{i}_{k} + 2\gamma^{il}\frac{\delta \widetilde{L}_g}{\delta\gamma^{kl}}, \tag{16а}$$

$$t^{i}_{(g)\,k|i} = g^{lm}_{|k}\,\widetilde{T}_{lm}/2. \tag{16б}$$

При выводе (16а) мы воспользовались лишь уравнением (I.5), поэтому уравнения (I.5а) и (16а) эквивалентны друг другу. Аналогичным образом, приняв $\widetilde{L}=\bar{L}_m$, с учетом (6) получим

$$t^{i}_{(m)\,k} = H^{il}_{(m)\,k|l} + \bar{T}^{i}_{k}, \quad t^{i}_{(m)\,k|l} = -g^{lm}_{|k}\,\bar{T}_{lm}/2, \tag{17}$$

откуда, в частности, следует уравнение (7). В (16) и (17) величины $t^{i}_{(\alpha)\,k}$ и $H^{il}_{(\alpha)\,k}$, $\alpha = m,\ g$ определяются выражениями (14) с $\widetilde{L} = \widetilde{L}_{\alpha}$.

Из антисимметричности H^{il}_{k} по верхним индексам и (16), (17) вытекают следующие дифференциальные законы сохранения:

$$[t^{i}_{(g)\,k} + t^{i}_{(m)\,k}]_{|i} = [t^{i}_{(g)\,k} + \bar{T}^{i}_{k}]_{|i} = 0, \quad t^{ik}_{M\,|i} = 0, \tag{18}$$

где

$$t^{ik}_{M} = -2\,\frac{\delta \widetilde{L}_g}{\delta\gamma_{ik}} \tag{19}$$

— плотность метрического (относительно γ_{ik}) тензора энергии — импульса. С учетом (3) после преобразований находим

$$t^{ik}_{M} = \frac{1}{2}[\varphi\,(\gamma^{ln}\,\widetilde{g}^{ik} + \gamma^{ik}\,\widetilde{g}^{ln} - \gamma^{il}\,\widetilde{g}^{kn} - \gamma^{kl}\,\widetilde{g}^{in})_{|l}]_{|n}. \tag{20}$$

При $\varphi = \mathrm{const}$ (20) переходит в аналогичное выражение [5] для ОТО в биметрической формулировке, совпадающее в декартовой системе координат с псевдотензором Папапетру. Плотность канонического тензора энергии—импульса в СТБТ равна

$$t^{i}_{(g)\,k} = \frac{1}{2}\varphi\sqrt{-g}\,(g^{il}\,\bar{\Gamma}^{n}_{kl}\,\bar{\Gamma}^{m}_{nm} + g^{ln}\,\bar{\Gamma}^{i}_{kl}\,\bar{\Gamma}^{m}_{nm} + g^{ln}\,\bar{\Gamma}^{i}_{ln}\bar{\Gamma}^{m}_{km} -$$

$$- g^{il}\,\bar{\Gamma}^{n}_{kn}\,\bar{\Gamma}^{m}_{lm} - 2\,g^{ln}\,\bar{\Gamma}^{i}_{lm}\,\bar{\Gamma}^{m}_{kn} + 2\zeta\,\varphi^{,i}\,\varphi_{,k}/\varphi^2) - \bar{L}_g\,\delta^{i}_{k}. \tag{21}$$

Когда φ постоянно и $\breve{\Gamma}^{i}_{kl}=0$, это выражение совпадает с псевдотензором Эйнштейна ОТО.

Из (3) для $H^{il}_{(g)\,k}$ находим

$$H^{il}_{(g)\,k}=\frac{1}{2}\,\varphi\left[\frac{g_{km}}{\sqrt{-g}}\,U^{ilmn}{}_{|n}-\gamma_{km}\,(\gamma^{im}\tilde{g}^{ln}+\gamma^{ln}\tilde{g}^{im}-\gamma^{lm}\tilde{g}^{in}-\gamma^{in}\tilde{g}^{ln})_{|n}\right], \tag{22}$$

где

$$U^{ilmn}=\tilde{g}^{im}\tilde{g}^{ln}-\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{lm},\quad U^{ilmn}=-U^{limn}. \tag{23}$$

Подставив (20) и (22) в уравнение (16а), получим

$$\left(\frac{\varphi}{\sqrt{-g}}\,g_{km}\,U^{ilmn}{}_{|n}\right)_{|l}-\varphi_{,l}\,\tilde{g}^{il}_{|k}+\varphi_{,k}\,\tilde{g}^{il}_{|l}=2\,[t^{i}_{(g)\,k}+\tilde{T}^{i}_{k}], \tag{24}$$

откуда с учетом (18) и (23) приходим к простому уравнению

$$(\varphi_{,l}\,\tilde{g}^{il}_{|k}-\varphi_{,k}\,\tilde{g}^{il}_{|l})_{|i}=0. \tag{25}$$

В конечном счете, оно является следствием уравнений поля (I.5) и уравнений движения (6) негравитационной материи. Введя

$$t^{lm}_{LL}=g^{mk}\left[t^{l}_{(g)\,k}+\frac{1}{2}\,(\varphi_{,i}\,\tilde{g}^{il}_{|k}-\varphi_{,k}\,\tilde{g}^{il}_{|i})-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{-g}}\,g_{kn}\right)_{|i}U^{linp}{}_{|p}\right], \tag{26}$$

(24) можно записать в виде

$$\varphi\,U^{limp}{}_{|pi}=2\sqrt{-g}\,(\tilde{T}^{lm}+t^{lm}_{LL}). \tag{27}$$

Из (27) заключаем, что t^{lm}_{LL} симметрично и удовлетворяет дифференциальному закону сохранения

$$[(\sqrt{-g}/\varphi)\,(\tilde{T}^{lm}+t^{lm}_{LL})]_{|l}=0. \tag{28}$$

Тензорная плотность (26) является ковариантным обобщением псевдотензора Ландау—Лифшица ОТО [6] (см. также [7]) на случай СТБТ. Соответствующие псевдотензоры энергии—импульса в обычных скалярно-тензорных теориях рассмотрены в [3, 8]. Можно вывести более общий дифференциальный закон сохранения

$$[\sqrt{-g}\,(\tilde{T}^{lm}+\bar{t}^{lm}_{LL})\,f(\varphi)/\varphi]_{|l}=0, \tag{29}$$

если (27) записать в эквивалентном виде

$$[f(\varphi)\,U^{limp}]_{|pi}=2\sqrt{-g}\,(\tilde{T}^{lm}+\bar{t}^{lm}_{LL})\,f(\varphi)/\varphi, \tag{30}$$

где $f(\varphi)$ — произвольная функция, а симметричная тензорная плотность

$$\bar{t}^{lm}_{LL}=t^{lm}_{LL}+\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,[(f'\,\varphi_{,p}\,U^{limp})_{|i}+f'\,\varphi_{,i}\,U^{limp}{}_{|p}]. \tag{31}$$

В [9] рассмотрена аналогичная ситуация для теории Йордана—Бранса—Дике для частного случая $f(\varphi)=\varphi^n$, n — целое число. (26) и (28) являются частными случаями (31) и (29) соответственно, когда $f(\varphi)=\mathrm{const}$. Только в этом случае плотность тензора энергии—импульса (31) не содержит вторые производные от скалярного поля.

Из уравнения $\tau^{ik}_{\ |k}=0$ для симметричного тензора следует интегральный закон сохранения

$$\left(\int \tau^{0l}\,\xi_l^{(a)}\sqrt{-\gamma}\,d^3x\right)_{,0}=-\oint \tau^{\alpha l}\,\xi_l^{(a)}\sqrt{-\gamma}\,dS_\alpha \tag{32}$$

в плоском фоновом пространстве с десятью векторами Киллинга $\xi_i^{(a)}$, $a=1, 2, \ldots, 10$. Если в правой части поток через поверхность интегрирования равен нулю, то ковариантное выражение в круглых скобках является сохраняющейся величиной.

Институт прикладных проблем
физики АН Армении

SCALAR—TENSOR BIMETRIC THEORY OF GRAVITATION. II. ENERGY—MOMENTUM TENSOR OF THE GRAVITATIONAL FIELD

A. A. SAHARIAN, L. SH. GRIGORIAN

Differential conservation laws in the scalar-tensor bimetric theory of gravitation are derived proceeding from the invariance of the action relative to the transformations of the space-time coordinates. Explicit expressions for canonical and metric energy-momentum tensors of the gravitational field as well as those for generalizing the Landau-Lifshits pseudotensor in GR are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Саарян, Л. Ш. Григорян*, Астрофизика 32, 491, 1990.
2. *К. Уилл*, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М., 1985.
3. *D. L. Lee, A. P. Lightman, W.-T. Ni*, Phys. Rev., D10, 1685, 1974.
4. *Э. Нетер*, Вариационные принципы механики, Физматгиз, М., 1959.
5. *Н. А. Черников*, Сообщ. ОИЯИ, Р2-87-683, Дубна, 1987.
6. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
7. *М. И. Тентюков*, Acta Phys. Pol., B20, 659, 1989.
8. *Y. Nutku*, Astrophys. J., 158, 991, 1970.
9. *D. L. Lee*, Phys. Rev., D10, 2374, 1974.