

УДК: 530.12;524.354.6

ЗВЕЗДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ ПО ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Р. М. АВАКЯН, Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

Поступила 20 июня 1990

Принята к печати 15 июля 1990

Найдены интегральные характеристики конфигураций с однородным распределением вещества для двух различных вариантов граничных условий в обобщенной теории тяготения. Показано, что при нетрадиционном подходе к интерпретации полученных результатов, например, с позиций маховского принципа, можно существенно расширить спектр значений макроскопических параметров.

1. *Введение.* Как известно, существует альтернативное эйнштейновскому истолкование принципа эквивалентности, так называемый принцип Маха [7], согласно которому инерция интерпретируется как гравитационное воздействие. Это маховское представление вошло в первоначальную разработку общей теории относительности как доктрина Маха—Эйнштейна [7]. Эйнштейн конструктивно усилил принцип Маха, предложив, что инертная масса тела должна быть однородной линейной функцией гравитационного потенциала Вселенной. (Соответственно этому и уравнения движения принимает такой вид, что в отсутствие удаленных масс исчезает инерционный член. Такой подход требует, однако, основательной переработки ньютоновской механики).

Из-за локальной равноценности эйнштейновской геометрической и маховской динамической интерпретации эквивалентности инерции и тяготения у Эйнштейна вначале возникло представление, что ОТО вместе с общим принципом относительности должна бы заключать в себе принцип Маха. Эйнштейн полагал, что такое толкование возможно на основании его полевых уравнений, потому, что $g_{\mu\nu}$ охватывают и инерциальные, и гравитационные воздействия (в противоположность этому в ньютоновской теории поля инерции, вообще говоря, не удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$). Однако в дальнейшем Эйнштейн выяснил фундаментальное различие между общим принципом относительности и принципом Маха, заметив, что, в противоречие с доктриной Маха—Эйнштейна, урав-

нения определяют метрику не полностью, а лишь с точностью до граничных условий. Но как раз эти граничные условия и определяют глобальные системы отсчета и тем самым силы инерции. Действительно, эйнштейновские уравнения — это уравнения в частных производных и в них принципиально не содержится сведений о граничных условиях. Поэтому в ОТО принцип Маха может быть, самое большее, принципом выбора граничных условий, с помощью которого отбираются именно такие граничные условия, которые делают возможной реализацию доктрины. Но в связи с этим нужно отметить, что существующая общая теория относительности исходит из требования, чтобы из нее в качестве первого приближения получалась ньютоновская гравитационная динамика, и поэтому доктрина Маха—Эйнштейна в ней совершенно не находит места. В нашей задаче сферически-симметричного распределения материи в ограниченной области пространства это проявляется в том, что начальные условия (в центре конфигурации) оказывают вполне определенными (будем их в дальнейшем называть несингулярными).

Исходя из этих соображений, можно понять преимущества ОТТ, которая кроме граничных условий, характерных для ОТО, допускает возможность существенно отличающихся граничных условий (сингулярных), которые естественно связаны с другими условиями на больших расстояниях, что можно связать с основными положениями принципа Маха.

Существует серия работ, в которых построены конфигурации с несингулярными [2, 4] и сингулярными [6] начальными условиями. В последнем случае получены интересные результаты — модели со сколь угодно большими массами. Однако в этих работах допущена серьезная некорректность. Одна из постоянных интегрирования принята универсальной. Кроме того, внутреннее решение сшивается с параметрическим внешним решением Гекмана [5], а это связано с техническими трудностями. Поэтому целесообразно выполнить аналогичный расчет, исправив допущенную ошибку и используя однородные координаты, для которых внешнее решение имеет значительно более удобный вид.

2. Полевые уравнения и вакуумное решение. Статические, сферически-симметричные гравитационные поля изолированных самогравитирующих конфигураций в однородных координатах $x^\mu \{t, R, \theta, \Phi\}$ принято описывать выражением

$$dS^2 = e^{2\alpha(R)} dt^2 - e^{2\beta(R)} [dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)] \quad (1)$$

Подставим $g_{\mu\nu}$ из (1) в уравнения ОТТ (см., например, [6])

$$\frac{\chi_{;\mu}^\mu}{\chi} - \frac{2\chi^\mu \chi_{;\mu}}{\chi^2} = \frac{\chi}{2\epsilon - 3}, \quad \mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$R_1^2 + \frac{\chi_1^2}{\chi} + (\zeta - 2) \frac{\chi^2 \chi_1}{\chi^2} = \chi \left(T_1^2 + \frac{\zeta - 1}{3 - 2\zeta} T \delta_1^2 \right),$$

и выберем простые комбинации [8]

$$t_1 + \varphi t = \chi e^{2\beta} \frac{(\varepsilon - 3P)}{3 - 2\zeta}. \quad (3)$$

$$y_1 + \varphi y = \chi e^{2\beta} \frac{[(2 - \zeta)\varepsilon + (1 - \zeta)3P]}{3 - 2\zeta}, \quad (4)$$

$$t_1 - 2z_1 + z(t - z) + \left(\frac{\zeta}{2} - 1\right)t^2 = \varepsilon \chi e^{2\beta}, \quad (5)$$

$$\varphi_1 + \varphi^2 - \frac{\varphi}{R} = 2P \chi e^{2\beta}, \quad (6)$$

где $t = \chi_1/\chi$, $\varphi = y + z - t$, $y = \alpha_1$, $z = \beta_1 \frac{2}{R}$.

Здесь $(\dots)_1 = \frac{\partial}{\partial R}(\dots)$, ε и P — плотность энергии и давление вещества, ζ — безразмерная константа ОТГ, $\chi = \chi(R)$ — гравитационный скаляр (принята система единиц $c = G_0 = 1$, где G_0 — ньютоновская гравитационная постоянная).

Система (3)—(6) вместе с уравнением гидростатического равновесия

$$y = -\frac{P_1}{\varepsilon + P} \quad (7)$$

полностью определяют гравитационное поле и скаляр ОТГ χ во всей области изменения R .

Для численного интегрирования более подходящей, на наш взгляд, является следующая форма уравнений, эквивалентная (3)—(6):

$$\frac{\chi_1}{\chi} = V \frac{\chi}{R^2} e^{-(\alpha+\beta)}, \quad (8)$$

$$V_1 = R^2 e^{\alpha+3\beta} \left(\frac{\varepsilon - 3P}{3 - 2\zeta} \right), \quad (9)$$

$$\alpha_1 = m \frac{\chi}{R^2} e^{-(\alpha+\beta)} = -\frac{P_1}{\varepsilon + P}, \quad (10)$$

$$m_1 = R^2 e^{\alpha+3\beta} \frac{[(2 - \zeta)\varepsilon + (1 - \zeta)3P]}{3 - 2\zeta}, \quad (11)$$

$$\beta_1 = -U \frac{\chi}{R^2} e^{-(\alpha+\beta)}, \quad (12)$$

$$U_1 = R^2 e^{\alpha+3\alpha} \frac{[(1-\zeta)\varepsilon + \zeta P]}{3-2\zeta} + \frac{m - (U+V)}{R}. \quad (13)$$

Здесь уместно пояснить, почему вместо кажущихся более естественными координат кривизны (r -радиус «эквипотенциальной» сферы) используются однородные координаты. Дело в том, что известное вакуумное решение статической сферически-симметричной задачи ОТТ в координатах кривизны [5] имеет параметрический вид, что существенно затрудняет сшивку на границе конфигурации. Что же касается вакуумного решения в однородных координатах, то оно выглядит достаточно просто (впервые получено Брансом [1]). Действительно, при $R \geq R_s$ (индексом «S» будем снабжать величины, относящиеся к границе конфигурации $R = R_s$, определяемой условием $P = 0$). Из (9), (11) и (13) имеем

$$V = V(R_s) \equiv V_s, \quad m = m(R_s) \equiv m_s, \quad (14)$$

$$U = (m_s - V_s) + \frac{B}{R}, \quad B = \text{const.}$$

Далее, суммируя (8), (10) и (12) и интегрируя полученное, найдем

$$\frac{e^{\alpha+\beta}}{\chi} = \frac{B}{2R^2} + C.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 \left(\frac{1 - R_0/R}{1 + R_0/R} \right)^{\alpha/\eta}, \\ e^\alpha &= e^{\alpha_0} \left(\frac{1 - R_0/R}{1 + R_0/R} \right)^{1/\eta}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$e^\beta = e^{\beta_0} (1 + R_0/R)^2 \left(\frac{1 - R_0/R}{1 + R_0/R} \right)^{\frac{(\alpha-1+\eta)}{\eta}}.$$

Здесь введены новые обозначения для постоянных интегрирования

$$\alpha = \frac{V_s}{m_s}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2BC}}{m_s}, \quad (16)$$

$$R_0 = \frac{\eta \chi_0 m_s}{2}, \quad \chi_0 = 1/C.$$

Нетрудно показать, что полевые уравнения задачи удовлетворяются, если выполнено соотношение

$$\eta^2 = (a-1)^2 + a - \frac{1}{2} \zeta a^2, \quad (17)$$

кроме того, в (16) учтена асимптотическая псевдоевклидовость метрики.

Замечание 2.1. Йордан [5], а вслед за ним другие авторы [6], основываясь на ошибочных рассуждениях, полагали, что

$$a = \frac{2}{3 - 2\zeta}$$

является универсальной константой ОТГ. В [9] было показано, что постоянная интегрирования a зависит от значения центральной плотности, т. е. меняется от конфигурации к конфигурации (кстати, последнее обстоятельство не было замечено Брансом [3]).

3. *Внутреннее решение. Граничные условия.* Для того, чтобы приспособить систему (8)—(13) к потребностям численного интегрирования, все искомые функции представим в виде

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 y_1(x), & \beta &= \beta^0 + y_5(x), & a &= a^0 + y_3(x), \\ V &= V^0 y_2(x), & m &= m^0 y_4(x), & & \\ U &= y_6(x) V^0, & \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon \chi^0 e^{2\beta^0}, & q &= y_7(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что

$$V^0 = m^0 = U^0 = \frac{\varepsilon^{x^2 + \beta^0}}{\chi^0},$$

а ε можно принять, например, равным единице. Тогда получится эквивалентная система уравнений для функций $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, 7$). В отличие от эйнштейновской теории выбор граничных условий y_i в ОТГ оказывается неоднозначным. Существует несингулярный вариант начальных условий (в центре конфигурации $x_c = 0$)

$$\begin{aligned} y_1(x_c) &= 1 + \frac{C_1}{6} x^2, & y_2(x_c) &= \frac{C_1}{3} x^3, & y_3(x_c) &= \frac{C_2}{6} x^2, \\ y_4(x_c) &= C_2 x^3/3, & y_5(x_c) &= -\frac{x^2}{8} \left(\frac{C_2 - C_1}{3} + C_3 \right), & & \\ y_6(x_c) &= \frac{x^3}{4} \left(\frac{C_2 - C_1}{3} + C_3 \right), & y_7(x_c) &= q_c - \frac{C_2(1 + q_c)}{6} x^2, \end{aligned} \quad (19)$$

а также сингулярный вариант ($x_c = 1$)

$$\begin{aligned}
 y_1(x_c) &= (x-1)^p, \quad p = \sqrt{\frac{2}{2-\zeta}}, \\
 y_2(x_c) &= p + C_1 \frac{(x-1)^{3n+1}}{3n+1}, \quad n = p+1, \\
 y_3(x_c) &= C_2 \frac{(x-1)^{3n+1}}{(3n+1)^2}, \quad C_1 = \frac{3y_7(1)-1}{2\zeta-3}, \\
 y_4(x_c) &= C_2 \frac{(x-1)^{3n+1}}{3n+1}, \quad C_2 = \frac{\zeta-2-3y_7(1)(1-\zeta)}{2\zeta-3}, \\
 y_5(x_c) &= n \ln(x-1), \quad C_3 = \frac{\zeta-1-\zeta y_7(1)}{2\zeta-3}, \\
 y_6(x_c) &= -n + (x-1) + C_3 \frac{(x-1)^{3n+1}}{3n+1}, \\
 y_7(x_c) &= y_7(x_c=1) - C_2 \frac{(1+y_7(x_c=1))}{(3n+1)^2} (x-1)^{3n+1}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Обратим внимание на то, что в расчете используется координата $x=R/R_c$, где R_c константа, определяемая из граничных условий. Известно, что метрика в однородных координатах допускает такие масштабные преобразования, а это для нашей задачи немаловажно, поскольку нулевому значению шварцшильдовской координаты в случае сингулярных начальных условий соответствует отличное от нуля значение $R=R_c$. Интегрирование ведется до значения x_s , определяемого условием $q=0$. На границе конфигурации ($x=x_s$) внешнее и внутреннее решения сшиваются условием непрерывности метрических коэффициентов, гравитационного скаляра χ и их первых производных. В результате, постоянные интегрирования могут быть подсчитаны с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{y_2(x_s)}{y_4(x_s)}, \quad R_c = \frac{1}{V\chi_0 B}, \\
 \frac{x_0}{x_s} &= -\frac{1}{\eta} \left(\frac{y_6(x_s)}{y_4(x_s)} + a - 1 \right), \\
 e^{x_0} &= \left(\frac{1-x_0/x_s}{1+x_0/x_s} \right)^{1/\eta} e^{-y_3(x_s)}, \\
 \chi_0 &= \frac{8\pi}{y_1(x_s)} \left(\frac{3-2\zeta}{4-2\zeta} \right) \left(\frac{1-x_0/x_s}{1+x_0/x_s} \right)^{a/\eta},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{e^{\lambda}}{R_c} \equiv B = \left(1 + \frac{x_0}{x_s}\right)^2 \left(\frac{1 - x_0/x_s}{1 + x_0/x_s}\right)^{\frac{a + \eta - 1}{\eta}} e^{-y_1(x_s)}$$

M и R_s — масса и радиус конфигурации, определенные с точностью до корня квадратного из плотности энергии, при этом равны

$$\sqrt{\varepsilon} M = \frac{2}{\eta^2} \frac{x_s}{B \sqrt{\chi_0}} \left(1 - a - \frac{y_0(x_s)}{y_4(x_s)}\right), \quad \sqrt{\varepsilon} R_s = \frac{x_s}{B \sqrt{\chi_0}}$$

4. *Результаты интегрирования.* Рис. 1, 2 представляют полученные на ЭВМ результаты численного интегрирования. На рис. 1 — зависимость массы от параметра $a = \frac{3q_c + 1}{q_c + 1}$ (q_c принимает для модели несжимаемой жидкости значения от нуля до ∞ , что соответствует $1 \leq a < 3$) в случае несингулярных начальных условий для различных ζ . Рис. 2 аналогичен рис. 1, с той разницей, что начальные условия сингулярны. Интересно отметить то обстоятельство, что в случае слабых полей ($q \ll 1$) константа a может быть выражена следующим образом: несингулярные начальные условия,

$$a = \frac{V_s}{m_s} = \frac{1}{2 - \zeta} \quad (22)$$

сингулярные начальные условия,

$$a = \frac{V_s}{m_s} = \frac{1}{2 - \zeta} + \frac{2}{m_s} \frac{1}{\sqrt{2 - \zeta}} \quad (23)$$

что соответствует различным условиям на больших расстояниях от конфигурации. Для (22) гравитационное поле имеет ньютоновский предел и $\varphi \rightarrow 0$, а в случае (23) можно, например, привлечь известную доктрину Маха—Эйнштейна, суть которой сводится к индукции инерции гравитационным потенциалом удаленных масс. Вселенная при этом — модель такого множества тел, в центральной области которого глобальный гравитационный потенциал оценивается $\frac{3}{2} G \frac{M}{R} = \varphi$. Как известно, при скалярном взаимодействии эффективная инертная масса m^* зависит от внешнего потенциала, причем притяжение связано с отрицательной индукцией массы [7]

$$m^* = m - \varphi/C^2.$$

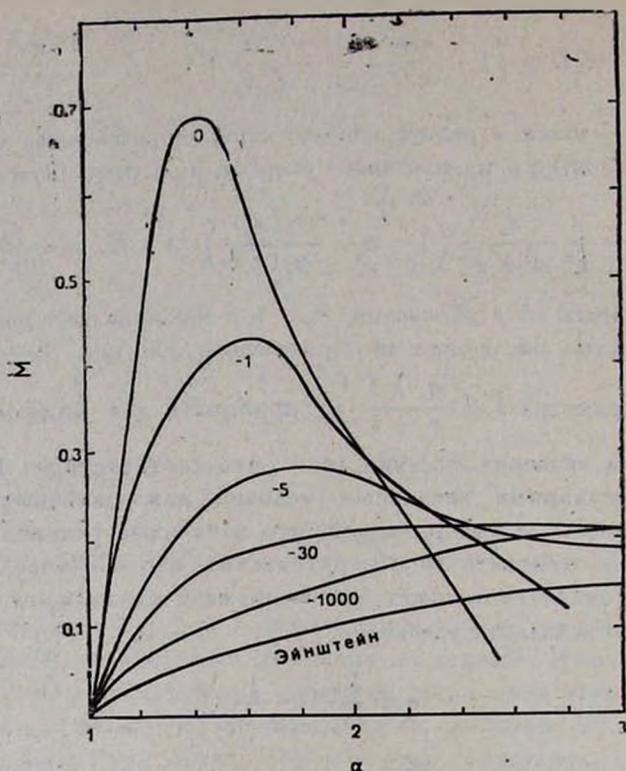


Рис. 1. Зависимость массы M конфигурации от параметра $\alpha = (3q_c + 1)/(q_c + 1)$ для несингулярных начальных условий.

Видимо, так можно объяснить тот факт, что на рис. 2 кривая с $\zeta = -1000$ так существенно отличается от эйнштейновского предела, и использовать это различие для оценки среднего Φ . В связи с эйнштейновскими опытными данными можно сказать следующее. В рамках механики, согласующейся с доктриной Маха—Эйнштейна, например, при рассмотрении движения перигелия планет, получается эффект с противоположным знаком [7, 10]. Поэтому оценка конкретно этого эффекта становится следующей:

$$\delta\Phi = \left(\frac{4 - 3\zeta}{6 - 3\zeta} + \Delta \right) \delta\Phi_{\text{Э}}$$

И если близкий к эйнштейновскому результат в случае несингулярных начальных условий получается при $|\zeta| > 500$, то теперь это значение смещается в область малых значений $|\zeta|$. А это интересно в связи с тем, что (это видно из рисунков) для определенных ζ кривые становятся немонотонными, причем с уменьшением $|\zeta|$ максимум растет и смещается в сто-

рону малых q_c , а область существования равновесных конфигураций чрезвычайно сужается.

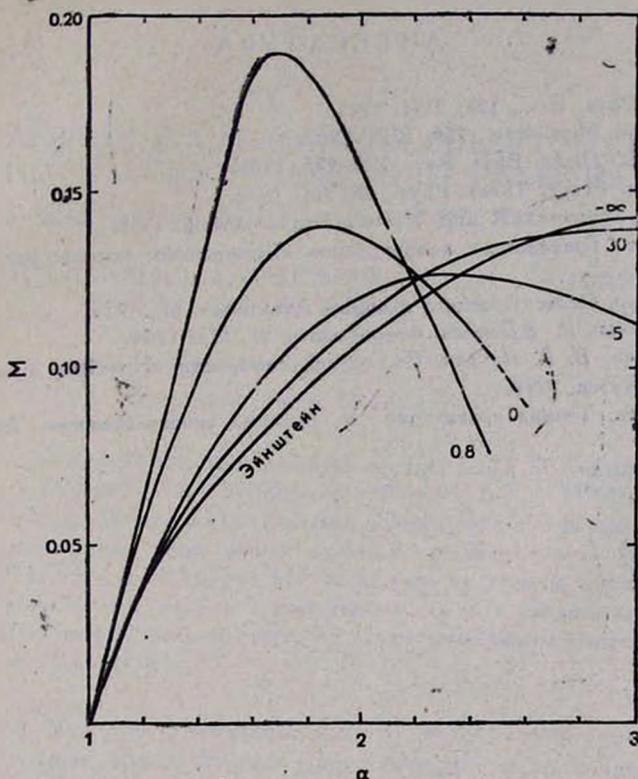


Рис. 2. Зависимость массы M конфигурации от параметра $\alpha = (3q_c + 1)/(q_c + 1)$ для сингулярных начальных условий.

Авторы благодарны участникам семинара кафедры теоретической физики за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

STELLAR CONFIGURATIONS FROM INCOMPRESSIBLE FLUID IN GENERALIZED THEORY OF GRAVITATION

R. AVAKIAN, G. HAROUTYAN, V. PAPOYAN

For two different versions of boundary conditions the integral parameters of the configurations with uniform distributions of matter in frameworks of generalized theory of gravitation has been calculated. It

is shown that one can essentially expand the spectrum of the values of macroscopical parameters, using a non traditional approach (for instance, from Mach's principle) for the interpretation of the results obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Brans, *Phys. Rev.*, 125, 2194, 1962.
2. A. Salmona, *Phys. Rev.*, 154, 1218, 1967.
3. C. Brans, R. Dicks, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
4. T. Matsuda, *Progr. Theor. Phys.*, 48, 341, 1972.
5. P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, 1955.
6. Г. С. Саакян, *Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс*, Наука, М., 1972.
7. Г. Ю. Тредер, *Относительность инерции*, Атомиздат, М., 1975.
8. Г. Г. Арутюнян, В. В. Папоян, *Астрофизика*, 21, 175, 1984.
9. Р. М. Авакян, В. В. Папоян, *Сб. трудов совещания «Новейшие проблемы гравитации»*, Якутск, 1990.
10. Г. Ю. Тредер, *Теория гравитации и принцип эквивалентности*, Атомиздат, М., 1973.