ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН УПРУГИЙ ПРОВОДЯЩИЙ СЛОЙ

Саркисян Л.В.

Լ.Վ. Սարգսյան
Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է առաձգական հաղորդիչ շերտ

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական հաղորդիչ շերտ: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության միջոցով: Տեղափոխությունները և էլեկտրական պոտենցիալը ներկայացված են ալիքային և ոչ ալիքային մասերի գումարի տեսքով: Ստացված է, որ ալիքային մասը բաղկացած է ոչ միայն մակերևութային և ծավալային ալիքներից, այլ նաև ալիքից (պայմանավորված պիեզոէֆեկտով), որը տարածվում է ըստ կիսատարածության խորության:

Ստացված են նաև ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են տեղափոխության և էլեկտրական պոտենցիալի վարքը անվերջությունում և պարունակում են ալիքային մաս, որը տարածվում է կիսատարածության եզրային մակերևույթին ուղղահայաց:

L.V.Sargsian
On the shear vibrations of piezoelectric half-space, in the case when elastic conducting layer on the boundary surface is fastened

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен упругий проводящий слой малой толщины. Задача решается с помощью метода интегрального преобразования Фурье. Перемещения и электрический потенциал представлены в виде суммы волновых и неволновых частей. Обнаружено, что волновые части состоят не только из поверхностных и обычных объемных волн, но и волны (обусловленной пьезоэффектом), распространяющейся вглубь от поверхности полупространства. Наличие упругого проводящего слоя приведет к изменению волнового числа поверхностной волны, а также к изменению амплитуды и фазы колебаний. Получены асимптотические формулы, характеризующие поведения перемещений и электрического потенциала на дальной зоне, которые содержат волновую часть распространяющейся перпендикулярно к граничной поверхности полупространства.

Пусть имеем пьезоэлектрическое полупространство (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен проводящий упругий слой малой толщины. Отнесем к пьезоэлектрическому полупространству прямоугольную систему координат $0xyz$ таким образом, чтобы ось $0z$ совпадала с осью симметрии пьезоэлектрика, а ось $0x$ была направлена вдоль границы раздела полупространства и проводящего слоя. Контактной поверхностью полупространства со слоем является плоскость $y=0$. Под действием на граничной поверхности слоя периодической силы $Pe^{-i\omega t}\delta(x)$, где $\delta(x)$ -функция Дирака, ω -частота колебаний, t -параметр, характеризующий время, происходят сдвиговые установившиеся колебания пьезоэлектрического полупространства и проводящего слоя. Ставится задача определения перемещений и электрического потенциала, а также анализа волнового процесса в пьезоэлектрике.

Приступив к решению задачи, поле упругих перемещений проводящего слоя ищем в виде $\vec{u}_1 = \left(0{,}0, w_1(x,y)e^{-i\omega t}\right)$, а поле упругих перемещений и электрического потенциала полупространства соответственно в виде $\vec{u}_2 = \left(0{,}0, w_2(x,y)e^{-i\omega t}\right), \Phi(x,y,t) = \overline{\Phi}(x,y)e^{-i\omega t}$. Тогда поставленная задача для амплитуд перемещений и электрического потенциала формулируется в виде следующей контактной задачи [1]:

$$\Delta w_2 + k_2^2 w_2 = 0 \tag{1}$$

$$\Delta\overline{\Phi} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Delta w_2, \qquad 0 < y < \infty, \ -\infty < x < \infty \tag{2}$$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0 \tag{3}$$

условие контакта

$$G_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=0} = c_{44}\left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=0} + e_{15}\left.\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{4}$$

$$w_1 = w_2, \ \overline{\Phi} = 0, \ y = 0, \ -\infty < x < \infty, \tag{5}$$

граничное условие

$$G_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=-h} = -P\delta(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{6}$$

где $k_2 = \omega/c_2$, $c_2^2 = G_2/\rho_2$, $G_2 = c_{44}/(1+\chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ -коэффициент электромеханической связи, e_{15} - пьезоэлектрическая постоянная, ε_{11} -диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика, ρ_2 - плотность материала пьезоэлектрика, c_{44} -упругая постоянная пьезоэлектрика, $k_1 = \omega/c_1$, $c_1^2 = G_1/\rho_1$; G_1 и ρ_1 - модуль сдвига и плотность материала слоя соответственно, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

Далее уравнение (3) интегрировав по толщине, получим

$$\frac{d^2\overline{w}_1}{dx^2} + k_1^2\overline{w}_1 = -\frac{1}{h}\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=0} - \frac{P}{G_1 h}\delta(x), \tag{7}$$

где

$$\overline{w}_1(x) = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} w_1(x,y)dy$$

В (3), в силу малости h, полагалось $w(x,y) = \overline{w}_1(x) \quad (-h < y < 0)$

С помощью интегрального преобразования Фурье, разрешив контактную задачу (1), (2), (4), (5), (7), получим

$$w_2(x,y) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma|x| - \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}\,y}}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)}d\sigma \tag{8}$$

$$\overline{\Phi}(x,y) = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma|x| - |\sigma|y}d\sigma}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w_2(x,y) \tag{9}$$

где $\quad A = e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, $B = c_{44} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}$.

Функция $f(\sigma) = B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)$ имеет нули $\pm\sigma_*^*$, которые являются волновыми числами поверхностной волны. Причем, как нетрудно убедиться, $k_2 < \sigma_n^* < \sigma_n$ при $B^{-1}\sqrt{B^2 - A^2} \le {k_2}/{k_1} < 1$ и при $0 < h(k_2 - k_1) < Ak_2(k_2 + k_1)^{-1}G_1^{-1}$, где $\sigma_n = Bk_2(B^2 - A^2)^{-1/2}$ — волновое число поверхностной волны, соответствующего случаю $h = 0$. Вопросы существования поверхностных волн для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен проводящий слой, подробно исследованы в работе [2]. Чтобы $w_2(x,y)$ и $\overline{\Phi}(x,y)$ удовлетворяли условиям уходящей волны, контур интегрирования в (8), (9), должен обходить точки $-k_2, -\sigma_*^*$ сверху, а точки k_2, σ_*^* снизу [3], причем $\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$.

Поступая так, как в работе [4], для $w(r,\varphi)$ получим

$$w(r,\varphi) = \frac{iP}{\pi} e^{i\left(k_2 r - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau(2k_2 + i\tau)}\psi_1(\alpha,\varphi)} \Big[B(\alpha^2 - k_2^2) +$$

$$+ k_2^2 \sin\varphi(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|) - ihG_1\alpha\sin\varphi(\alpha^2 - k_2^2 + k_1^2 - k_2^2\cos^2\varphi)\Big]e^{-\tau r}d\tau +$$

$$+ \frac{AP}{\pi} e^{ik_2 r} \int_0^\infty \frac{\left(\alpha|\cos\varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}\sin\varphi\right)\left(\alpha\sin\varphi - i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}|\cos\varphi|\right)}{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}\,\psi_2(\alpha,\varphi)} e^{-\tau r}d\tau +$$

$$+ PA_n \exp\left[i\sigma_n^*|x| - \sqrt{\sigma_n^{*2} - k_2^2}\,y\right] \tag{10}$$

где

$$\psi_1(\alpha,\varphi) = \left(B^2 - A^2\right)\left(\alpha^2 - k_2^2\right) + k_2^2\left(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|\right)^2 +$$

$$+ 2iBhG_1\alpha\sin\varphi\left(\alpha^2 - k_2^2 + k_1^2 - k_2^2\cos^2\varphi\right) - 2AhG_1\alpha|\cos\varphi|\left(\alpha^2 - k_2^2\sin^2\varphi - k_1^2\right) -$$

$$- h^2G_1^2\left(\left(\alpha^2 - k_2^2\sin^2\varphi\right)^2 + k_1^4 - 2k_1^2\left(\alpha^2\cos 2\varphi + k_2^2\sin^2\varphi\right)\right), \quad \alpha = -k_2 - i\tau$$

$$\psi_2(\alpha,\varphi) = -\left[B\left(\alpha\sin\varphi - i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}|\cos\varphi|\right) - ihG_1\left(\left(\alpha|\cos\varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}\sin\varphi\right)^2 - k_1^2\right)\right]^2 -$$

$$- A^2\left(\alpha|\cos\varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}\sin\varphi\right)^2, \quad \alpha = -k_2\sin\varphi - i\tau$$

При $y = 0$ будем иметь

$$w(x,0) = \frac{iPB}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{(2k_2 + i\tau)\tau}\,e^{-\tau|x|}}{\psi_1(\alpha,0)}d\tau \cdot e^{i\left(k_2|x| + \frac{\pi}{4}\right)} -$$

$$- \frac{AP}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau|x|}}{A^2\tau^2 - \left(B\sqrt{\tau^2 + k_2^2} - ihG_1\left(\tau^2 + k_1^2\right)\right)^2}d\tau + PA_n e^{i\sigma_n^*|x|} \tag{11}$$

где

$$\psi_1(\alpha,0) = \left(B^2 - A^2\right)\alpha^2 - B^2k_2^2 - hG_1\left(\alpha^2 - k_1^2\right)\left(2\alpha A + hG_1\left(\alpha^2 - k_1^2\right)\right), \quad \alpha = -k_2 - i\tau$$

Как видно из (10), первый член представляет обычную объемную волну, второй член эта волна, обусловленная пьезоэффектом, распространяющаяся вглубь от поверхности полупространства, третий член представляет поверхностную волну. Как нетрудно видеть, второй член в (10) это неволновая часть $w(r,0)$ (11). Наличие проводящего упругого слоя приводит к изменению амплитуды и фазы колебаний, а также влияет на скорость распространения поверхностной волны Блюстейна-Гуляева.

Далее исходя из того, что подынтегральные выражения в (10) экспоненциально убывают, главный вклад в значениях интегралов дает их поведения в окрестности $\tau = 0$. В силу вышесказанного для $w(r,\varphi)$ при больших значениях r, получим

$$w(r,\varphi) = \left[\frac{iBP\sin\varphi}{\sqrt{2\pi}}\frac{B\sin\varphi - iA|\cos\varphi| + ihG_1(k_1\varepsilon - k_2\cos^2\varphi)}{\left(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi| - ihG_1(k_1\varepsilon - k_2\cos^2\varphi)\right)^2\sqrt{k_2 r}} +\right.$$

$$\left. +0\left((k_2 r)^{-\frac{3}{2}}\right)\right]e^{i\left(k_2 r - \frac{\pi}{4}\right)} + w_0(r,\varphi)e^{ik_2 y} + PA_n\exp\left(i\sigma_n^*|x| - \sqrt{\sigma_n^{*2} - k_2^2}\,y\right), \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = k_1 / k_2,$$

$$w_0(r,\varphi) = \frac{AP}{\pi(B - ihG_1\varepsilon k_1)^2(k_2 x)^2} + 0\left((k_2 r)^{-3}\right) \qquad \text{при } x \neq 0$$

$$w_0(y,0) = \frac{i}{(B - ihG_1\varepsilon k_1)^2}\frac{1}{k_2 y} + 0\left((k_2 r)^{-2}\right)$$

В (12) второй член представляет волновую часть, обусловленную пьезоэффектом, распостаняющуюся по направлению оси y.

Поступая аналогичным образом, как выше, для $w(x,0)$ при больших значениях x, будем иметь формулу

$$w(x,0) = \left[-\frac{iPB}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\left(A - hG_1(k_2 - \varepsilon k_1)\right)^2}\frac{1}{k_2|x|^{3/2}} + 0\left((k_2|x|)^{-\frac{5}{2}}\right)\right]e^{i\left(k_2|x| + \frac{\pi}{4}\right)} +$$

$$+\left[\frac{AP}{\pi(B - ihG_1\varepsilon k_1)^2}\frac{1}{(k_2 x)^2} + 0\left((k_2|x|)^{-3}\right)\right] + PA_n e^{i\sigma_n^*|x|} \quad (13)$$

Как видно из (13), колебания точек граничной поверхности полупространства, на дальной зоне, можно считать волновыми, если ограничиваться членами порядка $(k_2|x|)^{-3/2}$. Опять поступая, как в работе [4], для $\Phi(r,\varphi)$ будем иметь

$$\Phi(r,\varphi) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{PB}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{(2k_2 z_0 + i\tau)\tau}\,e^{-\tau}}{\psi(\lambda)}d\tau \cdot \exp\left[i\left(k_2|x| + \frac{\pi}{4}\right) - k_2 y\right] +$$

$$+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{2\pi}\int_0^\infty\left[\left(A\tau - ihG_1\bar{z}_0\left(\tau^2 + (k_1 z_0)^2\right) + B\sqrt{\tau^2 + (k_2 z_0)^2}\right)^{-1} +\right.$$

$$\left. +\left(A\tau + ihG_1 z_0\left(\tau^2 + (k_1\bar{z}_0)^2\right) - B\sqrt{\tau^2 + (k_2\bar{z}_0)^2}\right)^{-1}\right]e^{-\tau}d\tau - \quad (14)$$

$$-\frac{Pe_{15}}{\varepsilon_{11}}A_n\exp\left(i\sigma_n^*|x| - \sigma_n^* y\right) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(r,\varphi)$$

где

$$z_0=|\cos\varphi|+i\sin\varphi,\quad \bar{z}_0=|\cos\varphi|-i\sin\varphi\qquad(0<\varphi<\pi)$$

Как нетрудно видеть из (14), в отличие от $w(r,\varphi)$, $\Phi(r,\varphi)$ имеем неволновую часть при $0<\varphi<\pi$. Очевидно, что $\Phi(r,\varphi)$ имеет также волновую часть, распространяющуюся вглубь от поверхности полупространства.

При больших значениях r электрический потенциал имеет вид

$$\Phi(r,\varphi)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{PB}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp\left[i\left(k_2|x|+\frac{\pi}{4}\right)-k_2 y\right]}{\left[hG_1\left(k_2-\varepsilon k_1\right)-A\right]^2\left(k_2 z_0 r\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{\pi}\frac{i\sin\varphi}{\left(ihG_1\varepsilon k_1-B\right)k_2 r}-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}PA_n\left(i\sigma_n^{\bullet}|x|-\sigma_n^{\bullet}y\right)+$$

$$+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(r,\varphi)+0\left(\left(k_2 r\right)^{-2}\right),\quad 0<\varphi<\pi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск - Изд-во Наука, 1982.
2. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface on a Piezoelectric material carrying a metal layer of finit thickness. J. Appl.Phyz. 1973. 44. №5, 2001-2007 РЖ физ. 1973, 11Е 372.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ. 1962.
4. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства. Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №3, с.23-30.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию 25.01.1996