ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УКД 517.957

С. Г. РУБАНОВИЧ

О ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть G — ограниченная область в R^n с границей $\Gamma \in C^1$. В настоящей статье будет изучена краевая задача в $G \times [0, T]$ для линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x, t) = F(t, u), \tag{0.1}$$

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + u|_\Gamma = 0, \tag{0.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{0.3}$$

где $F(t, u)$ и $\alpha(x)$ — непрерывные функции, $\alpha(x) \geq 0$ на Γ; L — эллиптический оператор:

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{0.4}$$

причем для всех $x \in G$ и $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq k\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2;\ k = \mathrm{const} > 0,$$

коэффициенты $a_{ij}(x) \in C^1(G)$; $b_j(x) \in C(G)$; $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали. Всегда будем предполагать, что $F(t, 0) \geq 0$ при $0 \leq t < \infty$.

Нас интересует такое наибольшее значение T_0, что в цилиндре $G \times [0, T]$ существует классическое решение задачи (0.1)—(0.3). В параграфе 2 методом, названным „метод квазилинеаризации", строятся верхнее и нижнее решения задачи (0.1)—(0.3), благодаря чему удается найти достаточно точные оценки сверху и снизу для T_0. Построенные верхнее и нижнее решения во многих случаях отличаются настолько мало, что их можно считать решением задачи (0.1)—(0.3). § 1 посвящен сравнению решений задачи с различными функциями $F(t, u)$ и $u_0(x)$, откуда следует единственность решения даже в том случае, когда $F(t, u)$ не удовлетворяет по u условию Липшица. В § 4 выясняются условия устойчивости решения задачи (0.1)—(0.3), когда $T_0 = \infty$, относительно возмущения $u_0(x)$ и $F(t, u)$, при условии, что первоначальная функция $F(t, u)$ вогнута относительно u. Эти условия оказались совпадающими с условиями разрешимости задачи (0.1) — (0.3) в окрестности (в пространстве C) функций $u_0(x)$ и $F(t, u)$ (см. т. 3.3 и следствие 3.4), которые легко записываются в явном виде благодаря результатам § 2. § 3 посвящен случаю, когда $F(t, u) = F(u)$; $T_0 = \infty$, и изучаются условия стабилизации решения $u(x, t)$ при $t \to \infty$ к решению эллиптической задачи в G:

$$Lv + F(v) = 0; \ \alpha(x) \frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0. \tag{0.5}$$

Условия стабилизации наиболее хорошо выглядят в случае вогнутой функции $F(u)$. Тогда они совпадают с условиями разрешимости задачи (0.1)—(0.3) в окрестности (в пространстве C) функций $F(u)$ и u_0 и легко проверяются с помощью результатов § 2. При этом, стабилизация происходит с показательной скоростью и получены явные оценки скорости стабилизации.

§ 5 посвящен получению оценок линейных задач, используемых в „методе квазилинеаризации" (см. дальше введение).

Задача такого рода возникла перед автором при изучении процесса теплового пробоя конденсаторов. Настоящая статья содержит математическое обоснование методов, применявшихся в работах [1, 2]. Все рассмотренные вопросы изучались многими авторами [см. [3, 6] и цитированную там литературу). Предлагаемый подход к каждому из них отличается от применявшихся ранее и дает, конкретно для задачи (0.1)—(0.3), более точные результаты.

В дальнейшем удобно будет пользоваться терминологией линейных полугрупп [7]. Обозначим через $U(t)$, $t \geqslant 0$ полугруппу операторов краевой задачи в $G \times [0, \infty)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0; \ \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial n} + u|_\Gamma = 0 \tag{0.6}$$

(т. е. $U(t)\, u_0(x) = u(x, t)$, где $u(x, t)$ удовлетворяет (0.6) и (0.3)) Известно, что оператор $U(t)$ положителен (сохраняет конус положительных функций). Поэтому

$$\|U(t)\|_C = \max_{x \in G} u(x, t) \leqslant M_\lambda e^{-\lambda t}, \tag{0.7}$$

где $u(x, t)$ есть решение (0.6) с

$$u(x, 0) = 1; \tag{0.8}$$

λ — любое число из интервала $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$, где λ_1 — первое собственное число краевой задачи

$$L\varphi + \lambda\varphi = 0; \ \alpha(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi|_\Gamma = 0, \tag{0.9}$$

M_λ — постоянная, которая будет часто фигурировать в формулировках результатов. Если известна M_{λ_1}, то с помощью теоремы о трех прямых [8, стр. 560] нетрудно получить

$$M_\lambda = M_{\lambda_1}^{\lambda/\lambda_1}. \tag{0.10}$$

В § 5 для $L = \Delta$ (оператор Лапласа) для сферически симмет-ных задач в n-мерном шаре G получено равенство

$$M_{l_1} = \max\left[\varphi_1(x)\int\limits_G \varphi_1(y)\,dy\ \right] \Big/ \left(\int\limits_G \varphi_1^2(y)\,dy = 1\right), \qquad (0$$

где φ_1 — первая собственная функция краевой задачи (0.9). Так функция в квадратных скобках является пределом $e^{\lambda_1 t} u(x, t)$ $t \to \infty$, то (0.11) есть наименьшая константа M_{l_1}. Формула (0.11) ко распространяется на произведения шаров. Из физических сооб-жений можно предположить, что такая оценка будет и в общем случ Однако, доказать это автору не удалось. В случае задачи Дири найдена (не наименьшая) константа M_{l_1}.

В терминах полугрупп решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = f(x, t) - kw \ (k = \mathrm{const}) \qquad (0.1$$

с краевыми условиями (0.2)—(0.3) примет вид [7, стр. 159]:

$$w(x, t) = e^{-kt}\, U(t)\, u_0(x) + \int\limits_0^t U(t-\tau)\, e^{k(\tau - t)} f(x, \tau)\, d\tau. \qquad (0.1$$

Для нелинейных уравнений мы будем использовать следующи известные результаты [3]. Пусть существует в $G \times [0, T]$ функци $v(x, t) \geqslant 0$ (верхнее решение), такая, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv \geqslant F(t, v), \qquad (0.14$$

$$\alpha(x)\,\frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma \geqslant 0, \ v(x, 0) \geqslant u_0(x) \geqslant 0 \qquad (0.15)$$

и существует число k такое, что $F(t, u) + ku$ при каждом $t \in [0, T]$ не убывает по u при $0 \leqslant u \leqslant \max v(x, t)$. Тогда в цилиндре $G \times [0, T]$ существует неотрицательное решение $u(x, t) \leqslant v(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3), которое является пределом неубывающей последовательности функций:

$$v_0(x, t) = 0, \ v_{j+1}(x, t) = e^{-kt}\, U(t)\, u_0(x) +$$
$$+ \int\limits_0^t e^{-k(t-\tau)}\, U(t-\tau)\,[F(\tau, v_j(x, \tau)) + kv_j(x, \tau)]\, d\tau. \qquad (0.16)$$

§ 1. Сравнение решений

Обозначим через $\mathrm{int}\, G$ внутренность области G и пусть функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ непрерывны в замкнутом цилиндре $G \times [0, T]$ и обладают там производными по x, а в цилиндре $\mathrm{int}\, G \times [0, T]$ обладают вторыми производными по x, производными по t и удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu \leqslant \Phi(x, t, u, \nabla u) \left(\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv \geqslant \Phi(x, t, v, \nabla v), \tag{1.2}$$

где $\Phi(x, t, u, \xi)$ — некоторая функция ($\xi \in R^n$), и пусть

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + g(x, t, u)|_\Gamma \leqslant \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + g(x, t, v)|_\Gamma. \tag{1.3}$$

Следующая теорема 1.1 отвечает на вопрос, когда можно сказать, что $u(x, t) \leqslant v(x, t)$ при условии, что $u(x, 0) \leqslant v(x, 0)$. Новым в ней, по-видимому, является лишь то, что мы накладываем менее ограничительное условие на функции Φ и g, чем дифференцируемость (и даже условие Липшица) по u. Идеи, лежащие в основе ее доказательства появлялись в различной форме у многих авторов.

Лемма 1.1. *Пусть существует константа* $k \geqslant 0$, *такая, что для каждого* $x \in G$ *и* $t \in [0, T]$ *имеет место оценка:*

$$F(x, t, \mu_1, \xi) - F(x, t, \mu_2, \xi) > k(\mu_1 - \mu_2)$$

при условии, что $\mu_1 < \mu_2$;

$$\min_{x \in G} v(x, t) \leqslant \mu_j \leqslant \max_{x \in G} u(x, t), \quad j = 1, 2, \tag{1.4}$$

$$|\xi| \leqslant \max(|\nabla u(x, t)|, |\nabla v(x, t)|) \tag{1.5}$$

и еще — оценка:

$$|F(x, t, \mu, \xi^{(1)}) - F(x, t, \mu, \xi^{(2)})| \leqslant k|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|,$$

при условии, что μ *лежит на интервале* (1.4), *а* $\xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ *удовлет... воряют оценке* (1.5). *Пусть, также, при каждом* $x \in \Gamma$ *и* $t \in [0,$ ... *функция* $g(x, t, \mu) + k\alpha(x)\mu$ *строго возрастает по* μ *на интерв... ле* (1.4). *Тогда в условиях, указанных в начале параграфа, и* (... $t) \leqslant v(x, t)$, *если только* $u(x, 0) \leqslant v(x, 0)$.

Доказательство. Зададим на G гладкую функцию $w(x)$ такую, что

$$w(x) \geqslant 1; \quad \frac{\partial w}{\partial n} - kw|_\Gamma = 0. \quad ($$

Через M обозначим число, оценивающее функции:

$$(w(x))^{-1}|Lw(x)| \leqslant M; \quad (w(x))^{-1}|\nabla w(x)| \leqslant M.$$

Сделаем замену переменной

$$u = e^{(kM+k+M)t} w(x) p(x, t); \quad v = e^{(kM+k+M)t} w(x) q(x, t).$$

Тогда неравенства (1.1) и (1.2) перепишутся в виде:

$$w\left(\frac{\partial p}{\partial t} - Lp\right) \leqslant e^{-(kM+k+M)t}\left[\Phi(x, t, u, \nabla u) - \frac{Lw}{w}u - \right.$$

$$\left. - (kM + k + M)u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right],$$

$$w\left(\frac{\partial q}{\partial t}-Lq\right)\geqslant e^{-(kM+k+M)t}\left|\Phi(x,t,v,\nabla v)-\frac{Lw}{w}v-\right.$$
$$\left.-(kM+k+M)v-2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right|. \tag{1.8}$$

Если утверждение леммы неверно, то существует точка (x_0, t_0), где $t_0>0$, отрицательного минимума функции $q-p$. Если $x_0\in\operatorname{int} G$, то в точке (x_0, t_0) будет $\frac{\partial}{\partial t}(q-p)\leqslant 0$ и $\nabla p=\nabla q$. Так как в этой точке $v<u$, то

$$\Phi(x,t,v,\nabla v)-\Phi(x,t,u,\nabla u)>-k|\nabla(v-u)|+k(v-u).$$

Нетрудно видеть, что

$$|\nabla(v-u)|\leqslant(w(x_0))^{-1}|\nabla w(x_0)|(u-v)\leqslant M(u-v),$$

после чего нетрудно заключить, что в точке (x_0, t_0) правая часть (1.7) меньше, чем правая часть (1.8), т. е. в этой точке $L(q-p)<0$, что невозможно в точке минимума.

Пусть теперь $x_0\in\Gamma$. Согласно (1.6) имеем

$$\alpha w\frac{\partial p}{\partial n}+g(x,t,u)+k\alpha u\leqslant\alpha w\frac{\partial q}{\partial n}+g(x,t,v)+k\alpha v.$$

В точке минимума $\frac{\partial}{\partial n}(q-p)\leqslant 0$, но так как $v<u$, то $g(x,t,u)+k\alpha u>$ $>g(x,t,v)+k\alpha v$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 1.2. Пусть для каждого интервала $a\leqslant\mu\leqslant b$ существует число $k=k(a,b)$ такое, что при каждом $t\in[0,T]$ функция $F(t,\mu)-k\mu$ монотонно убывает по $\mu\in[a,b]$. Тогда решение задачи (0.1)—(0.3), если существует, то единственно.

Пример. Задача $\frac{du}{dt}=\sqrt{u}$, $u(0)=0$ не удовлетворяет условиям следствия 1.2. Ее решениями будут $u_1=0$, $u_2=\frac{t^2}{4}$.

§ 2. Метод квазилинеаризации

1°. Существование решения. В конце введения указано, что если существует число k, такое, что функция $F(t,u)+ku$ не убывает по u, то для доказательства существования решения достаточно построить верхнее решение $v(x,t)$, удовлетворяющее условиям (0.14), (0.15). Будем искать $v(x,t)$ как решение линейного уравнения в $G\times[0,T]$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-Lv=c(t)v+d(t) \tag{2.}$$

с краевыми условиями (0.2), (0.3). Коэффициенты $c(t)$ и $d(t)$ подбираются так, чтобы при каждом t

$$c(t)\,\mu + d(t) \geq F(t, \mu), \tag{2.2}$$

где μ принимает все значения функции $v(x, t)$ (при каждом фиксированном t) в области G.

Теорема 2.1 (метод квазилинеаризации). *Каждой паре неотрицательных чисел t и μ сопоставим числа $c(t, \mu)$ и $d(t, \mu)$ так, чтобы*

$$F(t, u) \leqslant c(t, \mu)\, u + d(t, \mu) \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant M_\lambda \mu,$$

и чтобы число $c(t, \mu)\,\mu + d(t, \mu)$ было минимальным. Тогда, если на интервале $[0, T]$ существует ограниченное решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} = (c(t, \mu) - \lambda)\,\mu + d(t, \mu), \tag{2.3}$$

$$\mu(0) = \mu_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{M_\lambda} \sup_{0 < t < \infty} e^{\lambda t} \|U(t)\, u_0\|_C, \tag{2.4}$$

то в цилиндре $G \times [0, T]$ существует решение задачи (0.1)—(0.3), причем, $u(x, t) \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$. Более того, если в (2.1) положить $c(t) = c(t, \mu)$, $d(t) = d(t, \mu)$, то решение $v(x, t)$ ограничивает сверху решение $u(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3).

Доказательство. Легко проверить (с использованием представления (0.13) решения уравнения (0.12)), что решение задачи (2.1), (0.2), (0.3) представляется в виде

$$v(x, t) = \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t c(z)\, dz\right) U(t - \tau)\, d(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \exp\left(\int_0^t c(z)\, dz\right) U(t)\, u_0. \tag{2.5}$$

Очевидно, $d(t, \mu) \geqslant F(t, 0) \geqslant 0$, и в силу (0.7) и (2.4)

$$0 \leqslant v(x, t) \leqslant M_\lambda \left[\int_0^t \exp\left(\int_\tau^t (c(z) - \lambda)\, dz\right) d(\tau)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \mu_0 \exp\left(\int_0^t (c(z) - \lambda)\, dz\right)\right] \stackrel{\mathrm{df}}{=} M_\lambda\, \mu(t).$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mu}{dt} = (c(t) - \lambda)\,\mu(t) + d(t), \quad \mu(0) = \mu_0.$$

Выбор коэффициентов $c(t)$ и $d(t)$, указанный в формулировке теоремы, обеспечивает минимальность $\mu(t)$ при условии, что неравенство (2.2) выполнено при $0 \leqslant \mu \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$. Так как $0 \leqslant v(x, t) \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$, то $v(x, t)$ есть верхнее решение.

Итак, если существует число k, такое, что $F(t, u) + ku$ не убывает по u, то теорема доказана. Пусть $F(t, u)$ произвольна. Тогда можно построить неубывающую последовательность функций $F_j(t, u) \to F(t, u)$, $j \to \infty$ при $0 < t \leq T$ и $0 \leq u \leq M$, $\max\limits_{0 \leq t \leq T} \mu(t)$, таких, что $F_j(t, 0) \geqslant 0$ и $F_j(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u равномерно по $t \in [0, T]$. Согласно доказанному выше в $G \times [0, T]$ существуют функции $u_j(x, t)$, удовлетворяющие (0.1)—(0.3) с заменной F на F_j и ограниченные сверху верхним решением $v(x, t)$, $j = 1, 2, \cdots$.

Лемма 1.1. показывает, что последовательность u_j не убывает. Стандартным образом получаем, что функция $u(x, t) = \lim u_j(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3). Теорема 2.1 доказана.

2°. Несуществование решения. Мы построим функцию $w(x, t)$, ограничивающую решение задачи (0.1)—(0.3) снизу. Эту функцию будем искать в виде решения уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = \alpha(t)\, w + \beta(t) \tag{2.6}$$

с краевыми условиями (0.2)—(0.3). Коэффициенты α и β подбираются так, чтобы при каждом $t \in [0\, T]$ и при всех значениях μ функции $w(x, t)$ (при фиксированном t) выполнялось неравенство:

$$\alpha(t)\, \mu + \beta(t) \leqslant F(t, \mu). \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. *Каждой тройке чисел $t \geqslant 0$; $\mu > \nu \geqslant 0$ (не исключается, что $\mu = \infty$) сопоставим числа $\alpha(t, \mu, \nu)$ и $\beta(t, \mu, \nu)$ так, чтобы*

$$F(t, u) \geqslant \alpha(t, \mu, \nu)\, u + \beta(t, \mu, \nu) \quad \textit{при} \quad 0 \leq u \leq \mu$$

и чтобы число $\alpha(t, \mu, \nu)\, \nu + \beta(t, \mu, \nu)$ было наибольшим. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu}{dt} = (\alpha(t, \mu, \nu) - \lambda_1)\, \nu + \beta(t, \mu, \nu) \\ \dfrac{d\mu}{dt} = (\alpha(t, \mu, \nu) - \lambda_1)\, \mu + \beta_1(t, \mu, \nu), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\nu(0) = \nu_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_G u_0(x)\, \varphi_1(x)\, dx; \quad \mu(0) = \mu_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{t > 0} e^{\lambda_1 t} \| U(t)\, u_0 \|_C, \tag{2.9}$$

где λ_1 есть первое собственное число краевой задачи (0.9), φ_1—первая собственная функция, нормированная условием:

$$\int\limits_G \varphi_1(x)\, dx = 1,$$

$$\beta_1(t, \mu, \nu) = \begin{cases} \beta(t, \mu, \nu), & \text{если } \beta(t, \mu, \nu) < 0 \\ M_\lambda\, \beta(t, \mu, \nu), & \text{если } \beta(t, \mu, \nu) \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда если на интервале $[0, T]$ не существует решения $\mu(t)$, $\nu(t)$ системы (2.8)—(2.9) с ограниченной функцией $\nu(t)$ (обращение μ в ∞

при $t \geqslant t_0$ значения не имеет), то в цилиндре $G\times[0, T]$ не существует ограниченного решения задачи (0.1)—(0.3). Более того, если в (2.6) положить $\alpha(t) = \alpha(t, \mu(t), \nu(t))$, $\beta(t) = \beta(t, \mu(t), \nu(t))$, то решение $w(x, t)$ задачи (2.6), (0.2), (0.3) ограничивает снизу решение задачи (0.1)—(0.3).

Доказательство. Так как в (2.6) функция $\beta(t)$ может быть и отрицательной, то для оценки максимума решения w не годятся рассуждения теоремы 2.1. Однако это решение оценивается сверху решением $\overline{w}(x, t)$ краевой задачи:

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} - L\overline{w} = \alpha(t)\,\overline{w} + \overline{\beta}(t) \tag{2.10}$$

с краевыми условиями (0.1) — (0.3), где при $\beta(t) \geqslant 0$ функции $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ совпадают с α и β соответственно, а для значений t, в которых $\beta(t) > 0$, полагается $\overline{\beta}(t) = 0$ и $\overline{\alpha}(t)$ ищется из условия:

$$\overline{\alpha}(t)\, u \geqslant \alpha(t)\, u + \beta(t), \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant \max_{x\in G} \overline{w}(x, t). \tag{2.11}$$

Рассуждая как в теореме 2.1, находим, что $\overline{w}(x, t) \leqslant \mu(t)$, где $\mu(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} = \overline{\alpha}(t)\,\mu + M_{\lambda_1}\overline{\beta}(t) - \lambda_1\mu, \quad \mu(0) = \mu_0,$$

а μ_0 определено в (2.9). Ясно, что условие (2.11) будет удовлетворено, если $\overline{\alpha}(t)\,\mu(t) = \alpha(t)\,\mu(t) + \beta(t)$, при $\beta(t) < 0$, что и объясняет появление второго уравнения в системе (2.8). Первому уравнению этой системы удовлетворяет функция

$$\nu(t) = \int_G w(x, t)\,\varphi_1(x)\,dx.$$

Коэффициенты α и β в условии теоремы подбираются так, чтобы $\nu(t)$ была наибольшей. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Стабилизация на бесконечности

Теорема 3.1. *Пусть в (0.3) $u_0(x) = 0$, а в (0.1) $F(t, u) = F(u)$. Тогда для существования ограниченного в $G\times[0, \infty)$ решения $u(x, t)$ задачи (0.1) – (0.3) необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательное решение эллиптической краевой задачи в G:*

$$Lv + F(v) = 0, \quad \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0. \tag{3.1}$$

При этом существует минимальное решение $v(x) \geqslant 0$ задачи (3.1) и минимальное решение $\underline{u}(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3), которое не убывает по t и $\lim_{t\to\infty} \underline{u}(x, t) = v(x)$ равномерно по $x \in G$.

Доказательство. Пусть существует неотрицательное решение $v(x)$ задачи (3.1). Тогда функция $\overline{u}(x, t) = v(x)$ является решением задачи (0.1)—(0.2) с начальным условием $\bar{u}(x, 0) = v(x)$. Так как $u_0(x) = 0 \leqslant v(x)$, то $\bar{u}$ есть верхнее решение задачи (0.1)—(0.3), и $\underline{u}(x, t)$ строится как в доказательстве теоремы 2.1.

Обратно, пусть в $G \times [0, \infty)$ существует решение $u(x, t) \leqslant c < \infty$ задачи (0.1)—(0.3) с $u_0 = 0$ и $F(t, u) = F(u)$. Предположим вначале, что существует число k такое, что $F(u) + ku$ не убывает при $0 \leqslant u \leqslant c$. Тогда можно считать, что решение $\underline{u}(x, t)$ строится с помощью последовательных приближений (0.16). Предположим, что в этой последовательности для некоторого $j \geqslant 0$ функция $v_j(x, t)$ не убывает по t и равномерно по $x \in G$ стремится к своему пределу $w_j(x)$ при $t \to \infty$ (это имеет место при $j = 0$). Докажем, что то же самое имеет место и для $v_{j+1}(x, t)$. Действительно, так как $F(u) + ku$ не убывает и оператор $U(t)$ положителен, то при $\Delta t > 0$

$$v_{j+1}(x, t + \Delta t) = \int_0^t U(t - \tau) e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau + \Delta t)) +$$

$$+ k v_j(x, \tau + \Delta t)] d\tau + \int_0^{\Delta t} U(t + \Delta t - \tau) e^{-k(t+\Delta t-\tau)} \times$$

$$\times [F(v_j(x, \tau)) + k v_j(x, \tau)] d\tau \geqslant v_{j+1}(x, \tau),$$

что доказывает неубывание по t. Далее

$$v_{j+1}(x, t) = \int_0^{t/2} U(t - \tau) e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau)) + k v_{j+1}(x, \tau)] dt +$$

$$+ \int_{t/2}^{t} U(t - \tau) e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau)) + k v_j(x, \tau)] d\tau. \tag{3.2}$$

Так как $v_j(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant c$, то функция $F(v_j(x, t)) + k v_j(x, t)$ равномерно ограничена по x, t, j. Поэтому благодаря оценке (0.7), заключаем, что первое слагаемое в правой части (3.2) равномерно по $x \in G$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Второе слагаемое переписывается в виде:

$$\int_0^{t/2} U(\tau) e^{-k\tau} [F(v_j(x, t - \tau)) + k v_j(x, t - \tau)] d\tau$$

и в силу предположения индукции равномерно по $x \in G$ стремится к

$$w_{j+1}(x) = \int_0^{\infty} U(\tau) e^{-k\tau} [F(w_j(x)) + k w_j(x)] d\tau$$

при $t \to \infty$, что и требовалось. Последовательность $w_0, w_1, \cdots$, не убывает по j и ограничена сверху (числом c). Поэтому существует предел $v(x) = \lim_{j \to \infty} w_j(x)$. Так как

$$L w_{j+1} - k w_{j+1} + F(w_j) + k w_j = 0,$$

то последовательность $L w_j$ ограничена, откуда нетрудно заключить, что $w_j(x) \to v(x)$ при $j \to \infty$ равномерно по $x \in G$ и $v(x)$ удовлетворяет краевой задаче (3.1). После этого проверка сходимости $u(x, t) \to v(x)$ при $t \to \infty$ не представляет труда. В случае произвольной $F(u)$ к приведенным выше рассуждениям следует добавить рассуждение конца доказательства теоремы 2.1. Теорема 3.1 доказана.

Замечание. Из теоремы 3.1 сразу следует, что равномерная стабилизация к $v(x)$ будет иметь место при $0 \leqslant u_0(x) \leqslant v(x)$.

В случае, когда $F(u)$ вогнута, условия стабилизации описываются более явно и стабилизация происходит с показательной скоростью.

Теорема 3.3. *Пусть в* (0.1) $F(t, u) = F(u)$ *и существует производная* $F'(u)$, *неубывающая по* u. *Пусть в* $G \times [0, \infty)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $w(x, t)$ *краевой задачи*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = F(w) + \varepsilon w, \tag{3.3}$$

$$\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial n} + w|_\Gamma = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \tag{3.4}$$

где $w_0(x) = \delta = \mathrm{const} > 0$. *Предположим также, что* $w(x, t) \leqslant N < \infty$. *Тогда для любого числа* c $(0 \leqslant c < \delta)$, *как только начальная функция* $u_0(x) \leqslant c$, *решение* $u(x, t)$ *задачи* (0.1) — (0.3) *удовлетворяет неравенству*

$$-N \frac{F(0)}{\varepsilon\delta} e^{-\varepsilon t} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{c}{\delta}\right), \tag{3.5}$$

где $v(x)$ *есть наименьшее неотрицательное решение задачи* (3.1

Доказательство. Обозначим через $u(x, t, c)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) \equiv c$, а через $w(x, t, c)$ — решение задачи (3.3)-(3.4) с $w_0(x) = c$. При $c < \delta$ эти функции существуют и ограничен сверху числом N, так как во всех случаях $w(x, t)$ является верхн решением. При помощи стандартных рассуждений доказывается, ч эти функции дифференцируемы по параметру c и что производн

$v(x, t, c) = \dfrac{\partial u}{\partial c}$ и $z(x, t, c) = \dfrac{\partial w}{\partial c}$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = F'(u(x, t, c))\, v; \; \alpha(x) \frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0; \; v(x, 0, c) = 1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - Lz = [F'(w(x, t, c)) + \varepsilon]\, z; \; \alpha(x) \dfrac{\partial z}{\partial n} + z|_\Gamma = 0 \\ z(x, 0, c) = 1. \end{cases}$$

Из леммы 1.1 следует, что функция $w(x, t, c)$ не убывает по c. тывая, что $F'(w)$ тоже не убывает по w и применяя к (3.7) л 1.1, находим, что z не убывает по c. Значит, для удовлетворени равенства $w(x, t, c) \leqslant N$ при $0 \leqslant c \leqslant \delta$ необходимо, чтобы $z =$

$\leqslant \dfrac{N}{\delta - c}$. С другой стороны, функция $v_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} e^{\varepsilon t} v(x, t, c)$, где v есть решение задачи (3.6), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - Lv_\varepsilon = [F'(u(x, t, c)) + \varepsilon]\, v_\varepsilon .$$

Так как $u \leqslant w$, то из леммы 1.1. следует, что $v_\varepsilon(x, t, c) \leqslant z(x, t, c) \leqslant \dfrac{N}{\delta - c}$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial c}(x, t, c) \leqslant \frac{N}{\delta - c} e^{-\varepsilon t}. \tag{3.8}$$

Интегрируя эту оценку по c и учитывая, что в силу теоремы 3.1 $u(x, t, 0) \leqslant v(x)$, получаем верхнюю оценку (3.5) для $u(x, t, c)$. Нижнюю оценку вначале проверим для $u(x, t, 0)$. Заметим, что функция $v_0(x, t) = \dfrac{1}{F(0)} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t, 0)$ является решением краевой задачи (3.6) и в силу оценки (3.8)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t, 0) = F(0) \frac{\partial}{\partial c} u(x, t, 0) \leqslant F(0) \frac{N}{\delta} e^{-\varepsilon t},$$

откуда следует нижняя оценка (3.5) для $u(x, t, 0)$. Если $u_0(x) \leqslant c$ произвольна, то $u(x, t, 0) \leqslant u(x, t) \leqslant u(x, t, c)$, что завершает доказательство теоремы 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3 и дополнительно в $G \times [0, \infty)$ существует решение $\zeta(x, t) \leqslant N_1 < \infty$ уравнения*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - L\zeta = F(\zeta) + \varepsilon_1 \zeta,$$

удовлетворяющее условиям (3.4) с $w_0 = \psi(x)$, где $\psi(x) > 0$; $\varepsilon_1 > 0$. Тогда из условия $u_0(x) \leqslant c\psi(x)$, где $0 \leqslant c < 1$, следует

$$-N \frac{F(0)}{\varepsilon\delta} e^{-\varepsilon t} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -N_1 e^{-\varepsilon t} \ln(1 - c).$$

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.3.

Следствие 3.5. Пусть $F(t, u) = F(u)$ и $F'(u)$ не убывает. Пусть прямая $z = ky$ $(k \leqslant \lambda)$ пересекает кривую $z = F(y) + (M_\lambda - 1) \times F(0)$ в точках y_0 и y_1 $(y_0 \leqslant y_1)$. Если для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$|u_0(x)| \leqslant \beta y_1 \left(\alpha M_\lambda^{-1} + (1 - \alpha)\, \varphi_1(x) \left(\max_{x \in G} \varphi_1(x)\right)^{-1}\right)$$

то в $G \times [0, \infty)$ существует решение $u(x, t) \leqslant y_1$ задачи (0.1)—(0.3) и

$$-M_\lambda e^{(k-\lambda)t} \frac{F(0)}{\lambda - k} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -y_1 e^{(k-\lambda)t} \ln(1 - \beta).$$

Доказательство. Достаточно в следствии 3.4 положить

$$\psi(x) = y_1(\alpha M_\lambda^{-1} + (1-\alpha)\varphi_1(x)(\max_{x\in G}\varphi_1(x))^{-1}),$$

а для доказательства разрешимости использовать теорему 2.1, где с учетом вогнутости функции $F(u)$ следует положить

$$c(t, \mu) = \frac{F(M_\lambda \mu) - F(0)}{M_\lambda \mu}, \quad d(t, \mu) = F(0).$$

§ 4. Устойчивость

Теорема 4.1 посвящена возмущению $u_0(x)$, а теорема 4.2 — возмущению функции $F(t, u)$ (причем условие вогнутости накладывается лишь на первоначальную функцию $F(t, u)$).

Теорема 4.1. *Пусть в (0.1) $\frac{\partial}{\partial u} F(t, u)$ существует и не убывает по u. Пусть заданы функции $\psi_1(x) \geqslant 0$ и $\psi_2(x) \geqslant 0$. Обозначим через $u_j(x, t)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi_j(x)$, $j=1, 2$ и предположим, что в $G \times [0, \infty)$ существует решение $w(x, t) \leqslant N < \infty$ краевой задачи:*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = F(t, w) + \varepsilon w, \tag{4.1}$$

$$\alpha(x)\frac{\partial w}{\partial n} + w|_\Gamma = 0; \quad w(x, 0) = w_0(x), \tag{4.2}$$

где $w_0(x) = \psi_1(x) + \delta$, а $\varepsilon \geqslant 0$ и $\delta > 0$ — некоторые числа. Тогда из оценки $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \delta_1 < \delta$ следует оценка:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta}\right).$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi^+(x) = \max(\psi_1(x), \psi_2(x)), \quad \psi^-(x) = \min(\psi_1(x), \psi_2(x)),$$

и пусть $u^+(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^+(x)$, а $u^-(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^-(x)$. Тогда

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant u^+(x, t) - u^-(x, t).$$

Пусть $u(x, t, c)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^-(x) + c$, а $w(x, t, c)$ есть решение задачи (4.1)—(4.2) с $w_0(x) = \psi^-(x) + c$ $(0 \leqslant c \leqslant \delta)$. Рассуждая точно так же как в доказательстве теоремы 3.3, находим

$$u(x, t, \delta_1) - u(x, t, 0) \leqslant N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta}\right).$$

Остается заметить, что $u^-(x, t) = u(x, t, 0)$, а $u^+(x, t) \leqslant u(x, t, \delta_1)$. Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.1 показывает, что при $\varepsilon = 0$ решение $u(x, t)$ устойчиво относительно возмущения начальной функции, а при $\varepsilon > 0$ даже ассимптотически устойчиво.

Теорема 4.2 *Пусть функции* $f_1(t, u)$ *и* $f_2(t, u)$ *непрерывны;* $f_1(t, 0)\geqslant 0$, $f_2(t, 0)\geqslant 0$ *и существует производная* $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, *не убывающая по u. Предположим, что в* $G\times[0, \infty)$ *существует решение* $v(x, t)$ *задачи* (0.1)—(0.3) *с* $F(t, u)=f_1(t, u)+\varepsilon$, *где* $\varepsilon>0$ *и* $v(x, t)<N<\infty$. *Обозначим через* $u_j(x, t)$ *решение задачи* (0.1)—(0.3) *с* $F(t, u)=f_j(t, u)$, $j=1, 2$. *Тогда если* $|f_1(t, u)-f_2(t, u)|<\varepsilon_1<\varepsilon$ *при* $0\leqslant u\leqslant N$, *то*

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)|\leqslant -N\ln(1-\varepsilon_1/\varepsilon). \tag{4.3}$$

Доказательство. Обозначим через $u(x, t, c)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $F(t, u)=f_1(t, u)+c$. Так же как в теореме 4.1 находим

$$u_2(x, t)-u_1(x, t)\leqslant u(x, t, \varepsilon_1)-u(x, t, 0)\leqslant -N\ln\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right).$$

С другой стороны, существует функция $f_3(t, u)$ с неубывающей по u производной $\partial f_3/\partial u$, такая, что $f_3(t, 0)\geqslant 0$ и

$$f_1(t, u)-\varepsilon_1\leqslant f_3(t_0, u)\leqslant\min(f_1(t, u), f_2(t, u))$$

(следует иметь в виду, что по условию $(f_1-f_2)<\varepsilon$). Обозначим через $u_3(x, t)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $F(t_0, u)=f_3(t, u)$. Заменяя в приведенных выше рассуждениях f_1 на f_3, находим

$$u_1(x, t)-u_3(x, t)\leqslant -N\ln(1-\varepsilon_1/\varepsilon).$$

Остается заметить, что $u_2\geqslant u_3$. Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Условия теорем 4.1 и 4.2 приводятся к явному виду тем же способом, как это сделано в следствии 3.5.

§ 5. Оценка линейной полугруппы

Наша задача—найти константу M_λ из (0.10). Это мы сделаем в случае, когда $L=\Delta$ (оператор Лапласа). Рассмотрение сферически симметричного случая основано на лемме 5.1 о положительных мерах. Определение пространства S' и положительных мер можно найти в книге [9].

Лемма 5.1. *Пусть на оси* $-\infty<t<\infty$ *задана действительная обобщенная функция* $\varphi(t)\in S'$ *и известно, что преобразование Фурье* $\tilde{\varphi}(z)$ *есть мероморфная функция на комплексной плоскости с полюсами в точках* $i\lambda_1, i\lambda_2, \dots$, *где* $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — *действительные числа, причем в этой последовательности каждый полюс повторяется столько раз, какова его кратность. Предположим, что* $\sum\lambda_j^{-2}<\infty$, *функция* $\tilde{\varphi}(z)$ *не имеет нулей и* $1/\tilde{\varphi}(z)$ — *целая функция порядка* 1 *(см. [10]). Тогда один из функционалов* $\varphi(t)$ *или* $-\varphi(t)$ *является положительной мерой.*

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса [10, стр. 272]

$$\frac{1}{\tilde{\varphi}(z)} = e^{H(z)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{i\lambda_j}\right) \exp(z/i\lambda_j).$$

Из теоремы Адамара [10, стр. 282] имеем $H(z) = \alpha z + \beta$. Так как функционал $\varphi(t)$ действителен, то при действительных z будет $\tilde{\varphi}(-z) = \overline{\tilde{\varphi}(z)}$. Отсюда следует $-\alpha z + \beta = \bar{\alpha} z + \bar{\beta} + 2m\pi i$, где m — целое. Значит, $\alpha = ia$, $\beta = b + \pi im$, где a и b действительны. Прообраз Фурье функции $\frac{\lambda_j}{\lambda_j + iz} \exp(iz/\lambda_j)$ легко вычисляется и является неотрицательной функцией класса $L_1(-\infty, \infty)$ при всех действительных λ_j. Обозначим эти функции через $\varphi_j(t)$, $j = 1, \cdots$. Существует свертка функций $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$, где $N < \infty$. Очевидно, эта свертка неотрицательна и является прообразом Фурье функции

$$\zeta_N(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + iz} \exp(iz/\lambda_j).$$

Согласно теореме Бохнера [11], функция ζ_N положительно определена, а значит и предел при $N \to \infty$ положительно определен. Применяя опять теорему Бохнера, заключаем, что прообраз Фурье функции $\zeta(z) = \lim\limits_{N \to \infty} \zeta_N$ является положительной мерой. При умножении на e^{-iaz} прообраз Фурье сдвигается на a, а сдвиг не выводит из класса положительных мер. Лемма 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Пусть область G есть n-мерный шар $\{x \in R^n: |x| \leqslant \rho\}$ и $L = \Delta$, $\alpha(x) = \alpha > 0$. Тогда решение задачи* (0.6), (0.8) *обладает следующими свойствами.*

1. *Функция $u(x, t)$ не возрастает по t.*
2. *При каждом фиксированном значении t функция $u(x, t)$ принимает максимальное значение $\mu(t)$ в центре шара.*
3. *Функция $e^{\lambda_1 t} \mu(t)$ не убывает по t, и*

$$e^{\lambda_1 t} \mu(t) \leqslant \max_{x \in G} \varphi_1(x) \int_G \varphi_1(y)\, dy \left(\int_G \varphi_1^2(y)\, dy = 1\right). \tag{5.1}$$

Доказательство. Докажем свойство 1. Выберем неубывающую последовательность гладких выпуклых функций $\psi_j(r)$, $j = 1, 2, \cdots$, невозрастающих по r, таких, что $\lim\limits_{j \to \infty} \psi_j(r) = 1$ $\psi_j'(0) = 0$,

$$\alpha\psi_j'(r) + \psi_j(r)|_{r=\rho} = 0. \tag{5.2}$$

Тогда последовательность $u_j(x, t)$ решений граничных задач (0.6) с условием $u_j(x, 0) = \psi_j(|x|)$ не убывает по j и потому стремится к $u(x, t)$ при $j \to \infty$. Благодаря условию (5.2), функция $\omega_j(x, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial u_j}{\partial u}$ непрерывна на $\bar{G}$ и удовлетворяет краевой задаче (0.6) с начальным условием $\omega_j(x, 0) = \Delta \psi_j(|x|)$. Так как $\Delta \psi_j(|x|) \leqslant 0$, то по принципу максимума $\omega_j \leqslant 0$, откуда и следует свойство 1.

Докажем свойство 2. В предположении противного существует значение $t = t_0$ такое, что функция $u(x, t)$, принимает максимальное значение в точке x_0, где $|x_0| = r > 0$. В силу сферической симметрии, это максимальное значение принимается на сфере $|x| = r$ и значит, внутри этой сферы существует точка x_1 локального минимума. Согласно свойству 1, $\Delta u(x, t_0) = \partial u/dt < 0$, что в силу эллиптического принципа максимума невозможно в окрестности точки x_1.

Докажем свойство 3. Оценка (5.1) была бы доказана, если бы было установлено неубывание $e^{\lambda_1 t} \mu(t)$. С этой целью применим преобразование Фурье по t, а все функции, определенные при $t \geq 0$ будем считать равными нулю при $t < 0$. Пусть $\tilde{u}(x, z)$ есть преобразование Фурье по t функции $u(x, t)$. Она является решением граничной задачи в G;

$$-1 - iz\tilde{u}(x, z) = \Delta \tilde{u}; \quad \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \tilde{u}\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{5.3}$$

Решением этой задачи будет

$$\tilde{u}(x, z) = c\,|x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{iz}\,|x|) - \frac{1}{iz}, \tag{5.4}$$

где J_ν — функция Бесселя, а

$$c = \frac{\rho^{n/2-1}}{iz\left(\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho) + \alpha\sqrt{iz}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)\right)}, \quad \gamma = 1 + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\rho^{-1}.$$

Полагая в (5.4) $|x| = 0$ и используя разложение [12, стр. 12, формула (2)] функции $J_\nu(z)$ в ряд, находим

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{1}{iz}\left(\frac{(\sqrt{iz}\,\rho)^{n/2-1}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}{\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho) + \alpha\sqrt{iz}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)} - 1\right), \tag{5.5}$$

где $\tilde{\mu}(z)$ есть преобразование Фурье функции $\mu(t)$. Нам нужно показать, что $\frac{d}{dt}\, e^{\lambda_1 t}\mu(t) \geq 0$ при $t > 0$. Образом Фурье этой функции будет

$$-iz\,\frac{(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho)^{n/2-1}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}{(iz+\lambda_1)\left(\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho) + \alpha\sqrt{iz+\lambda_1}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho)\right)} - \frac{iz}{iz+\lambda_1}. \tag{5.6}$$

Прообраз Фурье функции $\frac{iz}{iz+\lambda_1}$ обращается в нуль при $t > 0$, а первое слагаемое нигде не обращается в нуль (в том числе и в точке $z = 0$, так как в точке $z = -i\lambda_1$ должен быть полюс функции $\tilde{\mu}(z)$).

Все полюса первого слагаемого в (5.6) находятся на мнимой оси в точках $i\gamma_1$, $i\gamma_2, \ldots$. Это следует из известных фактов о нулях функции $A J_\nu + Bz J_\nu'(z)$ [12, стр. 71], а из ассимптотики нулей той же функции [13] видно, что $\sum \gamma_j^{-1} < \infty$. Известно также, что функция $z^{-\nu} J_\nu(z)$ является целой функцией порядка 1. Итак, первое слагаемое в (5.6) удовлетворяет условиям леммы 5.1, откуда и следует постоянство знака $(e^{\lambda_1 t}\mu(t))'$. При $t=0$ этот знак положительный, и потому $e^{\lambda_1 t}\mu(t)$ не убывает. Теорема 5.2 доказана.

Замечание 5.3. Можно было бы попытаться доказать теорему 5.2, пользуясь разложением $u(x, t)$ по собственным функциям задачи (0.9). При $n=1$, 3 и $\alpha=0$ это несложно. В остальных случаях исследование полученного ряда наталкивается на значительные трудности.

Следствие 5.4. *Пусть пространство R^n представляется в виде прямого произведения $R^n = R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_m}$, а область $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, где G_j — шар пространства R^{n_j} с границей Γ_j, $j = 1, \ldots, m$. Обозначим*

$$\Gamma_j^0 = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_{j-1} \times \Gamma_j \times G_{j+1} \times \cdots \times G_m.$$

Очевидно, $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j^0$. Пусть в G задана краевая задача (0.6), (0.8), *где $\alpha(x)|_{\Gamma_j^0} = \alpha_j = \text{const} \geqslant 0$. Тогда выполнена оценка* 5.1.

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 5.2, если учесть, что $u(x, t) = u_1(x^{(1)}, t) \times \cdots \times u_m(x^{(m)}, t)$, где $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$, $x^{(j)} \in G_j$, а u_j есть решение задачи (0.6), (0.8) в $G_j \times [0, \infty)$ с $\alpha(x) = \alpha_j$.

Для более сложных областей лишь в случае задачи Дирихли удается оценить константу M_{λ_1}.

Теорема 5.5. *Пусть функция $u(x, t)$ является решением в $G \times [0, \infty)$ граничной задачи* (0,6), (0.8) *с $\alpha(x) = 0$. Пусть V — объём области G, а α_ν — первый нуль функции $J_\nu(x)$. Обозначим*

$$\gamma = \max(1, V\lambda_1^{n/2}/\Omega\, \alpha_{n/2-1}^n), \tag{5.7}$$

где Ω — объем единичного n-мерного шара. Тогда

$$u(x, t) \leqslant \gamma \frac{\alpha_{n/2-1}^{n/2}}{J_{n/2}(\alpha_{n/2-1})\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\lambda_1 t}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Будем считать, что при $x \overline{\in} G$ функция $u(x, t) = 0$. Выберем произвольную точку $x_0 \in G$ и обозначим

$$v(r, t) = \frac{1}{\Omega r^n} \int\limits_{|x-x_0|<r} u(x, t)\, dx.$$

Тогда $v(0, t) = u(x_0, t)$. Обозначим

$$G_r = \{x \in G : |x - x_0| \leqslant r\},\ \Gamma_r = \{x \in \Gamma : |x - x_0| \leqslant r\},$$

$$S_r = \{x \in G : |x - x_0| = r\}.$$

Имеет место равенство

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\Omega r^n} \int\limits_{G_r} \Delta u\, dx = \frac{1}{\Omega r^n} \int\limits_{S_r \cup \Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

С другой стороны, нетрудно вычислить

$$\frac{\partial}{\partial r}\, r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r}\, r^n v(r, t) = \frac{1}{\Omega r^{n-1}} \int\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Так как $u(x, t) > 0$ и $u\Big|_{\Gamma} = 0$, то $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_r} < 0$. Поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leqslant \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\, r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r}\, r^n v(r, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}. \tag{5.9}$$

Из разложения $u(x, t)$ по собственным функциям задачи (0.9) следует

$$v(r, t) \leqslant \frac{1}{\Omega r^n} \int\limits_{G} u\, dx \leqslant \frac{1}{\Omega r^n}\, V e^{-\lambda_1 t}. \tag{5.10}$$

И наконец

$$v(r, 0) \leqslant 1. \tag{5.11}$$

Правая часть (5.9) является $n+2$-мерным сферически симметричным лапласианом. Поэтому, для любого $\rho > 0$ выполнено неравенство $v(r, t) < w(r, t)$ при $0 \leqslant r \leqslant \rho$, где $w(r, t)$ есть решение задачи (5.9)—(5.11) с неравенствами, заменёнными на равенства. Выберем $\rho = \lambda_1^{-1/2} \alpha_{n/2-1}$. Имеем: $e^{\lambda_1 t} w(r, t) \leqslant w_1(r, t) + \gamma$, где w_1 есть решение граничной задачи:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \lambda_1 w_1 + \lambda_1 \gamma;\quad w_1(\rho, t) = w_1(r, 0) = 0.$$

Из теоремы 3.1 заключаем, что w_1 не убывает по t. Значит

$$e^{\lambda_1 t} w(r, t) \leqslant \lim_{t \to \infty} w_1(r, t) + \gamma \overset{\mathrm{df}}{=} k(r),$$

где

$$\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \lambda_1 k = 0,\ k(\rho) = \gamma.$$

Отсюда и следует оценка (5.8).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23.III.19

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ. Ոչ գծային պարաբոլական հավասարումների լուծումների գոյությ
ժամանակահատվածի մասին (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է (01)—(03) եզրային խնդիրը քվազիգծային պարաբոլական հ
վասարման համար։ Ստացված են լուծման գոյության ժամանակի համար երկկողմանի գն
հատականները և ցույց է տրված վերին և ներքին լուծման կառուցման մի եղանակ։ Ուսու
Ստացված են որ
նախիրված են լուծման ստաբիլիզացման և նրա կայունության հարցերը։ կիրա
գնահատականներ ջերմահաղորդականության հավասարման հետ կապված գծային
խնդրի համար։

S. G. RUBANOVICH. *On the existence time of solutions of some nonlinear parabolic equations* (summary)

In this paper the boundary value problem for the quasilinear equation of parabolic tipe is considered. The two side estimates for the existence time of solutions are obtained and some upper and lower solutions are constructed. The questions of stability and stabiliration of solutions are discussed. Also some new estimates are obtained for the semigroups of heat equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Рубанович, Ю. С. Чатынян*. Рассчет напряжения теплового пробоя силовых конденсаторов прямоугольной формы, «Электричество», № 1, 1978.
2. *С. Г. Рубанович, Ю. С. Чатынян*. О протекании во времени теплового пробоя конденсатора, «Электричество», № 6, 1979, 66—68.
3. *C. V. Pao*. Assimptotic behavior and Nonexistens of Clobal Solutions for a class of Nonlinear Boundary value problems of parabolic tipe, J. of math. analysis and appl., 65, 1978, 616—637.
4. *И. Каметака, О. А. Олейник*. Об ассимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка, Матем. сб., 107 (149), 1978, 572—600.
5. *Г. И. Зеленяк*. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа, Матем. сб., 104 (146), 1977, 486—510.
6. *В. П. Политюков*. К теории верхних и нижних решений и разрешимости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений, Матем. сб., 107 (149), 1978, 218—226.
7. *С. Г. Крейн*. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., Изд. «Наука», 1967.
8. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ИИЛ, 1962.
9. *В. С. Владимиров*. Обобщенные функции в математической физике, М., изд. «Наука», 1976.
10. *А. И. Маркушевич*. Теория аналитических функций, т. 2, М., изд. «Наука», 1968.
11. *С. Бохнер*. Лекции об интеграле Фурье, Физматгиз, 1962.
12. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, Функции параболичекого цилиндра, ортогональные многочлены, М., изд. «Наука», 1966.
13. *C. N. Moore*. Trans. Amer. Math. Soc., 32, 1930, 408—416.