

УДК: 52:531.51

ОБОБЩЕННАЯ БИМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

Поступила 14 ноября 1988

Принята к печати 19 января 1989

Предложена теория с переменной гравитационной постоянной и двумя метриками. Она согласована с ньютоновским и пост-ньютоновским приближениями теории тяготения, когда безразмерный параметр $|\xi| \gg 4 \cdot 10^{-8}$. В ее рамках полное действие статического сферически-симметричного небесного тела $S_g + S_m = -M\tau c^2$; M — масса звезды, τ — время в удаленной системе отсчета, относительно которой звезда покоится. В теории Йордана—Бранса—Дикке $|\xi| \gg 1$, а $S_g + S_m \neq -M\tau c^2$. Найдено решение уравнений поля вне распределения масс. Формула Толмена для массы звезды эйнштейновской теории справедлива также в рамках обобщенной биметрической теории гравитации.

1. Введение. В обобщенной теории гравитации Йордана—Бранса—Дикке [1—6] действие тяготеющих масс определяется выражением

$$S = \frac{1}{2c} \int \left(-x\Lambda_g + \xi g^{ik} \frac{x_i x_k}{x} \right) \sqrt{-g} d\Omega + \frac{1}{c} \int \Lambda_m \sqrt{-g} d\Omega, \quad (1)$$

где $x = c^4/8\pi G$ — независимая полевая переменная, $x_i = \partial x / \partial x^i$, Λ_m — плотность функции Лагранжа материи, а ξ — безразмерный постоянный параметр. В этой теории Λ_g отождествляется со скалярной кривизной R пространства—времени. При этом для конечных ξ и слабого поля тяготения x не переходит в соответствующую ньютоновскую постоянную $x_0 = c^4/8\pi G_0$ (см. (22)). Другая особенность теории (обсуждаемая ниже) связана с экстремумом функционала действия.

В специальной теории относительности при отсутствии полей действие частицы равно

$$S = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - v^2} dt, \quad (1a)$$

где m — ее инертная масса, а v — скорость. Рассмотрим статическое сферически-симметрическое распределение гравитирующих масс. В удаленной инерциальной системе отсчета небесное тело вместе с собственным гравитационным полем обладает определенной инертной массой M_i , и по аналогии с (1а) естественно потребовать, чтобы

$$S_g + S_m = -M_i c \sqrt{c^2 - v^2} t,$$

где v — скорость небесного тела, а t — соответствующее время. С другой стороны, принцип эквивалентности позволяет отождествить M_i с тяготеющей массой M , поэтому полное действие

$$S = S_g + S_m = -M \tau c^2, \quad (2)$$

τ — время в удаленной инерциальной системе отсчета, относительно которой звезда покоится. Нетрудно показать, что для g_{ik} и κ , удовлетворяющих уравнениям теории Йордана—Бранса—Дикке

$$\kappa R_{ik} - \kappa_{i,k} - \xi \frac{\kappa_i \kappa_k}{\kappa} = T_{ik} - \frac{\xi + 1}{2\xi + 3} T g_{ik}, \quad (3a)$$

$$\kappa^n = \frac{T}{2\xi + 3}, \quad (3b)$$

полное действие (1) гравитационного поля и материи определяется выражением

$$S_1 = -\tau \int \left[\rho c^2 - \frac{\xi}{2\xi + 3} (\rho c^2 - 3P) \right] \sqrt{-g} d^3\Omega, \quad (4)$$

где

$$T_{ik} = (\rho c^2 + P) u_i u_k - P g_{ik} \quad (5)$$

— тензор энергии-импульса звездного вещества, ρc^2 и P — его плотность энергии и давление,

$$\Lambda_m = -\rho c^2 \quad (6)$$

— плотность функции Лагранжа изоэнтропического макроскопического вещества [7—9] в релятивистской теории, а $\kappa^n = g^{nl} \kappa_l$. Формула

$$M_i = \iint \left[\rho + 3P \frac{\xi + 1}{c^2(\xi + 2)} \right] \sqrt{-g} d^3\Omega \quad (7)$$

для тяготеющей массы получается из уравнения (3а) при $i=k=0$ и (22). Как видим, (4) и (7) не удовлетворяют равенству (2). Оно не удовлетворяется также в теории Эйнштейна если $\Lambda_g = R$ (см. [10—12]), поскольку общей теории относительности соответствует предел $\xi \rightarrow \infty$ [4]. Используя известный произвол в выборе действия, можно удовлетворить равенству

(2) добавлением к плотности функции Лагранжа дивергенции произвольной функции, не нарушая инвариантности S относительно преобразований координат. Этого можно добиться [12] в рамках биметрической формулировки общей теории относительности [13—17], когда

$$\Lambda_g = g^{ik} (\bar{\Gamma}_{in}^i \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{ln}^n). \quad (8)$$

$\bar{\Gamma}_{ik}^i = \Gamma_{ik}^i - \Gamma_{ik}^i$ — тензор аффинной деформации, равный разности между символами Кристоффеля искривленного пространства — времени с квадратом интервала $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ и соответствующего плоского пространства — времени с квадратом интервала $ds_0^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$. В связи с этим, естественно, возникает необходимость рассмотреть биметрическую теорию гравитации с переменной G . Разумеется, при $x = x_0$ она будет совпадать с общей теорией относительности, поскольку R и (8) отличаются друг от друга дивергенцией некоторой величины (см. (9)). Но в сильном поле тяготения, когда $x \neq x_0$, ее результаты будут отличаться от выводов как общей теории относительности, так и теории Йордана-Бранса-Дикке.

2. Уравнения поля. Рассмотрим теорию с действием (1) и плотностью функции Лагранжа — $\kappa \Lambda_g/2$, задаваемой (8). Варьируя S по g_{ik} , κ и воспользовавшись формулами [9, 13, 15—18],

$$R = g^{ik} (\bar{\Gamma}_{in}^i \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{ln}^n) + \bar{w}^i_{,i}, \quad \bar{w}^i = g^{in} \bar{\Gamma}_{in}^i - g^{il} \bar{\Gamma}_{ln}^n, \quad (9)$$

$$\delta R_{ik} = (\delta \Gamma_{ik}^i)_{,l} - (\delta \Gamma_{il}^i)_{,k}, \quad T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (V \sqrt{-g} \Lambda_m)}{\delta g^{ik}},$$

после преобразований находим уравнения поля

$$x R_{ik} + x_n \bar{\Gamma}_{ik}^n - x_{(l} \bar{\Gamma}_{k)n}^n - \xi \frac{x_l x_k}{x} = T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}, \quad (10a)$$

$$(2\xi x^l - \kappa \bar{w}^l)_{,l} = T \quad (10b)$$

(ср. с (3)). Взятые в круглые скобки индексы i, k означают симметризацию соответствующего выражения. Из инвариантности

$$S_m = \frac{1}{c} \int \Lambda_m V \sqrt{-g} d\Omega$$

относительно бесконечно малых преобразований координат $x^i \rightarrow x^i + \epsilon^i(x)$ вытекает [18] уравнение гидродинамики

$$T^k_{i;k} = 0. \quad (11)$$

Оно не содержится в системе уравнений (10) и поэтому (10) необходимо дополнить уравнением (11). В биметрической теории Розена [19] та же ситуация и связано это с наличием двух метрик. В теории Йордана—Бранса—Дикке одна метрика и как следствие (11) вытекает из уравнений поля (3). Та же ситуация в общей теории относительности, поскольку плоская метрика не фигурирует [13—17] в уравнениях Эйнштейна, хотя и содержится в (8).

Ниже мы рассмотрим задачу о статическом сферически-симметричном распределении гравитирующих масс в системе координат, в которой

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (12)$$

Из симметрии задачи понятно, что соответствующий интервал искривленного пространства—времени

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (13)$$

где ν , λ , μ — некоторые функции радиальной координаты r . В этом случае (10), (11) сводятся к пяти уравнениям, которые позволяют найти ν , λ , μ , P и κ . Для сверхплотных небесных тел ρ определяется давлением P [4, 20], а для звезды типа Солнца (10), (11) нужно дополнить уравнением лучистого равновесия [21], из которого определяется температура вещества.

Используя (12), (13) из (10), (11) можно вывести уравнение

$$x'(\lambda' - \mu') = (1 - e^{\lambda-\mu}) \left[x'' + x' \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \right], \quad (14)$$

справедливое как вне, так и внутри распределения масс (штрих—производная по r). После интегрирования получаем

$$x' r^2 (1 - e^{\mu-\lambda}) e^{(\nu+\lambda)/2} = \text{const.} \quad (15)$$

Постоянная должна равняться нулю, поскольку мы полагаем $x'(0) \neq \infty$, что вполне естественно, $\kappa' \neq 0$ и поэтому для всех r

$$\mu(r) = \lambda(r). \quad (16)$$

Оставшиеся в (10), (11) уравнения принимают вид

$$\frac{1}{r^2} (x \nu' r^2 e^{\nu})' = (\rho c^2 + 3P) e^{3\nu/2}, \quad (17a)$$

$$\frac{2}{r} x' + x'' = \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{1}{2} x \left(\frac{x'}{x} \right)^2 + \frac{1}{x} P e^{2\nu}, \quad (17b)$$

$$P' = -\frac{1}{2} (\rho c^2 + P) \nu', \quad (17b)$$

$$\frac{1}{r^2} [(\xi x' + 2xz') r^2 e^{\mu}]' = 3P e^{2\mu}, \quad (17\Gamma)$$

где $z = (\nu + \lambda)/2$.

3. Слабое гравитационное поле. Для звезды со слабым полем тяготения [4, 18]

$$-\nu \approx -\frac{2}{c^2} \psi \sim \frac{1}{r_0} \rho_0 c^2 r_1^2 \sim \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \ll 1, \quad (18)$$

где ψ — ньютоновский потенциал, P_0 и ρ_0 — давление и плотность вещества в центре конфигурации, а r_1 — ее радиус. Учитывая это обстоятельство, из (17б) и (17г) находим

$$\left| \xi \frac{\partial x}{x} \right| \sim |z| - \frac{P_0^2}{\rho_0^2 c^4}, \quad (19)$$

δx — отклонение x от своего значения в отсутствие поля тяготения. Требуя, чтобы (17а) и (17в) переходили в уравнения ньютоновской теории

$$\frac{1}{r^2} (\psi' r^2)' = 4\pi G_0 \rho, \quad P' = -\rho \psi', \quad (20)$$

получаем

$$G \approx G_0, \quad (21)$$

с погрешностью много меньшей, чем $-\psi/c^2$, если $|\xi| \gg P_0/\rho_0 c^2$. Уравнения (3) теории Йордана-Бранса-Дикке также переходят в (20), однако [5]

$$G \approx G_0 \left(1 + \frac{\psi c^{-2}}{\xi + 2} \right) \frac{2\xi + 3}{2\xi + 4}. \quad (22)$$

Только в случае $|\xi| \gg 1$ следует $G = \text{const}$ с той же, что и в (21), точностью.

Вычисляя (8) для метрик, определяемых из (12), (13), находим

$$\Lambda_r = \frac{1}{r} (\nu' + \lambda') (e^{-\mu} - e^{-\lambda}) - \mu' \left(\nu' + \frac{1}{2} \mu' \right) e^{-\lambda}. \quad (23)$$

С учетом этого обстоятельства, а также (16), (18), (19) и (21), сумма действий гравитационного поля и материи

$$S \approx -\frac{1}{8\pi G_0} \int \psi'^2 dV + S_m, \quad (24)$$

где dV — элемент трехмерного объема, а

$$S_m \approx -\tau \left(M_0 c^2 + \int \rho \psi dV \right), \quad M_0 = \int \rho dV \quad (25)$$

(см. [12]). Таким образом, имеется полное соответствие с ньютоновской теорией тяготения.

Теперь рассмотрим небесное тело с произвольным (необязательно слабым) полем тяготения. Интегрируя (17а), (17г) с учетом известных граничных условий на бесконечности и (21), вне распределения масс получим следующие уравнения:

$$v' e^{av/\xi} = \frac{r_g}{r^2} e^{(2/\xi-1)x}, \quad (26a)$$

$$\frac{2}{r} z' + z'^2 = \frac{1}{4} v'^2 + \frac{1}{2} \xi \left(\frac{x'}{x} \right)^2, \quad (26b)$$

$$x = x_0 e^{(av-2x)/\xi}, \quad (26в)$$

где $r > r_1$, r_1 — координатный радиус небесного тела, $r_g = 2G_0 M/c^2$,

$$M = \int (\rho + 3P/c^2) \sqrt{-g} d^3\Omega \quad (27)$$

— тяготеющая масса, а

$$\alpha = \frac{3}{Mc^2} \int P \sqrt{-g} d^3\Omega < 1. \quad (28)$$

Как видим, формула (27), выведенная Толменом [18] в рамках общей теории относительности, справедлива также в биметрической теории с переменной гравитационной постоянной. На больших расстояниях от небесного тела можно выписать разложения

$$v \approx -x + a_2 x^2, \quad z \approx b_1 x + b_2 x^2, \quad \ln(x/x_0) \approx c_1 x + c_2 x^2, \quad (29)$$

$x = r_g/r \ll 1$. Подставив их в (26), находим постоянные

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2\xi}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{16} - \frac{\alpha^2}{8\xi}, \quad c_1 = -\frac{\alpha}{\xi}, \quad c_2 = \frac{1}{8\xi} - \frac{\alpha^2}{4\xi^2},$$

откуда

$$e^v \approx 1 - x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\xi} \right) x^2, \quad e^\lambda \approx 1 + x + \frac{1}{8} \left(3 + 4 \frac{\alpha}{\xi} - 2 \frac{\alpha^2}{\xi} \right) x^2, \\ \frac{x}{x_0} \approx 1 - \frac{\alpha}{\xi} x + \frac{1}{8\xi} \left(1 + 2 \frac{\alpha^2}{\xi} \right) x^2. \quad (30)$$

Напомним, что в (13) $\mu = \lambda$. Как видим, (30) согласуется с данными наблюдений о пост-ньютоновских эффектах в окрестности солнечной системы [6], если

$$|\xi| \gg \alpha_{\odot} \gtrsim \frac{3P_{\odot}}{\rho_{\odot} c^2} \approx 4 \cdot 10^{-6}, \quad (31)$$

$P_{\odot}$, $\rho_{\odot}$ — давление и плотность вещества в центре Солнца [21]. В теории Йордана-Бранса-Дикке ξ ограничено более жестким условием $|\xi| \gg 1$. Оно вытекает из разложения

$$e^{\lambda} \approx 1 + \frac{\xi + 1}{\xi + 2} x, \quad x \ll 1,$$

справедливого в рамках этой теории [5, 6] для Солнца.

4. *Полное действие.* Представляет интерес также полное действие гравитационного поля и материи для g_{ik} и κ , удовлетворяющих уравнениям поля. Из (8)–(10) вытекает уравнение

$$\kappa \Lambda_g - \frac{\xi \kappa_n \kappa^n}{x} = -(\kappa \bar{w}^n)_{;n} - T, \quad (32)$$

которое вместе с (5), (6) и формулой Толмена (27) приводит к равенству

$$S = \frac{\tau}{2} \int \frac{\partial (\kappa \bar{w}^n \sqrt{-g})}{\partial x^n} d^3 \Omega - \frac{1}{2} M \tau c^2. \quad (33)$$

Для выбранной нами сферической системы координат

$$\bar{w}^n \sqrt{-g} = \delta_1^n r^2 \sin \theta \left[v' + 2\mu' + \frac{2}{r} (1 - e^{\lambda - \mu}) \right] e^{\mu + (\nu - \lambda)/2}, \quad (34)$$

и в силу (16), (21) и (30) интеграл

$$\int \frac{\partial (\kappa \bar{w}^n \sqrt{-g})}{\partial x^n} d^3 \Omega = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \kappa r^2 (v' + 2\lambda') e^{(\nu + \lambda)/2} = -M c^2. \quad (35)$$

Подставив (35) в (33) убеждаемся, что масса M и сумма действий гравитационного поля и материи S связаны соотношением (2).

5. *Внешнее решение.* При $\xi = 2$ уравнения поля вне распределения масс (26) легко интегрируются:

$$e^{\nu} = \left| 1 - \frac{\alpha}{2} x \right|^{2/\alpha}, \quad e^{\lambda} = \left| 1 - \frac{\alpha}{2} x \right|^{(1 - \frac{1}{\alpha})^2 \frac{1}{2} (\alpha + \frac{1}{\alpha} x)},$$

$$\frac{x}{x_0} = \left| 1 - \frac{\alpha}{2} x \right|^{-\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{\alpha^2}) - \frac{1}{4} (\alpha + \frac{1}{\alpha}) x}, \quad r = r_g/x > r_1. \quad (36)$$

Рассмотрим случай произвольного ξ . Из (26а) имеем

$$\left(\frac{2}{\xi} - 1\right)\dot{z} = \frac{2}{l} + \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} + \frac{a}{\xi}\dot{y}, \quad l = \frac{1}{x} = \frac{r}{r_0}, \quad (37)$$

где точка означает производную по l . Подставив (37) и (26в) в (26б), получим нелинейное уравнение

$$ly^2 - 2\left(\dot{y} + \frac{a}{\xi}\right)y + al = 0, \quad (38)$$

в котором

$$y = \frac{1}{\dot{y}}, \quad a = \frac{1 - a^2}{2\xi} - \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Преобразованием

$$l = \frac{df}{du}, \quad y = u \frac{df}{du} - f \quad (40)$$

оно сводится к линейному дифференциальному уравнению, которое элементарно интегрируется:

$$f(u) = C \left[\left(u + \frac{a}{\xi}\right)^2 - a - \frac{a^2}{\xi^2} \right]. \quad (41)$$

Совершая обратное преобразование, получаем

$$\dot{y} = \frac{1}{C[a + (l/2C - a/\xi)^2]}, \quad (42)$$

а из условия $y \approx -1/l$ на больших расстояниях (см. (29)) находим $C = 1/4$. После еще одного интегрирования

$$e^y = \begin{cases} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left(2 \arctg \frac{2l - a/\xi}{\sqrt{a}} - \pi \right) \right], & a > +0 \\ \left| \frac{2l - a/\xi - \sqrt{-a}}{2l - a/\xi + \sqrt{-a}} \right|^{1/\sqrt{-a}}, & a \leq -0. \end{cases} \quad (43)$$

Функция $\lambda (= \mu)$ определяется из (26а) и (42):

$$e^\lambda = \left| \frac{4l^2}{a + (2l - a/\xi)^2} \right|^{2\xi/(2-\xi)} \exp \left[\frac{\xi + 2(a-1)}{2-\xi} y \right], \quad (44)$$

а переменная x — из (26в):

$$\frac{x}{x_0} = \left| \frac{4l^2}{a + (2l - a/\xi)^2} \right|^{\frac{2\xi(\xi-2)}{\xi}} e^{\frac{a y}{\xi(\xi+2)}}. \quad (45)$$

(в случае $\xi \rightarrow 2$ (43)—(45) переходят в (36)). Внешнее решение регулярно в области $l > 0$, если

$$0 \leq \xi + 2a^2 < 2 \quad (46)$$

и

$$l > l_c = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\xi} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1-a^2}{2\xi}} \right), \quad (47)$$

в остальных случаях. $l_c = 1/4$ в пределе $\xi \rightarrow \infty$, как и должно быть в общей теории относительности (изотропная система координат).

Параметры конфигурации определяются путем решения дифференциальных уравнений (17) внутри небесного тела и последующей сшивки v , λ и κ с (43)—(45) на поверхности звезды. Результаты расчетов будут опубликованы в следующей работе.

Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

GENERALIZED BIMETRIC THEORY OF GRAVITATION

L. SH. GRIGORIAN, A. A. SAHARIAN

A theory with the variable gravitation constant and two metrics has been suggested. It is in agreement with Newtonian and post-Newtonian approximations of the theory of gravitation if the dimensionless parameter $|\xi| \gg 4 \cdot 10^{-6}$. In its framework the total action of the static spherical-symmetric celestial body is $S_g + S_m = -M\tau c^2$; M is the star mass, τ is the time in the remote reference system relative to which the star is at rest. In the Jordan-Brans-Dicke theory $|\xi| \gg 1$ and $S_g + S_m \neq -M\tau c^2$. The solution of the field equations is found outside the mass distribution. The Tolman formula for the star mass in Einstein theory is also valid in the framework of generalized bimetric theory of gravitation.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig. Friedr. Vieweg and Sohn, 1955.
2. P. Jordan, *Zs. Phys.*, 157, 112, 1959.
3. C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
4. Г. С. Саакян, *Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс*, Наука, М., 1972.
5. С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.

6. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, Мир, М., т. 3, 1977.
7. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, М., 1961.
8. С. Хокинг, Дж. Эллис, Крупномасштабная структура пространства—времени, Мир, М., 1977.
9. Г. С. Саакян, Пространство—время и гравитация, Изд. Ереван. ун-та, Ереван, 1985.
10. Н. В. Мицкевич, Физические поля в общей теории относительности. Наука, М., 1969.
11. М. Е. Герценштейн, Л. Г. Соловей, Изв. вузов, Физика, 30, № 9, 74, 1987.
12. Л. Ш. Григорян, Астрофизика, 30, 380, 1989.
13. N. Rosen, The III International School of Cosmology and Gravitation, Erice, 8—20 May, 1974, p. 2.
14. Я. Б. Зельдович, Л. П. Грицук, Успехи физ. наук, 149, 695, 1986.
15. А. А. Логунов, Лекции по теории относительности и гравитации, Наука, М., 1987.
16. Н. А. Черников, Вариационный метод Гильберта и тензор Паппетру, Препринт ОИЯИ, P2-87-683, 1987.
17. R. M. Avakian, L. Sh. Grigorian, Astrophys. and Space Sci., 146, 183, 1988.
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1973.
19. N. Rosen, Ann. Phys., 84, 455, 1974.
20. L. Sh. Grigorian, G. S. Sahakian, Astrophys. and Space Sci., 95, 305, 1983.
21. М. Шварцшильд, Строение и эволюция звезд, ИЛ, М., 1961.