

УДК 524.7—355

МОДЕЛЬ ФЛИККЕР-ШУМА ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ БЛЕСКА NGC 4151

В. Ю. ТЕРЕБИЖ, А. В. ТЕРЕБИЖ, В. В. БИРЮКОВ

Поступила 26 января 1989

Спектр мощности колебаний оптического блеска ядра сейфертовской галактики NGC 4151 в области частот 10^{-4} — $2 \cdot 10^{-2}$ цикла/сутки (50 сут. — 30 лет) соответствует фликкер-шуму с индексом $\gamma \approx 1.0$. Показатели цвета U — B низкочастотных и высокочастотных вариаций потока близки по величине. Эти результаты свидетельствуют в пользу единого механизма генерации медленных и быстрых колебаний и позволяют отказаться от сложной многокомпонентной модели при описании наблюдаемой кривой блеска; она может быть интерпретирована как результат наложения отдельных всплесков, случайно распределенных во времени. Построены соответствующие стохастические модели переменности.

1. *Введение.* Характерная особенность оптических кривых блеска квазаров и ядер сейфертовских галактик заключается в том, что эти кривые обнаруживают относительные вариации потока порядка единицы во всем изученном диапазоне временных масштабов. На рис. 1 представлены колебания потока в полосе B ядра сейфертовской галактики NGC 4151 за 20-летний период с 1968 г. по 1987 г. (общее количество фотозлектрических измерений $N = 462$, подробнее см. ниже). С первого взгляда на рис. 1 создается впечатление, что здесь присутствуют три независимых компонента: общий тренд с характерным временем порядка десяти лет, колебания с длиной цикла порядка нескольких лет и быстрые всплески с протяженностью около десяти дней. В ранних работах такие компоненты считались реальными, а для второго из них предполагалась и квазипериодичность. При наличии данных более продолжительных наблюдений активных ядер (см., например, сводку Энжиона и Смиа [1] для 3C 273) можно выделить и значительные колебания светимости с длиной цикла в десятки лет.

В связи с указанной особенностью Пресс [2] обратил внимание на то важное обстоятельство, что переменность на всех временных масштабах свойственна весьма распространенному в природе случайному процессу — т. н. *фликкер-шуму*. В спектральной области такое поведение процесса ха-

рактизуется степенным убыванием спектра мощности в широком диапазоне частот:

$$g(\nu) = \text{const} \cdot \nu^{-\gamma}, \quad (1)$$

где показатель γ лежит обычно в пределах от 0.6 до 2.0 (Малахов [3]; Рытов [4]). Классический фликкер-шум соответствует $\gamma \simeq 1$, т. е. постоянной мощности, приходящейся на каждую декаду частот. При $\gamma \rightarrow 0$ процесс превращается в белый шум, а при $\gamma \rightarrow 2$ стремится к процессу случайных блужданий.

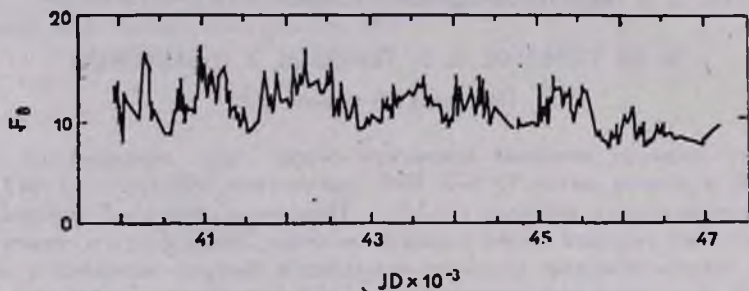


Рис. 1. Кривая блеска ядра NGC 4151 в полосе B за 1968—1987 гг. В качестве единичного выбран поток от звезды 15^m .

Если аналогия флуктуаций светимости активных ядер галактик с фликкер-шумом оправдана, то перечисленные выше «компоненты» кривых блеска отражают лишь естественные свойства конкретной реализации единого по своей природе процесса выделения энергии центральным источником. При этом следует с осторожностью подходить к различным оценкам характерного времени переменности, т. к. для фликкер-шума эти оценки определяются продолжительностью наблюдений и отношением сигнала к шуму [5, 6, 8].

Весьма примечательно, что сложившаяся ранее картина переменности потока активных ядер в рентгеновском диапазоне спектра радикально изменилась с получением длительных (до 80 часов) непрерывных рядов измерений при помощи счетчиков, установленных на EXOSAT [5—8]. Выяснилось, что для этих объектов свойственны не плавные вариации, изредка прерываемые вспышками, а непрерывные флуктуации значительной амплитуды со спектром мощности $g(\nu) \propto \nu^{-1}$ в области частот 10^{-5} — 10^{-3} Гц. МакХарди и Черны [6] указали, что рентгеновские кривые блеска NGC 4051 и NGC 5506 напоминают введенные Манделбротом [9] фракталы—объекты, структура которых сохраняется при изменении масштабов (известный пример фрактала—скалистая береговая линия).

В настоящей заметке показано, что свойство масштабной инвариантности или автоподобия присуще и оптической кривой блеска ядра NGC 4151.

В области частот $10^{-4} \lesssim \nu \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$ цикла/сутки (периоды $P = \nu^{-1}$ от 50 сут. до 30 лет) спектральная плотность соответствует фликкер-шуму при $\gamma \simeq 1$. Таким образом, нет необходимости вводить сложную многокомпонентную модель для описания имеющихся данных наблюдений. Дополнительным аргументом в пользу единой природы переменной составляющей потока служит близость показателей цвета $U-B$ его низкочастотных и высокочастотных колебаний. Кривую блеска, сходную с наблюдаемой, можно реализовать путем наложения «хвостов» отдельных случайных вспышек, медленно затухающих со временем. Однако более вероятной представляется модель, предполагающая суперпозицию относительно коротких вспышек, длительность которых случайно варьирует.

2. *Данные наблюдений.* Использовались фотоэлектрические оценки блеска ядра NGC 4151 с диафрагмой $25''-27''$ в полосах U и B , полученные Пенстаном и др. [10, 11]. Белоконь [12] и Лютым [13]. Количество отсчетов в полосе U составило $N=388$, в $B-462$. Измерения с указанными двумя фильтрами анализировались единообразно; в U более высокий контраст ядра позволяет четче проявиться его вспышечной активности, в то время как оценки в B многочисленнее. Раздельное рассмотрение данных во всех отношениях привело к сходным между собой выводам, поэтому здесь мы представим результаты, полученные для синей области спектра.

Оценки звездных величин были трансформированы в потоки $F = 10^{-(0.4(m-15))}$. Относительные вариации потоков $\sigma_F/\bar{F}$ составили $\sim 30\%$ и 20% для U и B соответственно. Средний интервал времени между измерениями в $B-15.7$ суток.

3. *Оценка спектральной плотности.* Неравномерность временного распределения моментов наблюдения не позволяет применить современные методы оценивания спектральной плотности процесса непосредственно к исходному ряду измерений. Один из способов преодолеть эту трудность заключается в том, что исходный ряд сглаживается, его отсчеты интерполируются для равномерной сетки моментов наблюдения, а затем анализируется полученный равномерный временной ряд. Результаты такого подхода описаны в следующем пункте. Здесь же мы используем классическую оценку — периодограмму Шустера [14, 15], дополненную рассмотрением спектра скважности согласно Грею и Дезикачари [16] и Димингу [17].

Периодограмма центрированных отсчетов $y_k \equiv F_k - \bar{F}$, соответствующих N моментам измерения $t_0, \dots, t_{N-1}$, определяется следующим образом:

$$P_N(\nu) = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i \cdot 2\pi \nu t_k} y_k \right|^2. \quad (2)$$

При вычислении спектра скважности $P_N^{(j)}(\nu)$, характеризующего особенности временного распределения моментов измерения, реальные отсчеты в (2) заменяются единичными.

Спектр скважности рассматриваемого временного ряда в области частот $\nu < 0.01$ ц/сут. представлен на рис. 2а. Максимум на частоте 0.00273 ц/сут. отвечает годичной модуляции моментов наблюдения. В области высоких частот имеется аналогичный максимум, соответствующий модуляции с периодом лунного месяца.

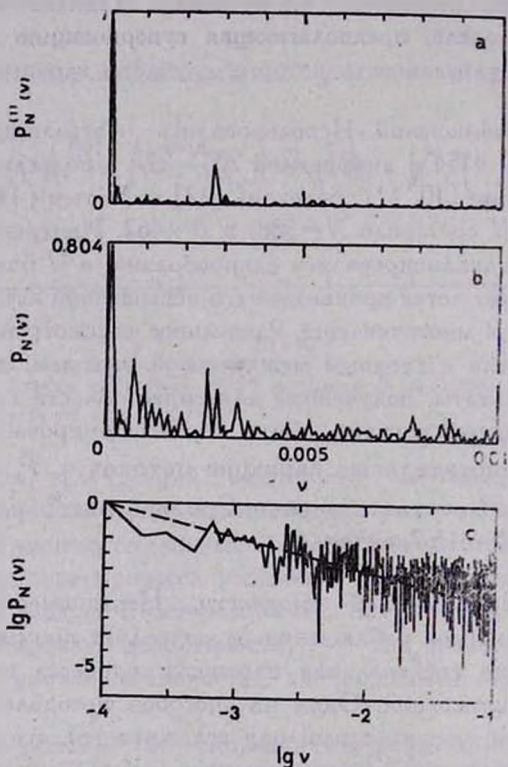


Рис. 2. Спектр скважности (а) и периодограмма Шустера в линейном (б) и двойном логарифмическом (с) масштабах ряда, приведенного на рис. 1. Частота измеряется в циклах/сутки.

На рис. 2б приведена периодограмма вариаций потока NGC 4151 для периодов $P > 100$ сут. Наибольший максимум расположен на частоте 10^{-4} ц/сут. (~ 27 лет), он соответствует описанному выше тренду. Не исключено, что группа максимумов в области частот $5 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ ц/сут. (5.5—1.5 года) отвечает участку спектра с монотонно убывающей от низких частот плотностью, а провал при $\nu \simeq (2-6) \cdot 10^{-4}$ ц/сут. может быть случайным эффектом реализации. «Изрезанность» оценки спектра мощ-

ности не должна смущать, поскольку она является неотъемлемым свойством периодограммы Шустера [18]. Два пика $P_N(\nu)$ при $\nu \simeq 2.7 \cdot 10^{-3}$ ц/сут. ($P \simeq 370$ сут.) с очевидностью обусловлены трендом и годичной модуляцией моментов наблюдения, проявляющейся на спектре скважности. Действительно, эти пики исчезают, если построить периодограмму детрендированного ряда. На более высоких частотах вплоть до 0.1 ц/сут. (эта часть периодограммы не приводится) отсутствуют сколь-нибудь заметные особенности.

Общий характер зависимости спектра мощности от частоты наглядно выявляется при построении периодограммы в двойном логарифмическом масштабе (рис. 2с). Видно, что при $\lg \nu \lesssim -1.7$ ($P \gtrsim 50$ сут.) спектр мощности NGC 4151 удовлетворительно описывается степенным законом (1) с показателем $\gamma \simeq 1.0$. Это означает, что низкочастотные вариации светимости ядра галактики близки к фликкер-шуму. В качественном виде это заключение было сделано в отношении активных ядер галактик Прессом [2] и в отношении NGC 4151 — Пахольчиком и др. [19]. Для частот выше $\lg \nu \simeq -1.7$ ($P \lesssim 50$ сут.) спектр NGC 4151 плоский, что указывает на близость процесса колебаний светимости к белому шуму; здесь, впрочем, имеющиеся данные становятся недостаточными для получения надежных выводов.

Строго говоря, применение периодограммы Шустера к анализу неравномерного временного ряда является необоснованным. В этом случае следует использовать LS-спектр, введенный Барнингом [20] и далее исследованный Ванишеком [21] и Ломбом [22]. Для контроля мы рассчитали LS-спектр колебаний блеска NGC 4151; результирующая оценка спектра мощности оказалась практически совпадающей с той, которую дает периодограмма Шустера.

Итак, имеются две возможности: А) спектральная плотность вариаций блеска NGC 4151 плавно уменьшается с ростом частоты и нет свидетельств в пользу реальности отдельных компонентов; В) провал в области частот $(2-6) \cdot 10^{-4}$ ц/сут. не случаен, так что реальны по крайней мере два таких компонента.

4. Сглаживание кривой блеска. Для дальнейшего изучения низкочастотной области спектра колебаний яркости NGC 4151 кривые блеска этой галактики в полосах U и B были сглажены в пределах интервала длиной 1000 сут., перемещавшегося с шагом 100 сут. Отсчеты в пределах каждого положения интервала аппроксимировались полиномом 4-го порядка, а затем в качестве сглаженной оценки потока принималось значение полинома в средней точке. Полученный таким образом равномерный ряд, включающий 71 точку, анализировался при помощи метода максимума энтро-

пии так же, как это было сделано Фэлменом и Ульрихом [23] для «кривой блеска квазара 3С 273. Была проверена и устойчивость результатов относительно изменения параметров процедуры сглаживания.

Мы укажем здесь лишь основные результаты проведенного анализа. Область спектра на рис. 2b с частотами $\nu \lesssim 0.002$ ц/сут. мало изменилась в результате сглаживания, в то время как интенсивность высокочастотного участка спектра сильно уменьшилась. Подбор авторегрессионных моделей показал широкий минимум окончательной ошибки предсказания Акаике $FPE(p)$ при значениях порядка модели $p \simeq 2-4$. Соответствующие этим порядкам спектральные плотности свидетельствуют в пользу единого механизма колебаний в области $P \gtrsim 500$ сут., т. е. не дают оснований выделить тренд в качестве особого компонента.

Более сильный аргумент в пользу единой природы низкочастотных и высокочастотных колебаний блеска следует из совместного рассмотрения данных в U и B . На рис. 3 представлены соотношения $F_U - F_B$ отдельно для медленного компонента вместе с постоянной составляющей от ядра галактики « $s+g$ » и быстрого компонента « f ». Первый был выделен при помощи описанного выше сглаживания, второй — как разность между наблюдаемыми отсчетами и компонентом « $s+g$ ».

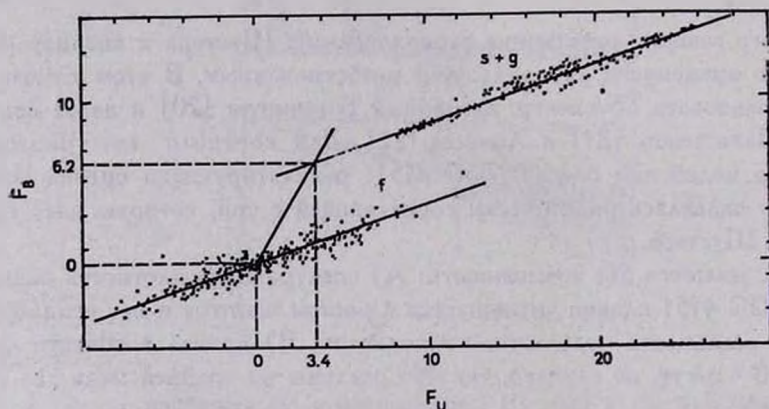


Рис. 3. Диаграмма $F_U - F_B$ для медленных ($s+g$) и быстрых (f) вариаций блеска NGC 4151.

Прежде всего обратим внимание, что наклоны зависимостей для обоих компонентов одинаковы в пределах точности измерений. Значения углов наклона согласуются с предположением о равенстве показателей цвета медленного и быстрого переменных компонентов: $(U-B)_{\text{var}} = -1.11 \pm \pm 0.01$. К аналогичному выводу пришел ранее Гаген-Торн [24, 25], разделивший «на глаз» кривую блеска галактики на зоны повышенной и пони-

женной светимости. Рис. 3 демонстрирует равенство показателей цвета значительно более четко. Оно свидетельствует о том, что разделение на быстрый и медленный компоненты, вероятно, носит искусственный характер.

Если отказаться от указанного разделения, то на диаграмме останется, очевидно, лишь несколько более размытая совокупность точек « $s+g$ ». Принимая для центральной области галактики $(U-B)_g = 0.66$, можно определить вклад постоянной звездной составляющей в суммарные потоки в пределах 27"-диафрагмы. Такое разделение дает (см. рис. 3): $F(g) \simeq 3.4$, $F_B \simeq 6.2$. Таким образом, из всего среднего значения $\bar{F}_B = 11.4$ на долю переменного центрального источника приходится приблизительно половина потока: $\bar{F}_B^{(var)} \simeq 5.2$.

5. Моделирование фликкер-шума. В связи с широкой распространенностью фликкер-шума его происхождение неоднократно обсуждалось как в физической, так и в технической литературе, и, тем не менее, приходится признать, что механизм генерации фликкер-шума почти во всех случаях остается неясным.

Известно (см., например, [3]), что степенной спектр мощности получается как частный случай в рамках модели дробового шума

$$\xi(t) = \sum_j a_j s\left(\frac{t-t_j}{\theta_j}\right), \quad (3)$$

где $a_j > 0$ и θ_j — соответственно случайные амплитуды и длительности всплесков детерминированной формы $s(u)$, а $\{t_j\}$ — пуассоновская последовательность моментов всплесков. Если считать протяженность всплесков фиксированной величиной ($\theta_j \equiv \theta = \text{const}$), то спектр мощности дробового шума

$$g_i(\nu) = \bar{n} \bar{a}^2 \theta^2 |S(\nu\theta)|^2, \quad \nu > 0, \quad (4)$$

где $\bar{n}$ — средняя частота всплесков, $S(z)$ — трансформанта Фурье кривой блеска отдельной вспышки $s(u)$. Предположим, что «хвост» вспышки имеет степенную форму, т. е. $s(u) \propto |u|^{-q}$, $0 < q < 1$ при $|u| \gg 1$. Тогда спектр мощности имеет при $\nu \ll \theta^{-1}$ вид (1) с показателем

$$\gamma = 2(1 - q), \quad 0 < \gamma < 2. \quad (5)$$

Для того, чтобы получить $\gamma \simeq 1$, нужно принять $q \simeq 1/2$, т. е. вспышки затухают весьма медленно как $t^{-1/2}$ при $t \gg \theta$. Именно наложение протяженных «хвостов» всплесков обеспечивает в данной модели сильную низкочастотную переменность, отвечающую фликкер-шуму. Но, вместе с тем,

как нетрудно убедиться, это наложение в случае $q \leq 1$ приводит и к расходимости среднего значения $\langle \xi(t) \rangle$, т. е. процесс (3) становится нестационарным (дисперсия σ_ξ^2 конечна при $q > 0.5$). Сама по себе расходимость среднего не является решающей трудностью, т. к. вариации светимости активного ядра не обязаны быть стационарными, однако при этом едва ли возможно согласовать наблюдаемые дисперсию потоков $\sigma_F^2 \simeq 4$ и низкое среднее значение переменной составляющей $\bar{F}_B^{(var)} \simeq 5$.

Численные реализации процесса (3) при $s(u) = (1+u)^{-q}$, $u \geq 0$, $q = 0.55$ показали весьма близкое сходство с наблюдаемой кривой блеска NGC 4151 (рис. 1) и вместе с тем подчеркнули трудность интерпретации низкого среднего уровня переменного компонента.

Возможно остаться в рамках модели дробового шума, если рандомизировать длительности вспышек θ_j , так что спектральная плотность (4) принимает вид

$$g_\xi(\nu) = \bar{n} \bar{a}^2 \int |S(\nu\tau)|^2 p_\theta(\tau) \tau^{-2} d\tau. \quad (6)$$

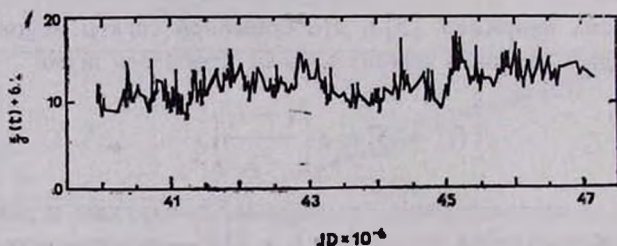


Рис. 4. Одна из реализаций случайного процесса, заданного соотношением (3).

где $p_\theta(\tau)$ — плотность распределения θ_j . Полагая $p_\theta(\tau) \propto \tau^{-2}$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, находим из (6), что $g_\xi(\nu) \propto \nu^{-1}$ в области частот $(2\pi\tau_1)^{-1} \lesssim \nu \lesssim (2\pi\tau_0)^{-1}$. На более низких частотах $g_\xi(\nu)$ соответствует белому шуму, а на высоких — спадает пропорционально ν^{-2} . На рис. 4 представлена типичная реализация процесса (3), вычисленная при значениях $\bar{n} = 1$, $\bar{a} = 2/3$, $\tau_0 = 1$ сут., $\tau_1 = 3 \cdot 10^4$ сут. и экспоненциальной форме вспышек и плотности распределения амплитуд (при этом средняя длительность вспышки $\bar{\theta} \simeq 10$ сут.). Моменты наблюдения процесса совпадают с наблюдаемой совокупностью таковых для NGC 4151, значения ординат сдвинуты вверх на 6,2 в соответствии с принятой оценкой вклада звездной составляющей галактики. Периодограмма этой реализации в обычном и двойном логарифмическом масштабах представлена на рис. 5.

6. *Обсуждение.* Модельная кривая блеска на рис. 4 во многих чертах напоминает реальную кривую блеска NGC 4151; возможно, рис. 4 мог бы рассматриваться как продолжение рис. 1. Поскольку визуальный анализ позволяет выделить не только двухточечные характеристики процесса, но и характеристики высоких порядков [2], сходство кривых блеска не следует недооценивать.

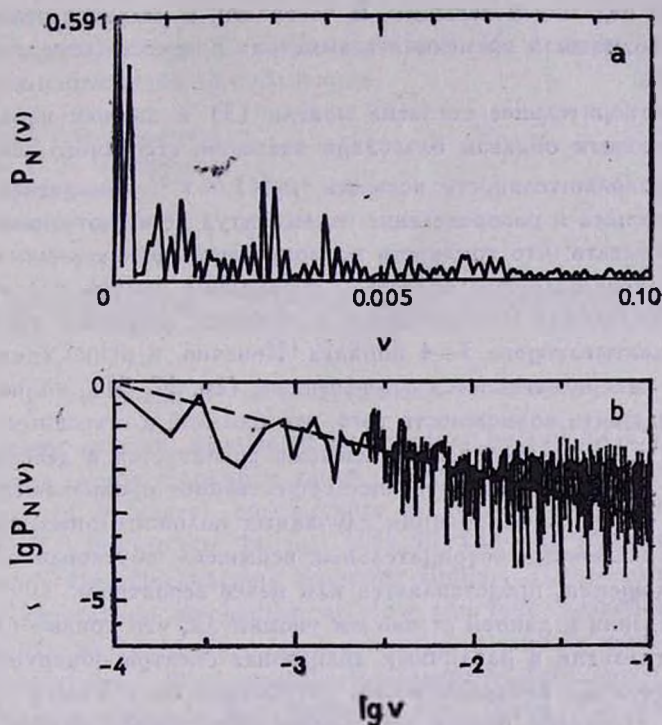


Рис. 5. Периодограмма модельной кривой блеска, приведенной на рис. 4, в линейном (а) и двойном логарифмическом (b) масштабах. Пунктирная прямая соответствует $P_N(v) \propto v^{-1}$.

Периодограмме случайной реализации (рис. 5а) присущи столь же нерегулярные флуктуации, которые наблюдаются на периодограмме действительной кривой блеска (рис. 2b). В первом случае этим флуктуациям заведомо не отвечают никакие периодические компоненты; то же справедливо, по-видимому, и для действительных колебаний блеска NGC 4151 с характерным временем, превосходящим десятки суток. Этот вывод согласуется и с упомянутыми выше результатами авторегрессионного анализа. Для изучения более быстрых колебаний и формы отдельных вспышек нужно выполнить специальную программу наблюдений.

В модели дробового шума (3) важную роль играет безразмерный параметр $N_0 \equiv \bar{n} \bar{\theta}$ — среднее количество вспышек, случившихся в течение промежутка времени, равного средней продолжительности одной вспышки. Для согласования модели и данных наблюдений нам потребовалось принять $N_0 \sim 10$, т. е. допустить значительное перекрытие отдельных вспышек. Это согласуется с тем фактом, что при детальном изучении кривой блеска NGC 4151 в большом масштабе не удастся выявить сколь-нибудь правильных отдельных вспышек. В частности, в исследованном частотном диапазоне возможная временная асимметрия процесса (*стрела времени*) не проявляется.

Удовлетворительное согласие модели (3) и данных наблюдений достигнуто главным образом благодаря введению степенного закона распределения продолжительности вспышек $p_0(\tau) \propto \tau^{-2}$; конкретная форма отдельных вспышек и распределение их амплитуд не имеют значения. Поэтому можно сказать, что трудность интерпретации фликкер-шума перенесена в данном случае в другую область — необходимо понять, почему степенной закон распределения θ сохраняется в пределах широкого временного диапазона, охватывающего 3—4 порядка. Конечно, а priori сделанное предположение не представляется естественным (см. [2, 5]), но нельзя и полностью исключить возможность того, что близкий к степенному закон распределения продолжительностей вспышек реализуется в действительности. Во всяком случае, это единственное существенное предположение, требующееся для модели суперпозиции случайных положительных вспышек. Допущение о реальности «отрицательных вспышек», обусловленных флуктуациями поглощения, представляется нам менее вероятным.

Во введении к данной статье мы упомянули, что кривые блеска активных ядер галактик в различных диапазонах спектра обнаруживают свойство масштабной инвариантности, относящее их к классу одномерных фракталов. Нетрудно понять, что автоподобие кривой блеска приводит к степенному возрастанию ее длины L по мере уменьшения длины интервала Δt , с которым производятся измерения: $L \propto \Delta t^{-D}$. Рэйн [26] показал, что фрактальная размерность D связана с показателем γ степенного спектра (1) простым соотношением

$$\gamma = 2(1 - D). \quad (7)$$

В отличие от рентгеновских измерений, оценка D по оптическим данным затруднительна ввиду значительной неравномерности отсчетов. Предварительное изучение показывает, что для оптических вариаций потока NGC 4151 степенной характер зависимости L от Δt , выполняется. Более подробное описание будет дано позднее. Пока обратим внимание лишь на то, что в модели суперпозиции вспышек степенной формы

$s(u) \propto |u|^{-q}$, $|u| \gg 1$ мы имеем из сравнения (5) и (7) простое соотношение $D = q$, т. е. фрактальная размерность совпадает с показателем скорости угасания вспышек.

Суммируя результаты анализа, можно сказать, что кривая блеска NGC 4151 не содержит указаний на реальность отдельных компонентов с характерными временами, превосходящими 50 сут.; весьма правдоподобно, что наблюдаемые вариации потока порождаются наложением отдельных независимых вспышек.

Авторы признательны Е. Т. Белоконов и В. М. Лютому за предоставление данных наблюдений до публикации.

Государственный астрономический
институт им. П. К. Штернберга,
Крымская астрофизическая
обсерватория

FLICKER NOISE MODEL FOR OPTICAL FLUX VARIABILITY OF NGC 4151

V. Yu. TEREbizh, A. V. TEREbizh, V. V. BIRYUKOV

The power spectral density of the Seyfert galaxy NGC 4151 optical flux variations in the frequency range $10^{-4} - 2 \cdot 10^{-2}$ cycle/day (periods from 50 days to 30 years) corresponds to flicker noise with spectral index $\gamma \simeq 1.0$. The colour indices U-B of the low-frequency and the high-frequency flux fluctuations are very similar. These results indicate the single generation mechanism of slow and fast variations and give an opportunity to avoid the complex multicomponent model for observational light curve. It is possible to interpret light curve as a result of superposition randomly distributed in time flares. The corresponding stochastic models of variability are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Angione, H. J. Smith, *Astron. J.*, 90, 2474, 1985.
2. W. H. Press, *Comments Astrophys.*, 7, 103, 1978.
3. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, Наука, М., 1968.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, Наука, М., 1976.
5. A. Lawrence, M. G. Watson, K. A. Pounds, M. Elvis, *Nature*, 325, 694, 1987.
6. I. McHardy, B. Czerny, *Nature*, 325, 696, 1987.
7. R. Mushotzky, *Nature*, 325, 666, 1987.
8. C. M. Urry, *Sp. Tel. Sci. Inst. Prepr. No. 270*, 1988.
9. B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.

10. *M. V. Penston, M. J. Penston, G. Neugebauer, R. P. Trillton, E. E. Becklin, N. Visvanathan*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 153, 29, 1971.
11. *M. V. Penston, M. J. Penston, R. A. Selmes, E. E. Becklin, G. Neugebauer*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 169, 357, 1974.
12. *Е. Т. Белокано*, Частное сообщение.
13. *В. М. Лютый*, *Астрон. ж.*, 1989 (в печати).
14. *A. Schuster*, *Terrestrial Magn.*, 3, 13, 1898.
15. *A. Schuster*, *Proc. Roy. Soc.*, 77, 136, 1906.
16. *D. F. Gray, K. Desikachary*, *Astrophys. J.*, 181, 523, 1973.
17. *T. J. Deeming*, *Astrophys. and Space Sci.*, 36, 137, 1975.
18. *М. Кендалл, А. Стюарт*, *Многомерный статистический анализ и временные ряды*, Наука, М., 1976.
19. *A. G. Pacholczyk, N. D. Lubart, W. R. Penning, D. H. Ferguson, D. Turushek*, *Astrophys. Lett.*, 23, 225, 1983.
20. *F. J. M. Barning*, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 17, 22, 1963.
21. *P. Vaniček*, *Astrophys. and Space Sci.*, 12, 10, 1971.
22. *N. R. Lomb*, *Astrophys. and Space Sci.*, 39, 447, 1976.
23. *G. G. Fahlman, T. J. Ulrich*, *Astrophys. J.*, 201, 277, 1975.
24. *В. А. Гаген-Торн*, *Астрофизика*, 22, 449, 1985.
25. *В. А. Гаген-Торн*, *Астрофизика*, 26, 415, 1987.
26. *D. Raine*, см. работу [6].