Wien n: Cat.

ԼՈՒԴՈՎԻԿՈՍԻ ԹԻԼՈՅԻ

ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ՊԱՐԶ ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ

ԹԱՐԳՄԱՆԵՑ

Հ. ՊԵՏՐՈՍ Վ. ՊԻՒԼՊԻՒԼՃԵԱՆ

Ի ՄԽԻԹ. ՈՒԽՏԷՆ

ՎԻԷՆՆԱ
ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ ՏՊԱՐԱՆ
1868

ՄԱՏԵՆԱԴԱՐԱՆ
ԱՐԱՄԵԱՆ ԸՆԿԵՐՈՒԹԵԱՆ

ԺԲ.

ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ՊԱՐԶ ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ

ԼՈՒԴՈՎԻԿՈՍԻ ԹԻԼՈՑԻ

ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ՊԱՐԶ ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ.

ԹԱՐԳՄԱՆԵՑ

Հ. ՊԵՏՐՈՍ Վ. ՊՈՒԼՊՈՒԼՃԵԱՆ

Ի ՄԽԻԹ. ՈՒԽՏԷՆ

ՎԻԷՆՆԱ

ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ ՏՊԱՐԱՆ

1868

ՅԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ասկէ քանի մը տարի յառաջ Լուդ. Թիլշի Ուսո-ղութեան (Մաթեմաթիկի) անզուգական դասագիրքը թարգմանած ըլլալովս, եւ այլեւայլ անգամներ ալ ան-ձամբ մեր վարժարաններուն մէջ ձեռագրին վրայէն դաս տալով, տեսնուեցաւ որ ասոր տպագրութիւնն ազգային հասարակութեան մեծապէս օգտակար՝ մանաւանդ թէ հարկաւոր ծառայութիւն մը կրնայ ըլլալ:

Որովհետեւ քաջահմուտ հեղինակն այս դասա-գրքին քիչ թերթերուն մէջ այնպիսի զարմանալի ե-ղանակաւ բոլոր Ուսողութեան բովանդակ ուսմունքը համառօտած ամփոփած է, որ ամենեւին բան մը դուրս չէ մնացած, որն որ չափաւոր խելքի մը համար զգալի ըլլայ. կամ թէ ըսեմ, Ուսողութեան պտղաբեր ճըշ-մարտութենէն ամենեւին պակաս բան թողուցած չըլ-լալով, կրնայ մարդ ասով ամբողջ Ուսողութեան ուս-մունքը հիմնական ու հաստատուն եղանակաւ, միան-գամայն համառօտութեամբ սորվիլ: Լուարդէն Ֆրանք-ֆուրդի պէս քաղաքի մը, գերմանական երեւելի դպրոցներէն մէկուն մէջ, հեղինակին այս դասագիրքը գործածելը՝ ըսածնիս կը հաստատէ:

Դասագիրքս համառօտ ըլլալով, ան ամէն բան՝ որ սրամիտ հեղինակի մը հմտութեան ցոյց կրնայ տալ, բայց գրքին ընթացքին հետ սերտ կապակցութիւն չունի, մէջը չի գտնուիր. ամէն օրինակ մէյմէկ զատ կանոն կ'ակնարկէ: Մանաւանդ առաջին մասին մէջ աւելորդ տող մ'ալ չկայ: Ստորին մասերը կարելի եղա-ծին չափ համառօտ են, եւ ասոր ալ պատճառ՝ որով-հետեւ Ուսողութեան բարձրագոյն մասերը միշտ ստորինները կ'ենթադրեն, եւ անոնցմով միայն կրնան հասկըցուիլ, անոր համար ալ գլխաւոր նախադասութեանց համառօտ ամփոփումն ուսանողաց ձեռքը թէ մեծապէս բաղձալի եւ թէ պիտանի բան մըն է, ուր այնպիսի հրահանգ մը կը պարունակուի, որ ինք իրմէ դիւրաւ կրնայ ընդարձակուիլ, եւ սորվողին մտադրութիւնը կը զարթուցանէ, ընթացիկ վարժութիւն մը ստանալ կու տայ, եւ միանգամայն կարգաւորեալ դասախօսութեանց համար ալ կրնայ գործածուիլ: Իսկ բարձրագոյն մասերն այն համառօտութեան հարկաւորութիւն չունենալով՝ աւելի ընդարձակ են:

Արդէն յայտնի բան է՝ որ դասագրքին իւրաքանչիւր հատածն ալ սորվեցընելու ատեն, դասատու ըլլողն ազատ է հարկաւոր դատածին պէս իր աշակերտացը պիտոյից ու խելքին ընդունակութեանը համեմատ, կամ համառօտ անցնիլ եւ կամ մեկնութեամբ աւելի ընդարձակել: Միայն ասոր պիտի միտ դնէ, որ չըլլայ թէ իր աշակերտաց մէկը, վարժոցին դասերէն անցնի առանց կատարեալ Ուսողութեան շահաւէտ կրթութիւն մ'ընդունած ըլլալու:

Վերջապէս հեղինակին աշխատութիւնը փոքրիկ սերմ մըն է, որ մենք մեր բնիկ երկիրը կը փոխադրենք մեր թարգմանութեամբը, ուսուցչին հոգն ու խնամքը սերմանէ պիտի զանիկայ ուսանողաց մտքին մէջ, եւ եթէ աշակերտաց ալ աշխատութեան քրտինքն ոռոգելու ըլլայ, կը բուսցընէ անոնց մտքին մէջ ամբողջ Ուսողութեան պտղաբեր տունկը, որուն ինչչափ պիտանի եւ հարկաւոր ըլլալը ցուցընելն աւելորդ աշխատութիւն համարելով, միայն տեղեակ եղողներուն կը նուիրենք մեր աշխատութիւնը, եւ ազգին օգուտն ալ կը սեպենք մեր վարձքը:

ՑԱՆԿ

Ա. ԹՈՒԱԲԱՆՈՒԹԻՒՆ

ԱՆՏԵԲՐԱ

Բ. ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Ա. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ — 1. *Հարթաչափութիւն*:

2. *Հաստատաչափութիւն*:

Բ. ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Գ. ՀԱՏԱԾ ԿՈՆԻ

ՀԱՇԻՒ ԱՐԱՄԵԱՆ ԸՆԿԵՐՈՒԹԵԱՆ

Ի սկզբանէ Յունուարի 1867 ց30 Յունիսի 1868։

Թ. Թղ. Հատ.	Անուանք Աշխուական եւ Ազգասէր Ընկերացն	Աւուրք յորս գրեցանն	Բաժին	Գլուխ Դրամ. / Նոր Փ. Աւստ.
5	Արէլեան Պարոն Գրիգոր .	10 Ապրիլ 1843	2	210
7	Աշարեան Պարոն Յովհաննէս	1 Դեկտ. 1843	3	315
25	Աշնաւորեան Միքայէլ Աղա	2 Նոյեմբ. 1845	1	105
21	Ալլահվէրտեան Աբրահամ Ամիրայ	11 Ապրիլ 1845	1	105
22	Ալլահվէրտեան Անտոն Պէյ	11 Ապրիլ 1845	1	105
29	Ալլահվէրտեան Գրիգոր եւ Յովհաննէս Պէյ . . .	20 Յունիս 1847	1	105
36	Անանիա Աղա Թոսունեան .	31 Դեկտ. 1852	1	105
3	Ապրօեան Պարոն Աբրահամ	10 Ապրիլ 1843	2	210
4	Ապրօեան Պարոն Յոսեփան	10 Ապրիլ 1843	4	420
39	Աստուածատուր Աղա Ջունդեան	12 Յուլիս 1862	1	105
31	Աւգալեան Պր. Յովհաննէս	6 Յունիս 1849	1	105
20	Բավլօ Պարոն Մկրտիչ . .	1 Յունու. 1845	1	105
27	Գրլճեան Վ. իչէն Աղա . .	1 Փետր. 1846	1	105
16	Եղիսաբեթուպօլսոյ յարգոյ Հասարակութիւն . . .	8 Յուլիս 1844	1	105
2	Եուսուֆեան Պետրոս Ամիրայ	10 Ապրիլ 1843	5	525
23	Ջէմպէրէքճեան Պետրոս Աղա	4 Յունիս 1845	1	105
24	Թրնկրեան Յովհաննէս Աղա	24 Յուլիս 1845	1	105
19	Լազարէվ Պարոն Խաչատուր Ներգործ. խորհրդական եւ սեննեկապետ Կայսեր Ռուսաց	30 Սեպտ. 1844	3	315
38	Կաթողիկոս. Լիբանանու .	31 Հոկտ. 1861	1	105
12	Կարապետեան Պարոն Յովհաննէս	14 Դեկտ. 1843	1	105
30	Համազգեաց յարգոյ Ընկեր. ի Կոստանդնուպոլիս . .	4 Յունու. 1848	1	105
		փոխադրի գումարն	34	3570

Թիւ. Թղ. Հաս.	Անուանք Ազնուական եւ Ազգասէր Ընկերացն	Աւուրք յորս գրեցանն	Բաժին	Գլուխ Դրամ. / Նոր Փ. Աւստ.
	փոխադրի գումարն ի նախընթաց երեսէ . .		34	3570
8	Համսօն Պարոն Վիչէն . .	4 Դեկտ. 1843	2	210
9	Ճէվահիրճեան Պարոն Գրիգոր	10 Դեկտ. 1843	2	210
11	Մանասեան Պարոն Բուզանդ	11 Դեկտ. 1843	1	105
32	Մարտիրոսեան Պր. Գալստան	30 Յունու. 1850	1	105
15	Մ. Վ.	18 Ապրիլ 1844	1	105
37	Յարութիւն Աղա Հանըմեան	30 Յունիս 1857	1	105
33	Յովհաննեան Պր. Ղազարոս	30 Յունու. 1850	1	105
13	Նիկողայոսեան Պարոն Ղազարոս	20 Դեկտ. 1843	1	105
14	Շանշեան Պարոն Նիկողայոս	8 Յուլիս 1845	1	105
34	Պիւլպիւլճեան Պր. Յովսէփ	25 Յունիս 1850	1	105
1	Ռափայէլ Ղարամեան Պարոն Աղէքսանդր Ասպետ .	4 Մարտ 1843	5	525
18	Սամոշուլվարու յարգոյ Հասարակութիւն	31 Յուլիս 1844	1	105
6	Սարգսեան Յակոբ Աղա .	1 Դեկտ. 1843	2	210
10	Սարգսեան Պարոն Ռոտոլֆ	11 Դեկտ. 1843	1	105
28	Տատեան Յովհաննէս Ամիրայ	5 Մայիս 1847	2	210
26	Տէվրիշեան Սերովբէ Աղա .	11 Յունու. 1846	1	105
35	Տէր Ներսէս Փինճանճեան .	31 Օգոստ. 1851	1	105
1 7	Տիւզեան Յակոբ Չէլէպի .	27 Յուլիս 1844	2	210
			61	6405

ՄՈՒՏՔ

	Նոր Փիոր.	Աւստր.		
Ի Վեցերորդ հաշուէ յաւելուր . .	422	10		
Շահ % 4 վերագոյն գրեալ 6405 գլխոյ դրամոց մինչեւ ցայսօր	384	30		
Ի Վաճառելոյ 7 օրինակաց Ա. մատենին	5	85		
,, 3 ,, Բ. ,,	2	30		
,, 5 ,, Գ. ,,	5	50		
,, 70 ,, Դ. ,,	92	12		
,, 2 ,, Ե. ,,	2	30		
,, 3 ,, Զ. ,,	3	40		
,, 70 ,, Է. ,,	56	—		
,, 37 ,, Ը. ,,	125	70		
,, 1 ,, Թ. ,,	1	30		
,, 1 ,, Ժ. ,,	1	30		
,, 19 ,, ԺԱ. ,,	25	—		
			1127	17

ԵԼՔ

	Նոր Փիոր.	Աւստր.		
Այլեւայլ ծախուց	48	—		
Դրոշմելոյ Սկզբնական Դասագրոյ պարզ ուսողութեան	490	–		
Յաւելու, զոր անցուցանեմք յԸ. Հաշիւն	589	17		
			1127	17

ՊԱՏՐԱՍՏՈՒԹԻՒՆ

1. Ուսողութիւնը հաստատուած է այն գաղափարներուն վրայ, որ ամէն մարդ ունի՝ նկատմամբ

Ա. Թուերու

Բ. Տարածութեան։

Անոր համար ալ ուսողութիւնն երկու կը բաժնուի. Թուաբանութիւն ու Երկրաչափութիւն։

2. Ուսողն իրեն գաղափարներ կը շինէ, որոնք ունեցած առաջին գաղափարներուն հակառակ չեն, եւ զանոնք կը սահմանէ Մեկնութիւններով։ Աս մեկնութիւններէն նոր ճշմարտութիւններ յառաջ կը բերէ պարզ նախադասութիւններով (որոնք Սկզբունք ալ կ՚ըսուին), զորոնք ամէն բանաւոր մարդ հարկ է ճանչնայ։ Այսպէս առանց փորձի կարօտելու եւ միանգամայն առանց իր մտքէն խաբուելու վտանգի, անշարժ գիտութեան շէնք մը կը շինէ իրեն, որն որ բոլորովին անտարակուսելի ու անհակառակելի է։

Ա. ԹՈՒԱԲԱՆՈՒԹԻՒՆ

Թիւ:

3. Համրելու ժամանակ Տասնորդեան եղանակը կը գործածենք, այսինքն մինչեւ տասը կը համրենք: Ասիկայ ըստ ինքեան կամայական բան մըն է. միայն դիւրութեան կողմանէ կրնայ ըլլալ, որ մէկ եղանակը մէկալ եղանակէն առաւելութիւն մ'ունենայ: Բայց աս առաւելութիւնն ոչինչ է համեմատութեամբ ան վնասին, որ մինչեւ հիմայ ընդհանուր գործածուած թուերու եղանակը թող տալէն յառաջ կու գայ:

4. Թուերը գրելու եղանակն ալ կամայական բան մըն է. բայց թէ ինչպէս հարկաւոր է դիւրին գրելու եղանակ մ'ունենալը, ուսողութեան պատմութիւնը մեզի կը սորվեցնէ: Վասնզի հնոց ժամանակը թուաբանութիւնն երկրաչափութեան համեմատութեամբ շատ ստորին աստիճանի կատարելութեան մէջ էր: Ամենէն յառաջ Գերբերտոս, որ ետքէն Սեղբեստրոս Բ. Քահանայապետ եղաւ, աս գրելու պարզ եղանակը, որուն մէջ թուերուն զօրութիւնը նաեւ իրենց տեղէն կ'որոշուի, տասներորդ դարուն մէջ Սպանիա Արաբացւոցմէ սորվեցաւ ու անկէ մեզի հասաւ:

Չորս գործողութիւնք:

5. Այն թիւը՝ որ ուրիշ մեկտեղ առնուած երկու թուերու հաւասար է, նոյն թուերուն Բովանդակութիւնը կամ Գումարը կ'ըսուի (տես 15):

6. Թիւ մը՝ որով երկու թուերէն մէկը մէկալէն մեծ է, այն երկու թուերուն Այլակերպութիւնը կամ Մնացորդը կ'ըսուի:

7. Այն թիւը՝ որ ուրիշ շատ անգամ առնուած թուոյ մը հաւասար է, Արդիւնք կամ Արտադրեալ կ'ըսուի:

8. Այն թիւը՝ որ կը ցուցնէ թէ քանի անգամ թիւ մը ուրիշ թուոյ մէջ կը գտնուի, Քանորդ կ'ըսուի:

9. Բովանդակութիւն մը, այլակերպութիւն մը, արդիւնք մը կամ քանորդ մը գտնելու համար, մասնաւոր հաշուի գործողութիւններ պէտք է ընել, որ Չորս Գործողութիւնք կ'անուանուին: Ուստի կը գտնուի.

Բովանդակութիւնը՝ գումարելով,
Այլակերպութիւնը՝ հանելով,
Արդիւնքը՝ բազմապատկելով,
Քանորդը՝ բաժնելով:

10. Հանման մէջ այն թիւը՝ որմէ ուրիշ թիւ մը պիտի հանուի Նուազելի կ'ըսուի, իսկ ան՝ որ մէկալէն պիտ'որ ելլէ՝ Հանելի:

11. Բազմապատկութեան մէջ՝ թէ ան թիւն որ շատ անգամ պիտ'որ առնուի, եւ թէ ան որ կը ցուցնէ թէ քանի անգամ պիտ'որ առնուի, Առնելի կ'ըսուին: Վասնզի նոյն արդիւնքը կ'ելլէ՝ եթէ 6ը հինգ անգամ, կամ 5ը վեց անգամ առնելու ըլլանք:

12. Բաժանման մէջ այն թիւը՝ որ պիտի բաժնուի, Բաժանելի կ'ըսուի, իսկ որով միւսը պիտի բաժնուի՝ Բաժանարար:

13. Չորս գործողութիւններէն մէկուն կիրառութիւնը ցուցնելու համար, զանազան նշաններ կը գործածուին:

Բովանդակութեան համար $+$
Հանելու համար $-$
Բազմապատկելու համար $\times$ կամ $\cdot$
Բաժնելու համար $:$ կամ ուղիղ գիծ մը՝ որուն վերի կողմը բաժանելին եւ վարի կողմը բաժանարարը կը դրուի:

Հաւասարութեան նշանն ալ $=$ է. զօրօրինակ.

$$15 + 6 = 21$$
$$21 - 6 = 15$$
$$4 \times 6 \text{ կամ } 4 \cdot 6 = 24$$
$$24 : 6 \text{ կամ } \frac{24}{6} = 4$$

14. Աս գրուած օրինակները՝ ինչպէս $15 + 6$ եւ այլն, բովանդակութիւն, այլակերպութիւն եւայլն կ'անուանուին, թէպէտ ըստ ինքեան աս անունները հաւասարութեան գծին աջ կողմն եղող թուերուն միայն կը պատշաճին, բայց ասկէ խօսքի մէջ երկդիմութիւն մը չի ծագիր:

15. Ինք իրեն յայտնի է՝ որ բովանդակութեան մը վրայ ուրիշ երկրորդ, երրորդ, չորրորդ թիւ մը կրնայ աւելցուիլ, կամ այլակերպութենէ մը՝ ուրիշ երկրորդ, երրորդ, չորրորդ թիւ մը կրնայ հանուիլ, եւ կամ արդիւնք մը՝ ուրիշ երկրորդ, երրորդ, չորրորդ թուով մը կրնայ բազմապատկուիլ, եւ կամ քանորդ մը՝ ուրիշ երկրորդ, երրորդ, չորրորդ թուոյ մը վրայ կրնայ բաժնուիլ:

16. Նոյնպէս յայտնի է՝ որ արդեանց մ'առնելինները կրնան դարձեալ բովանդակութիւն, այլակերպութիւն, քանորդ կամ արդիւնք ըլլալ, եւ թէ ընդհանրապէս այսպիսի գրուածքներ ուղուածին չափ կրնան շինուիլ:

17. Բայց որպէսզի ամէն երկդիմութիւն վերցուի, որ այսպիսի քովէ քով գրուած թուերէն կրնայ յառաջ գալ, այն թուերն որոնք իբրեւ ամբողջ թիւ պիտ'որ առնուին, փակագծի մէջ կը դրուին. զօրօրինակ.

$$(7 + 4) \cdot (8 - 2) = 11 \cdot 6 = 66$$
$$7 + 4 \cdot (8 - 2) = 7 + 4 \cdot 6 = 7 + 24 = 31$$
$$(7 + 4) \cdot 8 - 2 = 11 \cdot 8 - 2 = 88 - 2 = 86$$
$$7 + 4 \cdot 8 - 2 = 7 + 32 - 2 = 37$$

18. Հինգ ու վեց համարներէն կը հետեւի՝ որ եթէ թուոյ մը վրայ ուրիշ թիւ մը աւելցուի, եւ բովանդակութենէն դարձեալ նոյն թիւը հանուի, այն թիւն իր առաջին վիճակը կը մնայ. ինչպէս.

$$9 + 8 - 8 = 9$$
նոյնպէս $$9 - 8 + 8 = 9$$

19. Եօթն եւ ութը համարներէն կը հետեւի՝ որ եթէ թիւ մը ուրիշ թուով բազմապատկուի եւ միանգամայն բաժնուի, անփոփոխ կը մնայ. ինչպէս.

$$\frac{6 \times 2}{2} = 6 \text{ կամ } \frac{6}{2} \times 2 = 6:$$

Կոտորակ:

20. Այնպիսի դէպքի մէջ, ուր բաժանելին բաժանարարէն պզտիկ ըլլայ, ինչպէս $\frac{5}{6}$, եւ անկարելի ըլլայ պարզ թուով մը ցուցնել թէ բաժանարարը բաժանելոյն մէջ քանի անգամ կը գտնուի, դիւրին եղանակաւ կրնայ մտածուիլ՝ որ 1 ամբողջը զանազան հաւասար մասունքներու բաժնուած (հոս 6) եւ անկէ մէկ քանին (հոս 5) առնուած ըլլայ: Այսպիսի դէպքի մէջ քանորդը Կոտորակ կ'ըսուի, եւ կը կարդացուի "հինգ

վեցերորդական,,. 5ը հոս Համարիչ ու 6ը Անուանիչ կամ Յայտարար կ'ըսուի:

21. Այս եղանակը կը գործածուի նաեւ այն ատեն, երբ որ բաժանելին բաժանարարէն մեծ ըլլայ, մանաւանդ երբ որ բաժանելին առանց մնացորդի բաժանարարին վրայ չկարենայ բաժնուիլ, զորօրինակ $\frac{15}{4}$ տասնուհինգ քառորդ $= \frac{12+3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$. բայց համառօտութեան համար $3\frac{3}{4}$ (երեք ու երեք քառորդ) կը գրուի:

Կոտորակներուն՝ հաշիւներու մէջ յաճախ գործածուելուն պատճառաւ, աղէկ կ'ըլլայ եթէ զանազան կարելի դէպքերու համար մասնաւոր կանոններ յառաջ բերենք, զորոնք պէտք է միանգամ ընդ միշտ միտքը պահել:

22. Եթէ կոտորակի մը համարիչը՝ թուով մը բազմապատկուելու ըլլայ, բոլոր կոտորակն ան թուով բազմապատկուած կ'ըլլայ. զորօրինակ.

$$\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{12} = \frac{20}{12} = 1\frac{8}{12}$$

23. Եթէ կոտորակի մը համարիչը՝ ամբողջ թուոյ մը վրայ բաժնուի, բոլոր կոտորակն ան թուոյն վրայ կը բաժնուի. ինչպէս.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$$

24. Եթէ կոտորակի մը անուանիչը՝ ուրիշ ամբողջ թուով մը բազմապատկուի, բոլոր կոտորակն ան թուոյն վրայ կը բաժնուի. զորօրինակ.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$$

25. Եթէ կոտորակի մը անուանիչը՝ ամբողջ թուոյ մը վրայ բաժնուի, բոլոր կոտորակն այն թուով կը բազմապատկուի. ինչպէս.

$$\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{5}{12:4} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

26. Ուրեմն՝ եթէ կոտորակի մը թէ համարիչն ու թէ անուանիչը նոյն թուոյն վրայ բաժնուելու ըլլայ, 23 համարին համաձայն կը բաժնուի եւ 25 համարին համաձայն կը բազմապատկուի, քստ հետեւորդի 19 համարին համաձայն իր առջի զօրութիւնը կը պահէ. ինչպէս.

$$\frac{6}{21} = \frac{6:3}{21:3} = \frac{2}{7} \text{ (տես 23 ու 25)}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$

Ասոր վրայ հաստատուած է կոտորակները պզտիկցնելու եղանակը:

27. Եթէ կոտորակի մը թէ համարիչն եւ թէ անուանիչը նոյն թուով բազմապատկուելու ըլլայ, 22 համարին համաձայն կը բազմապատկուի եւ 24 համարին համաձայն ալ կը բաժնուի, ուրեմն 19 համարին համաձայն իր առջի զօրութիւնը կը պահէ. զորօրինակ.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20} \text{ (տես 22 ու 24)}$$

Ասոր վրայ հաստատուած է կոտորակներն ընդհանուր անուանի դարձընելու կերպը: Օրինակներն ետեւի համարին մէջ կը տեսնենք:

28. Խնդիր. Կոտորակներն իրարու հետ գումար ընել:

Պատասխան. Երբ անուանիչները նոյն են, պէտք է համարիչները գումար ընել, եւ բովանդակութեան հասարակաց անուանիչը տալ. զորօրինակ.

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Իսկ երբ անուանիչները նոյն չեն, պէտք է ընդհանուր անուանի դարձընել. զորօրինակ.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$$

Ուրիշ օրինակ.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{2\cdot5\cdot7}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3\cdot3\cdot7}{5\cdot3\cdot7}+\frac{4\cdot3\cdot5}{7\cdot3\cdot5}=$$
$$\frac{70}{105}+\frac{63}{105}+\frac{60}{105}=\frac{193}{105}=1\,\frac{88}{105}\text{:}$$

29. **Խնդ.** Կոտորակներն իրարմէ հանել։

Պտ. Երբ անուանիչները նոյն են, պէտք է համարիչներն իրարմէ հանել, եւ տարբերութեան հասարակաց անուանիչը տալ. զորօրինակ. $\frac{9}{10}-\frac{5}{10}=\frac{4}{10}$

Իսկ երբ անուանիչները նոյն չեն, պէտք է ընդհանուր անուանիչի դարձնել. զորօրինակ.

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}\text{:}$$

30. **Խնդ.** Կոտորակներն իրարու հետ բազմապատկել. ինչպէս $\frac{4}{5}$ ը $\frac{2}{3}$ ի հետ։

Պտ. Հոս $\frac{4}{5}$ ը 2 ամբողջին հետ պիտի չբազմապատկենք, այլ 2 ամբողջին երրորդ մասին հետ։ Ուրեմն պէտք է 2ով բազմապատկել ու 3ի վրայ բաժնել, որով կ'ըլլէ.

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\cdot2}{5\cdot3}=\frac{8}{15}\ (22,\ 24)$$

Ասկէ յառաջ կու գայ ընդհանուր կանոնն որ.

Պէտք է համարիչը համարիչին եւ անուանիչն անուանիչին հետ բազմապատկել։

31. **Խնդ.** Կոտորակներն իրարու վրայ բաժնել. ինչպէս $\frac{4}{5}$ ը $\frac{2}{3}$ ի վրայ։

Պտ. Հոս $\frac{4}{5}$ ը 2 ամբողջի վրայ պիտի չբաժնենք, այլ 2 ամբողջին երրորդ մասին վրայ։ Բայց 2 ամբողջին երրորդ մասը, 2 ամբողջէն երեք անգամ աւելի կը գտնուի $\frac{4}{5}$ ին մէջ, ուրեմն պէտք է 2ի վրայ բաժնել ու 3ով բազմապատկել, որով կ'ըլլէ.

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4\cdot3}{5\cdot2}=\frac{12}{10}=1\,\frac{2}{10}\,(22,24)\text{:}$$

Ասկէ յառաջ կու գայ ընդհանուր կանոնն որ.

Պէտք է բաժանելւոյն համարիչը՝ բաժանարարին անուանիչին եւ անուանիչը համարիչին հետ բազմապատկել։

32. Գտնենք թէ $\frac{7}{12}$ը $\frac{5}{12}$ի վրայ պիտ'որ բաժնուի. այսպէս կ'ըլլայ.

$$\frac{7}{12}:\frac{5}{12}=\frac{7\cdot12}{12\cdot5}\,(31)=\frac{7}{5}\,(26)=1\,\frac{2}{5}$$

կամ՝ եթէ կոտորակներուն անուանիչները նոյն են, պէտք է միայն համարիչներն իրարու վրայ բաժնել։

Երբեմն աւելի դիւրին կ'ըլլայ կոտորակներն ընդհանուր անուանչի դարձնել, եւ անկէ ետքը համարիչը համարչին վրայ բաժնել, ինչպէս ետքը 38 համարին դ. մէջ կը տեսնենք։

33. Վերը գրուած օրինակներուն մէջ ամէն կարելի դէպքերը կը գտնուին, նոյն իսկ այն դէպքը՝ որուն մէջ կոտորակներուն քով ամբողջ ալ կը գտնուի, վասնզի ամբողջին ալ կրնայ կոտորակի ձեւ տրուիլ. զորօրինակ.

$$6:\frac{3}{4}=\frac{6}{1}:\frac{3}{4}=\frac{6\cdot4}{1\cdot3}=\frac{24}{3}=8\ (31.)$$

Ուրիշ օրինակ.

$$3\,\frac{2}{5}\times7\,\frac{3}{4}=\frac{15+2}{5}\times\frac{28+3}{4}=$$
$$=\frac{17}{5}\times\frac{31}{4}=\frac{527}{20}=26\,\frac{7}{20}\,(21,\ 30.)$$

Տասնորդական կոտորակ։

34. Ինչպէս որ սովորական թուերը գրելու կերպին մէջ, ամէն մէկ յաջորդ թուանշանը տասնապատիկ նուազ զօրութիւն ունի, քան երբ որ ան թուանշանն

իրմէ նախընթացին տեղը կեցած ըլլար, մինչեւ աջ կողմի ամէնէն վերջի թիւը միայն պարզ ամբողջ կը ցուցընէ, այսպէս ալ կրնայ ըլլալ՝ որ աս ետքի թուանշանէն ետքը ստորակէտ մը դրուի եւ ուրիշ թուեր ալ գրուին, եւ ամէն մէկ յաջորդ թուանշաններուն մէջ տասնապատիկ նուազ զօրութիւն իմացուի. զորօրինակ.

$$36,457 \text{ ըլլայ} = 30 + 6 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$$

$$= 30 + 6 + \frac{400}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{7}{1000} = 36\,\frac{457}{1000}$$

35. Նոր մեզի գրելու դիւրին եղանակ մը կը սորվեցընէ ան կոտորակներուն համար, որոնց անուանիչը 1 ու զրոյ է, կամ **Տասներորդական կոտորակներուն** համար։ Ամբողջին պակասը զրօն կը ցուցընէ, օրինակի աղագաւ. $0,0507 = \frac{507}{10000}$։ Որպէսզի այսպէս գրուած կոտորակի մը անուանիչը շուտ աչքի առջեւ ունեցուի, պէտք է մտածել որ ստորակէտին տակը 1 գրուած է, եւ առջեւն ալ այնչափ զրոյ՝ որչափ տասներորդական թուեր (**տասներորդական տեղի**) կան։

36. Եւ որովհետեւ՝

$$\frac{5}{8} = \frac{5/8 \times 1000}{1000}\ (19) = \frac{5000}{8} : 1000$$

$$= \frac{625}{1000} = 0{,}625$$

Նոյնպէս ուրիշ օրինակի մէջ.

$$\frac{2}{3} = \frac{2/3 \times 100000}{100000}\ (19) = \frac{200000}{3} : 100000$$

$$= \frac{66666\ 2/3}{100\,000} = 0.66666 \ldots\ldots$$

Ասկէ յառաջ կը բերենք հասարակ կոտորակները տասներորդական կոտորակներու դարձընելու եղանակը։

37. Եւ որովհետեւ՝

$$\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10000} \text{ եւ այլն է. կամ}$$

$$0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000 = \text{ եւ այլն.}$$

ասկից կը տեսնուի որ տասներորդական կոտորակներուն զօրութիւնն իրենցմէ ետքը գրուած զրոներով չի փոխուիր։

Ուրեմն տասներորդական կոտորակները՝ որոնց անուանիչներն իրարու աննման են, կրնան դիւրաւ ետեւի կողմը գրուած զրոներով ընդհանուր անուանչի փոխուիլ։

38. Եւ որովհետեւ տասներորդական կոտորակները՝ միայն իրենց գրուելու եղանակովը միւս հասարակ կոտորակներէն կը տարբերին, անոր համար տասներորդական կոտորակով եղած հաշիւները, հասարակ կոտորակներով եղածներէն միայն իրենց գրուելու եղանակովը կը տարբերին։ Բայց ելածը՝ հասարակ կոտորակներուն արդեանցը հետ նոյն է։

Արդ աս ետեւի եկած կանոնները յառաջ կը բերենք, որոնք 28—32 համարներէն դիւրաւ կրնան ցուցուիլ, եթէ տասներորդական կոտորակներուն հասարակ կոտորակի ձեւ տալու ըլլանք։

ա. **Գումար ընելու համար**՝ պէտք է ստորակէտը ստորակէտին տակը գրել, եւ հասարակ թուերու պէս գումար ընել, եւ բովանդակութեան մէջ ստորակէտներուն տակը ստորակէտ մը դնել. զորօրինակ.

$$\begin{array}{r} 0,452\,. \\ 17,47\,.\,. \\ 8,9345 \\ \hline 26,8565 \end{array}$$

բ. Հանելու համար՝ պէտք է ստորակէտը ստորակէտին տակը գրել եւ հասարակ ամբողջ թուերու պէս հանում ընել, եւ պակասութեան մէջ միւս ստորակէտներուն տակը ստորակէտ մը դնել. զորօրինակ.

$$\begin{array}{r} 0{,}924 \\ 0{,}64\cdot \\ \hline 0{,}284 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6{,}3\cdot\cdot \\ 2{,}454 \\ \hline 3{,}846 \end{array}$$

գ. Բազմապատկելու համար՝ պէտք է հասարակ թուերուն պէս բազմապատկել, եւ արդեանցն այնչափ տասներորդական տեղեր տալ՝ որչափ երկու առնելիներն ալ մէկտեղ ունին. ինչպէս.

$$\begin{array}{r} 0{,}345 \\ 0{,}23 \\ \hline 1035 \\ 690\cdot \\ \hline 0{,}07935 \end{array}$$

Որովհետեւ կոտորակներէն մէկուն անուանիչը = է 1000ի, իսկ մէկալինը = է 100ի, ուրեմն երկու անուանիչներուն ալ արդիւնքը = է 100000ի (30)։

դ. Բաժնելու համար՝ պէտք է կոտորակներն ընդհանուր անուանչի դարձընել (37), եւ համարիչը համարչին վրայ բաժնել. զորօրինակ.

$$\frac{0\cdot65}{0\cdot003} = \frac{0\cdot650}{0\cdot003} = \frac{650}{3} = 216{,}66\ \ldots$$

Հոս 32 համարին մէջ ըսուած կերպը կը գործածուի։

Ընդդիմական քանակութիւններ։

39. Այնպիսի դէպքի մէջ՝ ուր նուազելին հանելիէն պզտիկ ըլլայ, ինչպէս 7—18, իրական հանումը չի կրնար ըլլալ, բայց ասոր համար հաշուի մէջ պէտք չէ շփոթիլ, վասնզի այսպէս ալ կրնանք ընել.

$$7 - 18 = -11$$

որն որ կը ցուցընէ թէ նուազելին հանելիէն մեծ չէր, այլ 11 անկէ պզտիկ էր։

Զորօրինակ ասիկայ.

$$100 + 7 - 18 = 100 - 11 = 89$$

Պէտք է 7 գումարել եւ 18 հանել, ուրեմն պէտք է 11 հանել։

Հոս նուազելոյն 7 եւ հանելւոյն 7 զիրար ջնջեցին. (տես 18)։

40. Ասոր նման դէպքերու մէջ դժուարին չէ մտածելը, որ + նշանով (եւ կամ ամենեւին առանց նշանի) ու — նշանով թուեր քովէ քով եկած եւ փոփոխակի զիրար ջնջած ըլլան։ Առջինը հաստատական ու ետքինն ուրացական թիւ կ՚ըսուի, եւ երկուքին մէկտեղ Ընդդիմական քանակութիւն անուն կը տրուի։

41. Այս եղանակաւ կը ցուցուի որ,

ա. Ուրացական թիւ մը գումարելը՝ հաստատական թիւ մը հանելու հետ նոյն է։

Այս օրինակիս մէջ՝

$$13 - 6 = 7$$

պէտք է 6ը 13էն հանել, եւ ասով 13ը մինչեւ 7 կը պզտիկնայ, բայց կրնայ ալ ըսուիլ որ 6ը 13ին վրայ գալով, զանի մինչեւ 7 կը պզտիկցընէ։

բ. Ուրացական թիւ մը հանելը՝ հաստատական թիւ մը գումարելու հետ նոյն է։

Այս օրինակիս մէջ՝

$$30 - (27-8) = 30 - 19 = 11$$

27—8, կամ 19ը 30էն պիտ'որ հանուի. եթէ 27 հանելու ըլլանք, 8 աւելի հանած կ'ըլլանք, ուստի դարձեալ պէտք էր 8 վրան աւելցնել։ Ուրեմն սապէս ալ կրնանք ընել.

$$30 - (27-8) = 30 - 27 + 8 = 3 + 8 = 11$$

Փոխանակ 27 — 8 հանելու, այնպէս կրնայ մտածուիլ որ թէ 27 եւ թէ — 8 պիտի հանուի, այսինքն 27 պիտի հանուի եւ 8 պիտի աւելնայ։

42. Արդ եթէ փոքր մտադրութիւն մ'ընենք, ընդդիմական քանակութեանց համար հետեւեալ կանոնները կրնանք յառաջ բերել, որոնք առաւելապէս ետեւի եկած հատուածներուն մէջ պիտ'որ գործածուին. (տես 49 ծան. բ.)

Ա. Գումար։

$$1)\ \begin{array}{r} +13 \\ +6 \\ \hline +19 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +13 \\ -6 \\ \hline +7 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} -13 \\ +6 \\ \hline -7 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} -13 \\ -6 \\ \hline -19 \end{array}$$

1. Հասարակ գումարի օրինակ մըն է.

2. Հասարակ հանման օրինակ մըն է.

3. այնպիսի հանման օրինակ մըն է, որուն մէջ 6 նուազելին 13 հանելիէն պզտիկ է (տես 39). (բայց թէ 6ը վերն եղեր է վարն եղեր է հոգ չէ)։

4. Պէտք է թէ 13ն ու թէ 6ը հանել, ուրեմն ընդ ամէնը 19 պէտք է հանել։

Ընդհանուր կանոն. Եթէ նշանները նոյն են՝ պէտք է գումար ընել, իսկ եթէ նշանները նոյն չեն, պէտք է

պզտիկ թիւը մեծ թուէն հանել եւ այլակերպութեան մեծ թուին նշանը տալ։

Բ. Հանում։

Ընդհանուր կանոն. Պէտք է հանելւոյն նշանը հակառակ նշանի փոխել, ու ետքն ըստ կանոնաց գումարի հաշիւը յառաջ տանիլ։ — Վասնզի հաստատական թիւ մը հանելը՝ ուրացական թիւ մը գումարելու, եւ ուրացական թիւ մը գումարելը՝ հաստատական թիւ մը հանելու հետ նոյն է (41. ա եւ բ)։ Օրինակ.

$$\begin{array}{r} +16 \\ +7 \\ - \\ \hline +9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7 \\ +16 \\ - \\ \hline -9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -16 \\ -7 \\ + \\ \hline -9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7 \\ -16 \\ + \\ \hline +9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +16 \\ -7 \\ + \\ \hline +23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -16 \\ +7 \\ - \\ \hline -23 \end{array}$$

Գ. Բազմապատկութիւն։

$$1)\ \begin{array}{r} +6 \\ +5 \\ \hline +30 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} -6 \text{ կամ } +6 \\ +5 \qquad -5 \\ \hline -30 \qquad -30 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} -6 \\ -5 \\ \hline +30 \end{array}$$

1. Հասարակ բազմապատկութեան օրինակ մըն է.

2. 6 թիւը 5 անգամ պիտ'որ հանուի, ուրեմն ընդ ամէնը 30 պիտ'որ հանուի.

3. — 6 թիւը 5 անգամ պիտ'որ հանուի, այսինքն + 6ը 5 անգամ պիտ'որ գումար ըլլայ (41. բ.), ուրեմն 30 պիտ'որ աւելնայ։

Ընդհանուր կանոն. Նման նշանները առաւել (+), իսկ աննմանները նուազ (—) նշան կու տան արդիւնքին մէջ։

Դ. Բաժանում։

Վերը բազմապատկութեան համար տրուած օրինակներէն կը հետեւի որ.

$$\frac{+30}{+5}=+6 \;\Big|\; \frac{-30}{+5}=-6 \;\Big|\; \frac{-30}{-5}=+6 \;\Big|\; \frac{+30}{-5}=-6$$

Ընդհանուր կանոն. Նման նշաններն $+$, իսկ աննմանները $-$ նշան կու տան քանորդին մէջ։

Նշանագրով համարողութիւն։

43. Թիւ մը ցուցընելու համար՝ բայց առանց յայտնելու թէ ինչպիսի թիւ, կրնան կամայական նշաններ գործածուիլ։ Հասարակօրէն նոտր գրերը կը գործածուին։ Ուստի Թուաբանութեան այն մասը՝ որն որ անոր միտ կը դնէ, որ Թուաբանական բացատրութիւններն ընդհանրական օրինակաւ մը աչքի առջեւ բերէ, եւ այսպիսի ընդհանրական բացատրութիւններով ըստ կանոնաց փոփոխութիւններ ընէ, **Նշանագրով համարողութիւն** կամ **Գրահաշիւ** կ'ըսուի։

Այսպէս օրինակի աղագաւ $\text{ա} + \text{բ}$ երկու կամայական թուերու բովանդակութիւնը, $\text{մ} - \text{ն}$ երկու կամայական թուերու այլակերպութիւնը կը ցուցընէ։

44. Այնպիսի հաշիւներն՝ որոնք որոշ արդիւնք մ'ունին, ինչպէս են թուով եղած հաշիւները, նշանագրով չեն կրնար ըլլալ։ Ընդհանրապէս նշանագիրները միայն իրենց պատշաճական նշաններովն իրարու հետ կրնան կապուիլ։ Սակայն մասնաւոր դէպքերու մէջ, մանաւանդ եթէ որ նոյն նշանագիրը հաշուի մէջ շատ անգամ պատահելու ըլլայ, որ պատճառաւ գրերուն քով նաեւ թուեր ալ գրուին, գրերուն քովէ քով

գրուելէն յառաջ եկած գործողութիւնները, առանձին վախճաններու համար զանազան եղանակաւ կրնան փոխուիլ։

Այսպէս $3 \cdot \text{ա}$, կը ցուցընէ որ կամայական թիւ մը երեք անգամ պիտ'որ առնուի, բայց համառօտութեան համար 3ա կը գրուի։

45. Իսկ թէ ուր կամ երբ այսպիսի փոփոխութիւն մը կրնայ ըլլալ, պէտք է ամէն մէկուն մտաց սրութեանը թողուլ։ Միայն սովորական դէպքերու համար կանոններ կը տրուին, որպէսզի կրթութեամբ՝ մտաց սրութեան օգնութիւն մ'ըլլայ։

46. **Գումար։** Եթէ գրերն իրարու աննման են, պէտք է իրենց պատշաճական նշաններովն իրարու քով դնել։ Իսկ եթէ գրերն իրարու նման են, գիրը մէկ անգամ կը գրուի, եւ անոր առջեւը թիւ մը կը գրուի՝ որ կը ցուցընէ թէ քանի անգամ այն գիրը հոն պիտ'որ ըլլար։

Օրինակ.

$$1)\;\begin{array}{r} \text{ա} \\ \text{բ} \\ \hline \text{ա}+\text{բ} \end{array} \qquad 2)\;\begin{array}{r} 2\text{ա} \\ -\text{բ} \\ \hline 2\text{ա}-\text{բ}\ (42.\ \text{Ա.}) \end{array} \qquad 3)\;\begin{array}{r} -\text{ա} \\ +\text{բ} \\ \hline \text{բ}-\text{ա} \end{array}$$

$$4)\;\begin{array}{r} 3\text{ա} \\ 4\text{ա} \\ \hline 7\text{ա} \end{array} \qquad 5)\;\begin{array}{r} 6\text{գ} \\ -6\text{գ} \\ \hline 0\ (42.\ \text{Ա.}) \end{array} \qquad 6)\;\begin{array}{r} -7\text{մ} \\ -3\text{մ} \\ \hline -10\text{մ} \end{array}$$

$$7)\;\begin{array}{r} \text{ա}+4\text{բ}+5\text{գ}-4\text{դ} \\ 2\text{ա}-3\text{բ}+2\text{գ}-3\text{դ} \\ 4\text{ա}-5\text{բ}-8\text{գ}+\text{ե} \\ \hline 7\text{ա}-4\text{բ}-\text{գ}-7\text{դ}+\text{ե} \end{array}$$

47. **Հանում։** Պէտք է հանելիքին նշանը հակառակ նշանի փոխել, եւ ըստ կանոնաց գումարի գործողութիւնը շարունակել. (տես 42 Բ.)։ Նշանները փոխելը միայն մտքով ալ կրնայ ըլլալ։

Օրինակ :

1) $\begin{array}{r} \text{ա} \\ \text{բ} \\ \hline \text{ա}-\text{բ} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \text{ա} \\ -3\text{բ} \\ \hline \text{ա}+3\text{բ} \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 4\text{ա} \\ \text{ա} \\ \hline 3\text{ա} \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 8\text{բ} \\ -3\text{բ} \\ \hline 11\text{բ} \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 3\text{գ} \\ 7 \\ \hline 3\text{գ}-7 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} -10\text{ա} \\ -3\text{ա} \\ \hline -7\text{ա} \end{array}$

7) $\begin{array}{r} 5\text{ա}+4\text{բ}+6\text{գ}-8\text{դ} \\ 4\text{ա}-3\text{բ}-2\text{գ}-9\text{դ}+\text{ե} \\ \hline \text{ա}+7\text{բ}+8\text{գ}+\text{դ}-\text{ե} \end{array}$

48. **Բազմապատկութիւն:**

Ա. **Պարզ քանակութեանց.** Եթէ բանը միայն նշանագիրներուն վրայ է, ան ատեն կրնայ միայն նշանակուիլ որ բազմապատկութիւնը պէտ'որ կատարուի, ինչպէս եթէ աը բին հետ բազմապատկել ուզելու ըլլանք, $\text{ա}\times\text{բ}$ կամ $\text{ա}\cdot\text{բ}$ կ'ըլլայ. բայց աւելի աղէկ եւ դիւրին կ'ըլլայ առանց նշանի իրարու հետ կապել ու աբ գրել:

Օրինակ :

1) $\begin{array}{r} +4\text{ա} \\ +3\text{ա} \\ \hline +12\text{աա} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +3\text{ա} \\ -2\text{բ} \\ \hline -6\text{աբ} \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -5\text{աբ} \\ -3\text{գ} \\ \hline +15\text{աբգ} \end{array}$

Բ. **Յօդուածոյ քանակութեանց՝** որոնք + կամ — նշաններով իրարու հետ կապուած անդամներէ կը բաղկանան:

Պէտք է առնելիներէն մէկուն ամէն մէկ անդամը՝ միւս առնելոյն ամէն անդամներուն հետ կարգաւ բազմապատկել, եւ ետքն ուր որ կարելի է գումար ալ ընել:

Օրինակ :

1) $\begin{array}{r} \text{ա}+\text{բ} \\ \text{ա}+\text{բ} \\ \hline \text{աա}+\text{աբ} \\ +\text{աբ}+\text{բբ} \\ \hline \text{աա}+2\text{աբ}+\text{բբ} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \text{ա}-\text{բ} \\ \text{ա}-\text{բ} \\ \hline \text{աա}-\text{աբ} \\ -\text{աբ}+\text{բբ} \\ \hline \text{աա}-2\text{աբ}+\text{բբ} \end{array}$

3) $\begin{array}{r} \text{ա}+\text{բ} \\ \text{ա}-\text{բ} \\ \hline \text{աա}+\text{աբ} \\ -\text{աբ}-\text{բբ} \\ \hline \text{աա}-\text{բբ} \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 5\text{ա}+4\text{բ} \\ 6\text{ա}-3\text{բ} \\ \hline 30\text{աա}+24\text{աբ} \\ -15\text{աբ}-12\text{բբ} \\ \hline 30\text{աա}+9\text{աբ}-12\text{բբ} \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 3\text{ա}-3 \\ 3\text{ա}+3 \\ \hline 9\text{աա}-9\text{ա} \\ +9\text{ա}-9 \\ \hline 9\text{աա}-9 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \text{աա}+2\text{աբ}+\text{բբ} \\ \text{ա}+\text{բ} \\ \hline \text{աաա}+2\text{ააբ}+\text{աբբ} \\ +\text{ააբ}+2\text{աբբ}+\text{բբբ} \\ \hline \text{աաա}+3\text{ააբ}+3\text{աբբ}+\text{բբբ} \end{array}$

49. **Բաժանում:**

Ա. **Պարզ քանակութեանց.** Եթէ որ բանը միայն գրերուն վրայ է, եւ անոնք իրարու աննման են, կրնայ միայն նշանակուիլ որ բաժանումը պէտ'որ ըլլայ, ինչպէս եթէ աը բին վրայ բաժնել ուզելու ըլլանք, $\text{ա}:\text{բ}$ կամ $\frac{\text{ա}}{\text{բ}}$ կ'ըլլայ: Բայց թէ որ թէ բաժանելոյն եւ թէ բաժանարարին մէջ իրարու նման գրեր կան, անոնք զիրար կ'աւրեն (26):

Օրինակ :

1) $\frac{10\text{ա}}{5\text{բ}}=\frac{2\text{ա}}{\text{բ}}$ 2) $\frac{-3\text{աբ}}{-6\text{աա}}=\frac{\text{բ}}{2\text{ա}}$ 3) $\frac{4\text{ա}}{-12\text{աբ}}=\frac{1}{3\text{բ}}$

4) $\frac{24\text{աբգ}}{6\text{գ}}=4\text{աբ}$ 5) $\frac{-6\text{աբ}}{3}=-2\text{աբ}$ 6) $\frac{8}{12\text{գ}}=\frac{2}{3\text{գ}}$

Բ. Յօրինուածոյ քանակութեանց. Հոս (համարական թուով բաժանման պէս) շատ դէպքերու մէջ, պէտք է յաջորդ կանոններուն միտ դնել:

1. Պէտք է բաժանելոյն առաջին անդամը՝ բաժանարարին առաջին անդամին վրայ բաժնել, որով քանորդին առաջին անդամը կը գտնուի:

2. Աս գտնուած առաջին անդամով՝ բաժանարարին ամէն անդամները բազմապատկել:

3. Ելած արդիւնքը բաժանելիէն հանել:

4. Մնացորդին առաջին անդամը՝ դարձեալ բաժանարարին առաջին անդամին վրայ բաժնել, որով քանորդին երկրորդ անդամը կը գտնուի, եւ այլն:

Օրինակ:

Բաժանարար.	Բաժանելի.	Քանորդ.

1)
$$\begin{array}{l|l|l} \text{ա} + \text{բ} & \text{աա} + 2\text{աբ} + \text{բբ} & \text{ա} + \text{բ} \\ & \text{աա} + \text{աբ} & \\ \hline & ,,\ + \text{աբ} + \text{բբ} & \\ & \quad + \text{աբ} + \text{բբ} & \\ \hline & \quad ,, \quad ,, & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l|l} 5\text{ա} + 4\text{բ} & 30\text{աա} + 9\text{աբ} - 12\text{բբ} & 6\text{ա} - 3\text{բ} \\ & 30\text{աա} + 24\text{աբ} & \\ \hline & ,,\ - 15\text{աբ} - 12\text{բբ} & \\ & \quad - 15\text{աբ} - 12\text{բբ} & \\ \hline & \quad ,, \quad ,, & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l|l|l} \text{ա} + \text{բ} & \text{աա} - \text{բբ} & \text{ա} - \text{բ} \\ & \text{աա} + \text{աբ} & \\ \hline & ,,\ - \text{աբ} - \text{բբ} & \\ & \quad - \text{աբ} - \text{բբ} & \\ \hline & \quad ,, \quad ,, & \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l|l|l} 4\text{ա} - 12\text{բ} & 48\text{աա} - 160\text{աբ} + 20\text{ագ} + 48\text{բբ} - 60\text{բգ} & 12\text{ա} - 4\text{բ} + 5\text{գ} \\ & 48\text{աա} - 144\text{աբ} & \\ \hline & \quad - 16\text{աբ} + 20\text{ագ} + 48\text{բբ} - 60\text{բգ} & \\ & \quad - 16\text{աբ} \qquad\quad + 48\text{բբ} & \\ \hline & \qquad ,, \ + 20\text{ագ} \ ,, \ - 60\text{բգ} & \\ & \qquad ,, \ + 20\text{ագ} \ ,, \ - 60\text{բգ} & \\ \hline & \qquad\quad ,, \qquad\quad ,, & \end{array}$$

Ծանօթութիւն 1. Այսպիսի բաժանման օրինակներու մէջ, կ'ենթադրուի որ բաժանելոյն եւ բաժանարարին անդամներն ըստ կարգի շարուած են: Բայց որովհետեւ մեր դասագրքին մէջ ալ գրով բաժանում պիտի չգործածենք, անոր համար մեր աս ըստ կարի համառօտ դասագրքին մէջ, ասոր վրայ մանրամասն մեկնութիւններ տալն աւելորդ սեպեցինք:

Ծանօթութիւն 2. Արդէն աս բաժանման օրինակներէն կը տեսնուի, թէ ինչպէս օգտակար եղանակաւ ընդդիմական քանակութիւնները հաշուի մէջ կը գործածուին: Բաժանման համար տրուած կանոնին երրորդ պահանջածը, այսինքն թէ ան արդիւնքը՝ որն որ քանորդին առաջին անդամը բաժանարարին հետ բազմապատկելով կ'ելլէ՝ պէտք է բաժանելիէն հանել, առանց ընդդիմական քանակութեանց չէր կրնար համառօտ եղանակաւ ցուցուիլ:

50. Նշանագրով համարողութեան օգտակար գործածութիւններէն մէկն ալ յայնմ կը կայանայ, որ անով թուաբանական կանոններն ու նախադասութիւններն ընդհանրական եղանակաւ յառաջ կու գան եւ կը ցուցուին:

Այսպէս կը գտնենք, օրինակի աղագաւ, $\text{աա} - \text{բբ}$ը եթէ $\text{ա} + \text{բ}$ը՝ $\text{ա} - \text{բ}$ին հետ բազմապատկելու ըլլանք. (48. Բ. 3. օր.) կամ թէ ըսեմ՝

$$(\text{ա} + \text{բ}) \cdot (\text{ա} - \text{բ}) = \text{աա} - \text{բբ}$$

Ասիկայ մեզի աս ընդհանուր նախադասութիւնը կը սորվեցնէ, այսինքն՝ Եթէ երկու կամայական թուերէն ամէն մէկն ինք իրեն հետ բազմապատկուի, եւ արդիւնքներն իրարմէ հանուին, նոյն արդիւնքը կ'ելլէ, որ կ'ելլէր եթէ աս երկու թուերուն գումարը՝ իրենց այլակերպութեան հետ բազմապատկուելու ըլլար:

Օրինակ. $(12 + 9) \cdot (12 - 9) = 21 \cdot 3 = 63 = 12 \cdot 12 - 9 \cdot 9 = 144 - 81$:

Կարողութիւն եւ Արմատ:

51. Շատ նոյն առնելիներու արդիւնքը՝ այն առնելիոյն **Կարողութիւնը** կը կոչուի. ինչպէս աա երկրորդ կարողութիւնն է աին, դարձեալ աաա երրորդ կարողութիւնն է աին, գգգգ չորրորդ կարողութիւնն է գին, նոյնպէս $(\text{ա} + \text{բ}) \cdot (\text{ա} + \text{բ})$ երկրորդ կարողութիւնն է $\text{ա} + \text{բ}$ին, եւ այլն:

52. Սովորաբար առնելին մէկ անգամ կը գրուի, իսկ վերն աջ կողմը թուով մը կը նշանակուի թէ ան առնելին քանի կարողութեան պիտի բարձրանայ. ինչպէս ա^2 փոխանակ աա, ա^3 փոխանակ աաա, գ^4 փոխանակ գգգգ, $(\text{ա} + \text{բ})^2$ փոխանակ $(\text{ա} + \text{բ}) \cdot (\text{ա} + \text{բ})$ եւ այլն. աս թիւը **Ցուցիչ** կարողութեան կ'անուանուի:

Երկրորդ ու երրորդ կարողութիւններն առանձին անուամբ, **Քառակուսի** ու **Խորանարդ** կ'անուանուին:

53. Այն թիւը՝ զորօրինակ աը, որն որ երկրորդ, երրորդ, չորրորդ, եւ այլն կարողութեան բարձրացընելով բ թիւը կու տայ, բ թուոյն երկրորդ, երրորդ, չորրորդ, եւ այլն **Արմատը** կ'անուանուի: Ինչպէս գը՝ երրորդ արմատն է գ^3 քանակութեան, 6ը՝ 36ին երկրորդ արմատն է, նոյնպէս 3ը՝ 81ին չորրորդ արմատն է:

Երկրորդ ու երրորդ արմատներն առանձին անուամբ, **Քառակուսի** ու **Խորանարդ արմատ** կ'անուանուին:

54. Ցուցընելու համար որ թուէ մը արմատ պիտ'որ ելլէ՝ $\sqrt{}$ նշանը կը գործածուի. ինչպէս.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \cdot \sqrt[4]{16} = 2 \cdot \sqrt[2]{9} = 3$$

վերջի օրինակը համառօտութեան համար աւելի աղէկ է առանց թուոյ, $\sqrt{9} = 3$ գրել:

55. Ու որովհետեւ՝

$$\text{ա}^2 \times \text{ա}^3 = \text{աա} \times \text{աաա} = \text{աաաաա} = \text{ա}^5$$

անոր համար ասկէ այս ընդհանուր կանոնը յառաջ կու գայ.

Երբ որ մի եւ նոյն թուոյ կարողութիւններ հարկ ըլլայ իրարու հետ բազմապատկել, պէտք է միայն անոնց ցուցիչները գումարել:

56. Ու դարձեալ՝

$$\frac{\text{ա}^5}{\text{ա}^2} = \frac{\text{աաաաա}}{\text{աա}} = \text{աաա} = \text{ա}^3$$

Ասկէ հետեւեալ ընդհանուր կանոնը յառաջ կու գայ.

Երբ որ մի եւ նոյն թուոյ կարողութիւններ հարկ ըլլայ իրարու վրայ բաժնել, պէտք է միայն անոնց ցուցիչներն իրարմէ հանել:

57. Ու որովհետեւ դարձեալ՝

$$(\text{ա}^3)^2 = \text{ա}^3 \times \text{ա}^3 = \text{աաա} \times \text{աաա} = \text{աաաաաա} = \text{ա}^6$$

Ասկէ այս ընդհանուր կանոնը յառաջ կու գայ.

Երբ որ քանակութեան մը կարողութիւնը հարկ ըլլայ ուրիշ կարողութեան մը բարձրացընել, պէտք է միայն անոնց ցուցիչներն իրարու հետ բազմապատկել:

58. Ուրեմն աս կանոնները (55—57) միայն կարողութիւնները գրելու կամայական եղանակէն յառաջ կու գան: Բայց աս կանոններուն ընդհանուր գործածութիւնը դարձեալ նոր գրութիւններու կը տանի, որոնք եթէ սխալ

մեկնուելու ըլլան (այսինքն եթէ մէկն անոնց մէջ գրութենէ զատ բան փնտռելու ըլլայ) աննշանակ բաներ կ'ըլլան: Աս ետեւի եկածներն ամէնէն հարկաւորներն են:

59. Որովհետեւ՝

$$ա^0 = ա^{մ-մ} = \frac{ա^մ}{ա^մ}\ (56) = 1$$

60. Դարձեալ՝

$$ա^{-մ} = ա^{0-մ} = \frac{ա^0}{ա^մ}\ (56) = \frac{1}{ա^մ}\ (59)$$

61. Ուրեմն դատարկ կամ զրոյ առնելիներու արդիւնք մը, ինչպէս $ա^0$, կամ ուրացական առնելիներու արդիւնք մը, ինչպէս $ա^{-մ}$, կրնայ ըսուիլ (51) որ ամենեւին բան մը չի կրնար նշանակել: Բայց $ա^0$ գրութիւն մըն է՝ 1 նշանակելու համար (որուն նաեւ շատ ուրիշ գրութիւններ ալ կրնան գտնուիլ, զորօրինակ $\frac{ա}{մ} \times \frac{մ}{ա} = 1$), որն որ անկէ յառաջ եկած է՝ որ թուոյ մը կարողութիւնն ինք իր վրայ բաժնուած ու միանգամայն 56 համարին կանոնն ի գործ դրուած է: Այսինքն ամէն քանակութիւն ինք իր վրայ բաժնուած $=$ է 1:

Նմանապէս $ա^{-մ}$ ուրիշ մէկ գրութիւն մըն է նշանակելու համար միութիւն մը, որն որ ա քանակութեան մերորդ կարողութեան վրայ բաժնուած է: Եւ սակայն անկէ յառաջ եկած է՝ որ 56 համարին կանոնն այնպիսի դէպքի մէջ ի գործ դրուած է, ուր բաժանարարին կարողութիւնը բաժանելւոյն կարողութենէն մեծ է: Ինչպէս օրինակի համար $\frac{ա^2}{ա^5} = \frac{աա}{աաաաա} = \frac{1}{աաա} = \frac{1}{ա^3}$ է: Եթէ հոս 56 համարին մէջ եղած կանոնը մերձեցընելու ըլլանք, ան ատեն կը գտնենք որ $\frac{ա^2}{ա^5} = ա^{2-5} = ա^{-3}$: Ուրեմն $ա^{-3}$ ուրիշ բան չէ, բայց եթէ $\frac{1}{ա^3}$ին ուրիշ մէկ գրութեան կերպը:

62. Ասոնք եւ ասոնց նման ուրիշ գրութիւնները, բոլոր ուսողութեան համար շատ հարկաւոր են, եւ եթէ ամենայն մտադրութեամբ գործածուելու ըլլան, սխալմունք անկարելի կ'ըլլայ: Օրինակի աղագաւ՝ 55 ու 56 համարներէն յառաջ կու գայ, որ նման թուերու մէջ՝ կարողութիւնները բազմապատկելը կամ բաժնելը՝ անոնց ցուցիչները գումարելու կամ հանելու հետ նոյն է, եւ ասի գրութեան կողմանէ նոյն իսկ այն դէպքերուն մէջ կրնայ տեղի ունենալ, ուր բաժանարարը բաժանելւոյն հաւասար կամ անկէ մեծ է. սակայն ալ 59 ու 60 համարներէն կը հետեւի: Անոր համար ուրացական ցուցիչ ունեցող կարողութիւնները, պէտք է ըստ ամենայնի ընդդիմական քանակութեանց պէս հաշուել. զորօրինակ.

$$ա^5 \times ա^{-2} = ա^{5-2} = ա^3$$

$$ա^{-5} \times ա^{-2} = ա^{-7}$$

$$ա^{-5} : ա^2 = ա^{-5-2} = ա^{-7}$$

$$ա^{-5} : ա^{-2} = ա^{-5(-2)} = ա^{-5+2} = ա^{-3}$$

$$ա^5 : ա^{-2} = = ա^7$$

$ա^2 : ա^{-5} = ա^7$ եւ այլն:

63. Եւ որովհետեւ՝

$\sqrt[ն]{ա^մ}$ այն թիւն է՝ որ ներորդ կարողութեան բարձրացած $ա^մ$ը կու տայ, ուրեմն

$$(\sqrt[ն]{ա^մ})^ն = ա^մ$$

եւ որովհետեւ դարձեալ նաեւ՝

$$մ = \frac{մ}{ն} \times ն \text{ է } (19.)$$

արդ՝

$$ա^մ = ա^{\frac{մ}{ն} \times ն} = \left(ա^{\frac{մ}{ն}}\right)^ն \ (57)$$

ուրեմն (առած).

$$\left(ա^{\frac{մ}{ն}}\right)^ն = \left(\sqrt[ն]{ա^մ}\right)^ն$$

ըստ հետեւորդի (առած).

$$ա^{\frac{մ}{ն}} = \sqrt[ն]{ա^մ}$$

եւ եթէ $մ = 1$ դնելու ըլլանք.

$$ա^{\frac{1}{ն}} = \sqrt[ն]{ա} \text{ կ'ըլլայ.}$$

այսինքն՝ կոտորակաւոր ցուցիչներն արմատոյ նշաններուն հետ նոյն են։

64. Եւ որովհետեւ՝

$$աաա \times բբբ \times գգգ = աբգ \times աբգ \times աբգ$$

$$\text{կամ. } ա^3 բ^3 գ^3 = (աբգ)^3 \text{ է։}$$

65. Դարձեալ՝

$$\sqrt[ն]{ա} \cdot \sqrt[ն]{բ} = \sqrt[ն]{(աբ)}$$

$$\sqrt[ն]{ա} \cdot \sqrt[ն]{բ} = ա^{\frac{1}{ն}} \cdot բ^{\frac{1}{ն}} \ (63) = (աբ)^{\frac{1}{ն}} \ (64) = \sqrt[ն]{(աբ)} \text{ է։}$$

66. Երկմասնեայ քանակութեանց ընդհանուր բացատրութիւնն $ա + բ$ է։

Իսկ ամէն երկմասնեայ քանակութեանց երկրորդ կարողութեան բացատրութիւնն է.

$$(ա + բ)^2 = ա^2 + 2աբ + բ^2 \ (48 \text{ բ. օր. } 1)$$

խորանարդինն ալ աս է.

$$(ա + բ)^3 = ա^3 + 3ա^2բ + 3աբ^2 + բ^3 \ (48 \text{ բ. օր. } 6)\text{։}$$

Այս ընդհանուր բացատրութիւնները մեզի օժանդակ կ'ըլլան, ամէն թուերէն չորեքկուսի կամ խորանարդ արմատ հանելու, ինչպէս ետեւի օրինակները կը ցուցընեն։

67. Չորեքկուսի արմատ հանելու օրինակներ։

1) 5776 թուէն չորեքկուսի արմատ պիտ'որ հանուի։

57	76		(76
$ա^2 =$ 49			
8	76	$= 2աբ + բ^2$	
(1	4)	$= 2ա$	
$2աբ =$ 8	40	} 876	
$բ^2 =$	36		
"	"		

2) 7661824 թուէն չորեքկուսի արմատ պիտ'որ հանուի։

7	66	18	24	(2768
4				
3	66			
	(4)			
3	29			
	37	18		
	(5	4)		
	32	76		
	4	42	24	
		(55	2)	
	4	42	24	
		"	"	

3) 232 թուէն չորեքկուսի արմատ պիտ՚որ հանուի. (տես 69 ու 70)։

2	32					(15,2315……
1						
1	32					
	(2)					
1	25					
	7	00				
	(3	0)				
	6	04				
		96	00			
		(30	4)			
		91	29			
		4	71	00		
		(3	04	6)1		
		1	66	39	00	
			(30	46	2)	
		1	52	31	25	
			14	07	75	

68. Խորանարդ արմատ հանելու օրինակներ։

1) 658503 թուէն խորանարդ արմատ պիտ՚որ ելլէ։

658	503	(87
$ա^3$ = 512		
146	503 = $3ա^2բ + 3աբ^2 + բ^3$	
(19	2) = $3ա^2$	
$3ա^2բ$ = 134	400	146503
$3աբ^2$ = 11	760	
$բ^3$ =	343	
"	"	

2) 53157376 թուէն խորանարդ արմատ հանել։

53	157	376	(376
27			
26	157		
(2	7)		
18	9		23653
4	41		
	343		
2	504	376	
	(410	7)	
2	464	2	2504376
	39	96	
		216	
	"	"	

3) 7508 թուէն խորանարդ արմատ հանել։

7	508	(19,581			
1					
6	508				
	(3)				
2	7	5859			
2	43				
	729				
	649	000			
	(108	3)			
	541	5	555875		
	14	25			
		125			
	93	125	000		
	(11	407	5)		
	91	260	0	91634912	
		374	40		
			512		
	1	490	088	000	
	(1	150	129	2)	
	1	150	129	2	1150187941
			58	74	
				1	
		339	900	059	

69. Դարձեալ՝

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)^2 = \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} = \frac{ա.ա}{բ.բ} \;(30)\; \frac{ա^2}{բ^2} \text{ է.}$$

Եւ որովհետեւ կոտորակ մը չորեքկուսի կարողութեան բարձրացընելու համար, թէ համարիչն ու թէ անուանիչը չորեքկուսի պէտք է ընել, ուրեմն ասոր ներհակ ալ ամբողջ կոտորակէն չորեքկուսի արմատ հանելու համար, պէտք է թէ համարչէն ու թէ անուանչէն արմատ հանել. զորօրինակ.

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

70. Նոյն որովհետեւ՝

$$232 = \frac{23200000000}{100000000}$$

ուրեմն՝

$$\sqrt{232} = \frac{\sqrt{23200000000}}{\sqrt{100000000}}$$

Արդ՝ ինչպէս 67 համարին երրորդ օրինակէն ալ կը տեսնուի, $\sqrt{23200000000}$ը 152315ին ու 152316ին մէջ կ'իյնայ. եւ որովհետեւ $\sqrt{100000000} = 10000$ է, անոր համար ալ շատ մերձաւոր կ'ըլլայ թէ որ,

$$\sqrt{232} = \frac{152315}{10000} = 15{,}2315 \text{ գտնելու ըլլանք։}$$

Ուրեմն երբ որ ամբողջ թուէ մը առանց մնացորդի չորեքկուսի արմատ չի կրնար ելլել, կրնանք ան թիւն ուզածնուս չափ տասներորդական կոտորակի տեղիքներով հաշուել, վասնզի ամէն զրոներու զոյգը՝ որ թուին վրայ կ'աւելցուի, նոր տասներորդական տեղիք մը կու տայ արմատին մէջ։

71. Ուրեմն նաեւ տասներորդական կոտորակներէն պարզ հաշուով կրնայ արմատ հանուիլ. միայն ասոր մէջ անոր միտ դնելու է՝ որ տասներորդական տեղեաց թիւը զոյգ ըլլայ, վասնզի միայն 100, 10000, 1000000,

եւայլն անուանիչներէն կրնայ արմատ ելլել. իսկ 10, 1000, եւայլն անուանիչներէն արմատ չ'ելլեր:

Օրինակ.

$\sqrt{0,24} = 0,489898\ldots$

$\sqrt{0,3} = \sqrt{0,30} = 0,5477\ldots$

$\sqrt{0,03} = 0,1732\ldots$

$\sqrt{0,000025} = 0,005$

$\sqrt{2,3} = \sqrt{2,30} = 1,5165\ldots$

$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0,66666666\ldots} = 8164\ldots$

72. 69—71 Համարներուն դիտողութիւնները՝ խորանարդ արմատ հանելու ալ կ'արժեն: Միայն հոս միշտ 3 զրոյ աւելցընելու է, երբ որ արմատը ճիշդ առանց մնացորդի չ'ելլեր: Իսկ տասներորդական կոտորակներուն մէջ պէտք է միշտ տասներորդական տեղեաց թիւը 3ի վրայ բաժանական ըլլայ, ինչու որ միայն 1000, 1000 000, 1000 000 000 եւ այլն թուերէն խորանարդ արմատ կրնանք հանել. (տես. 68. օր. 3):

Օրինակ.

$\sqrt[3]{0,638} = 0,8608\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt[3]{0,45} = \sqrt[3]{0,450} = 0,7663\ldots$

$\sqrt[3]{0,7} = \sqrt[3]{0,700} = 0,8879\ldots$

$\sqrt[3]{2/3} = \sqrt[3]{0,666\,666\,666\ldots} = 0,873\ldots$

73. Խորանարդ կամ չորեքկուսի արմատ հանելու ժամանակ՝ եթէ մնացորդ մնալու ըլլայ, եւ խորանարդ կամ չորեքկուսի քանակութիւնն ամբողջ թիւ ըլլայ, ան ատեն գտնուած արմատը բուն արմատէն 1էն նուազ պզտիկ կ'ըլլայ: Եւ կրնայ ցուցուիլ որ աս զօրութիւնը՝ որ 1էն պզտիկ է, կոտորակով մը ճիշդ չի կրնար նշանա-

կուիլ, երբ որ ցուցուելու ըլլայ որ ամբողջ թիւ ու կոտորակ մը մէկտեղ կարողութեան բարձրացած, ամբողջ թիւ մը չեն կրնար տալ:

Գտնենք թէ ան ամբողջ թիւ մ'ըլլայ, եւ $\frac{մ}{ն}$ ալ կոտորակ մը՝ որն որ 1էն պզտիկ ըլլայ, եւ ալ կարելի չըլլայ զանի պզտիկցընել (26). մ ու ն ալ ամբողջ թուեր ըլլան, ան ատեն կ'ըլլայ.

$$\left(ա + \frac{մ}{ն}\right)^2 = ա^2 + 2ա.\frac{մ}{ն} + \frac{մ^2}{ն^2}$$

Արդ որովհետեւ ան ուստի նաեւ $ա^2$ն ամբողջ թիւ մըն է, որպէսզի $ա + \frac{մ}{ն}$ին քառակուսին ամբողջ թիւ ըլլայ, պէտք է որ $\frac{2ամ}{ն} + \frac{մ^2}{ն^2}$ը, ինչպէս նաեւ ասոնց ն պատիկը կամ $2ամ + \frac{մ^2}{ն}$ն ամբողջ թիւ ըլլայ: Եւ որովհետեւ դարձեալ 2ամ միշտ ամբողջ թիւ մըն է, պէտք էր նաեւ որ $\frac{մ^2}{ն}$ ալ ամբողջ թիւ կարենար ըլլալ: Բայց որովհետեւ ըստ մեր ենթադրութեանը մ ու ն չեն կրնար մի եւ նոյն թուոյն վրայ բաժնուիլ (26), ուրեմն եւս առաւել $մ^2$ եւ ն մի եւ նոյն թուոյ վրայ չեն կրնար բաժնուիլ, եւ նն $մ^2$ին մէջ առանց մնացորդի չի կրնար գտնուիլ, ուրեմն նաեւ $\frac{մ^2}{ն}$ չի կրնար ամբողջ թիւ ըլլալ:

Ուրեմն $ա + \frac{մ}{ն}$ին քառակուսին չի կրնար ամբողջ թիւ ըլլալ: Նոյնպէս անկարելի է որ $ա + \frac{մ}{ն}$ին ուրիշ մէկ բարձրագոյն կարողութիւնն ամբողջ թիւ ըլլայ: (Տես 50)

74. Այն արմատներն՝ որոնք թուով կատարեալ չեն կրնար ցուցուիլ, **Առանց հաստատութեան թիւ** կ'ըսուին. (կամ **Անհաշուական թիւ**, վասնզի ասոնց առ 1 ունեցած համեմատութիւնը չի կրնար ցուցուիլ:) Բայց կրնանք ասոնց բուն զօրութեանը տասներորդական կոտորակներու ձեռքով այնչափ մերձենալ, որչափ գործածու-

թեան մէջ կը բազմացուի, ինչպէս 67 ու 68 համարներուն երրորդ օրինակներէն կը տեսնուի։

75. Հաստատական թուէ ելած չորեքկուսի արմատը, թէ հաստատական ու թէ ուրացական կրնայ ըլլալ։ Վասնզի թէ $+ա \cdot +ա$, ու թէ $-ա \cdot -ա$, $+ա^2$ կու տան։

Նոյնը կրնայ ըսուիլ հաստատական թուերուն ամէն զոյգ արմատներուն համար ալ։

Հաստատական թուէ ելած խորանարդ արմատը՝ միայն հաստատական կրնայ ըլլալ, իսկ ուրացական թուէ ելածը՝ միայն ուրացական։ Ինչու որ $+ա \cdot +ա \cdot +ա$, կու տայ $+ա^3$, իսկ $-ա \cdot -ա \cdot -ա$, կու տայ $-ա^3$։ Նոյնը կրնայ ըսուիլ նաեւ ամէն անզոյգ արմատներուն համար, որոնք կամ ուրացական եւ կամ հաստատական թուերէ կը հանուին։

Իսկ ասոր հակառակ ուրացական թուերէ ելած զոյգ արմատները՝ ոչ ուրացական եւ ոչ ալ հաստատական կրնան ըլլալ, վասնզի ոչ $+ա \cdot +ա$, եւ ոչ ալ $-ա \cdot -ա$ ուրացական քառակուսի կու տայ։ Անոր համար ասոնք **Անհնարին** կամ **Ցնորական քանակութիւններ** կ'անուանուին։

Զորօրինակ $\sqrt{-4}$ ցնորական քանակութիւն մըն է, այսինքն այնպիսի քանակութիւն մը՝ որ ամենեւին կերպով մը (եւ ոչ մերձաւորապէս՝ ինչպէս անհաշուական թուերը) չի կրնար նշանակուիլ։

Երկմասնեայ քանակութիւններ։

76. Եթէ $ա + բ$ ու $ա - բ$ կարողութեան բարձրացընելու ըլլանք՝ հետեւեալը կ'ելլէ։

$$
\begin{array}{l}
ա + բ \\
ա + բ \\
\hline
ա^2 + աբ \\
\quad + աբ + բ^2 \\
\hline
ա^2 + 2աբ + բ^2 = (ա + բ)^2 \\
ա + բ \\
\hline
ա^3 + 2ա^2բ + աբ^2 \\
\quad + ա^2բ + 2աբ^2 + բ^3 \\
\hline
ա^3 + 3ա^2բ + 3աբ^2 + բ^3 = (ա + բ)^3 \\
ա + բ \\
\hline
ա^4 + 3ա^3բ + 3ա^2բ^2 + աբ^3 \\
\quad + ա^3բ + 3ա^2բ^2 + 3աբ^3 + բ^4 \\
\hline
ա^4 + 4ա^3բ + 6ա^2բ^2 + 4աբ^3 + բ^4 = (ա + բ)^4 \\
ա + բ \\
\hline
ա^5 + 4ա^4բ + 6ա^3բ^2 + 4ա^2բ^3 + աբ^4 \\
\quad + ա^4բ + 4ա^3բ^2 + 6ա^2բ^3 + 4աբ^4 + բ^5 \\
\hline
ա^5 + 5ա^4բ + 10ա^3բ^2 + 10ա^2բ^3 + 5աբ^4 + բ^5 = (ա + բ)^5 \\
ա + բ \\
\hline
ա^6 + 5ա^5բ + 10ա^4բ^2 + 10ա^3բ^3 + 5ա^2բ^4 + աբ^5 \\
\quad + ա^5բ + 5ա^4բ^2 + 10ա^3բ^3 + 10ա^2բ^4 + 5աբ^5 + բ^6 \\
\hline
ա^6 + 6ա^5բ + 15ա^4բ^2 + 20ա^3բ^3 + 15ա^2բ^4 + 6աբ^5 + բ^6 = (ա + բ)^6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
ա - բ \\
ա - բ \\
\hline
ա^2 - աբ \\
\quad - աբ + բ^2 \\
\hline
ա^2 - 2աբ + բ^2 = (ա - բ)^2 \\
ա - բ \\
\hline
ա^3 - 2ա^2բ + աբ^2 \\
\quad - ա^2բ + 2աբ^2 - բ^3 \\
\hline
ա^3 - 3ա^2բ + 3աբ^2 - բ^3 = (ա - բ)^3 \\
ա - բ \\
\hline
ա^4 - 3ա^3բ + 3ա^2բ^2 - աբ^3 \\
\quad - ա^3բ + 3ա^2բ^2 - 3աբ^3 + բ^4 \\
\hline
ա^4 - 4ա^3բ^3 + 6ա^2բ^2 - 4աբ^3 + բ^4 = (ա - բ)^4 \\
ա - բ \\
\hline
ա^5 - 4ա^4բ + 6ա^3բ^2 - 4ա^2բ^3 + աբ^4 \\
\quad - ա^4բ + 4ա^3բ^2 - 6ա^2բ^3 + 4աբ^4 - բ^5 \\
\hline
ա^5 - 5ա^4բ + 10ա^3բ^2 - 10ա^2բ^3 + 5աբ^4 - բ^5 = (ա - բ)^5 \\
ա - բ \\
\hline
ա^6 - 5ա^5բ + 10ա^4բ^2 - 10ա^3բ^3 + 5ա^2բ^4 - աբ^5 \\
\quad - ա^5բ + 5ա^4բ^2 - 10ա^3բ^3 + 10ա^2բ^4 - 5աբ^5 + բ^6 \\
\hline
ա^6 - 6ա^5բ + 15ա^4բ^2 - 20ա^3բ^3 + 15ա^2բ^4 - 6աբ^5 + բ^6 = (ա - բ)^6
\end{array}
$$

77. ա + բ ու ա — բին կարողութիւնները՝ միայն ասով կը տարբերին իրարմէ, որ վերջինին անդամները զոյգ կարգաւ (այսինքն երկրորդը, չորրորդը, վեցերորդն եւայլն) ուրացական են. վասնզի միշտ — բին անզոյգ կարողութիւններն են:

78. Եթէ նախ միայն ա ու բ գրերուն միտ դնելու ըլլանք, դիւրաւ կրնանք տեսնել ան օրէնքը՝ որով ամէն մէկ կարողութեան անդամները յառաջ կ'երթան: Օրինակի աղագաւ ա + բին հինգերորդ կարողութիւնը՝ աս ետեւի եկած երկու տողին արդիւնքէն կը գտնուի.

$$
\begin{array}{cccccc}
ա^5 & ա^4 & ա^3 & ա^2 & ա^1 & ա^0 \\
բ^0 & բ^1 & բ^2 & բ^3 & բ^4 & բ^5 \\
\hline
ա^5 & ա^4բ & ա^3բ^2 & ա^2բ^3 & աբ^4 & բ^5
\end{array}
$$

ուր ային կարողութեան կարգը միշտ ան կարողութեամբ կը սկսի, որ կարողութեան ա + բ երկանդամեայ քանակութիւնը պիտ' որ բարձրանայ եւ մինչեւ $ա^0 = 1$ կը հասնի: Իսկ ասոր հակառակ բին կարողութիւնները $բ^0 = 1$էն կը սկսի, եւ մինչեւ երկանդամեայ քանակութեան կարողութեանը կը հասնի:

79. Իսկ թէ որ թուերուն կամ գործակիցներուն միտ դնելու ըլլանք, որով ա + բին զանազան կարողութեանց անդամները բազմապատկուած են, դիւրաւ կը գտնենք որ անոնք ան անդամներուն գրերուն տեղափոխութեանց թիւը կը ցուցնեն՝ որոնց սկիզբը կեցած են: Զորօրինակ $ա^5$ կամ ա ա ա ա աը՝ 1ը գործակից ունի, վասնզի ան գրերը մի միայն եղանակաւ կրնան գրուիլ: $5ա^4բ$՝ 5ը գործակից ունի, ինչու որ ա ա ա ա բ գրերը հինգ անգամ կրնան տեղափոխուիլ, ինչպէս ա ա ա ա բ, ա ա ա բ ա, ա ա բ ա ա, ա բ ա ա ա, բ ա ա ա ա եւայլն:

80. Երկու գիր ի հասարակի միայն երկու եղանակաւ կրնան գրուիլ, այսինքն աբ եւ բա: Բայց թէ որ ասոնց մէջ ուրիշ երրորդ գ գիր մ'ալ մտնայ, ան ատեն ան գիրն երկու տեղափոխութեանց մէջ կրնայ առաջին, երկրորդ, երրորդ տեղին ունենալ. ուրեմն ա, բ, գ գրերով 1.2.3 զանազան տեղափոխութիւններ կ'ըլլան, ինչպէս.

գաբ   ագբ   աբգ
գբա   բգա   բագ

Զորս ա, բ, գ, դ գրերուն մէջ դ գիրը կրնայ վերն ըսուած տեղափոխութեանց մէջ առաջին, երկրորդ, երրորդ եւ չորրորդ տեղին ունենալ. ուրեմն $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ տեղափոխութիւնք կ'ըլլան: Նոյնպէս եթէ գրերը հինգ ըլլալու ըլլան, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$ տեղափոխութիւնք կ'ըլլան:

81. Եթէ գրերուն մէջ նոյն գրեր պատահելու ըլլան, ան ատեն տեղափոխութեանց թիւը կը նուազի: Ինչպէս եթէ ա, բ, գ, դ գրերուն տեղ, ա, բ, ա, դ միայն ըլլային, ան ատեն ան ամէն տեղափոխութիւնները՝ որոնց մէջ ան առաջին տեղին ու գը յետին տեղին ունէր, նման կ'ըլլային այն տեղափոխութեանց՝ որոնց մէջ գն առաջին տեղին ու աը յետին տեղին ունի. ուրեմն տեղափոխութեանց թիւը կ'ըլլայ. $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{2}=12$

Եթէ միայն ա, բ, ա, ա գրերն ըլլան, ան ատեն այն ամէն միաւորութիւններն, որոնց մէջ ա, գ, դ գրերը նոյն տեղը միայն փոփոխակի պիտ'որ ունենային, միշտ իրարու նման կ'ըլլան: Ուրեմն տեղափոխութեանց թիւը $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=4$ կ'ըլլայ: Նոյն կերպով կը գտնուի ա, ա, բ, բ գրերուն տեղափոխութիւնն ալ.

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=6$$

82. Եթէ աս բանձնիս մերձեցընենք $ա+բ$ ին հինգերորդ կարողութեանը՝ ան ատեն $ա^5$ ին տեղափոխութեանց թիւը $=1$ կ'ըլլայ, իսկ $ա^4բ$ ին տեղափոխութեանց թիւն է $=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1}=\frac{5}{1}$. ուրեմն երկրորդ գործակիցը $=5$ է. դարձեալ $ա^3բ^2$ ին տեղափո-

խութեանց թիւն է $=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}=10$, որն որ երրորդ անդամին գործակիցն է. Նոյնպէս $ա^2բ^3$ ին տեղափոխութեանց թիւն է $=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$, աս ալ չորրորդ անդամին գործակիցն է. իսկ $աբ^4$ ին տեղափոխութեանց թիւն է.

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=5,$$

որն որ հինգերորդ անդամին գործակիցն է. իսկ $բ^5$ ին տեղափոխութեանց թիւն է.

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=1.$$

Նոյնպէս $ա+բ$ ին վեցերորդ կարողութեան երրորդ անդամը կ'ըլլայ $=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}ա^4բ^2 = 15ա^4բ^2$. $ա+բ$ ին 7 երորդ կարողութեան վեցերորդ անդամը կ'ըլլայ.

$$=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ա^2բ^5=21\,ա^2բ^5.$$

իսկ ր երորդ կարողութեան հինգերորդ անդամը կ'ըլլայ.

$$=\frac{ր\cdot(ր-1)\cdot(ր-2)\cdot(ր-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ա^{ր-4}բ^4$$ եւ այլն:

83. Ուստի ամէն մէկ $ա\pmբ$ երկմասնեայ քանակութեան կարողութիւններուն համար, այս եղանակի ընդհանուր ձեւը կրնանք տալ.

$$(ա\pmբ)^ր = ա^ր \pm ր\cdot ա^{ր-1}բ + \frac{ր\cdot(ր-1)}{1\cdot2}ա^{ր-2}բ^2 \pm \frac{ր\cdot(ր-1)(ր-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot ա^{ր-3}բ^3 + \frac{ր\cdot(ր-1)(ր-2)(ր-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ա^{ր-4}բ^4$$

եւայլն. ուր եթէ րն ամբողջ հաստատական թիւ մըն է, ան ատեն քանի անդամ որ անդամներուն թիւը ր թուէն մէկ աւելի կ'ըլլայ՝ հաշիւը կը վերջանայ:

Երկրաչափական համեմատութիւն:

84. Երբ որ երկու քանորդ կամ կոտորակ իրարու հաւասար են, ինչպէս.

$$\frac{12}{4} = \frac{18}{6} \; (= 3)$$

$$\text{կամ } 12 : 4 = 18 : 6$$

ան ատեն այսպէս ալ կրնայ բացատրուիլ. «12ն այնպէս կը համեմատի 4ին հետ, ինչպէս 18ը 6ին հետ»:

Այս կերպ բացատրութիւնը՝ հասարակ խօսակցութեան ձեւին աւելի համաձայն ըլլալուն, հասարակ կենակցութեան մէջ պատահած խնդիրներուն ալ կը գործածուի: Եւ աս բացատրութեան կերպը մտած է նաեւ երկրաչափութեան մէջ:

85. Ուստի այսպիսի օրինակ մը՝ ինչպէս $12 : 4 = 18 : 6$, ասկէ վերջն **Երկրաչափական համեմատութիւն** կ'անուանենք: Համեմատութիւնը չորս՝ այսինքն **առաջին**, **երկրորդ**, **երրորդ**, **չորրորդ** անդամներէ կը կազմուի: Առաջին ու չորրորդ անդամը՝ համեմատութեան **արտաքին անդամ**, իսկ երկրորդն ու երրորդը՝ **ներքին անդամ** կ'անուանուին:

Այն երկու հաւասար քանորդները կամ կոտորակները, որոնցմէ համեմատութիւնը կը կազմուի, ասկէ ետքը **Կշռութիւն** կ'անուանենք: Այն՝ որն որ ուրիշ տեղ բաժանելի կամ համարիչ կ'ըսուէր, հիմայ **առաջին անդամ** կշռութեան պիտ'որ կոչենք. իսկ ան՝ որն որ բաժանարար կամ անուանիչ էր, հիմայ **յաջորդ անդամ** կշռութեան պիտ'որ անուանենք: Վերջապէս այն թիւը՝ որ կը ցուցնէ թէ յաջորդ անդամն առաջնոյն մէջ քանի անգամ կը գտնուի (վերի օրինակին մէջ 3ն է), **Ցուցիչ կշռութեան** կ'ըսուի:

86. Ուրեմն կշռութիւն, քանորդ եւ կոտորակ որ կ'ըսենք միեւնոյն բանի զանազան անուններ են: Անոր համար ալ ան ամէն փոփոխութիւնները՝ զորոնք կրնանք երկու հաւասար կոտորակներու վրայ ընել, առանց իրենց հաւասարութիւնը խախտելու, կրնանք համեմատութեան երկու կշռութիւններուն վրայ ալ ընել համեմատութիւնը միշտ ուղիղ մնալով: Առհասարակ ինչ որ երկու հաւասար քանակութիւններու համար կրնայ ըսուիլ, նոյնը համեմատութեան կշռութիւններուն համար ալ կ'արժէ:

Որչափ ալ ըստ մասին դիւրին ու չնչին երեւան աս ետեւէ եկած կանոնները, ի վերայ այսր ամենայնի թէ որ մէկն ասոնք աղէկ միտք առած ըլլայ, շատ դիւրութիւն կը գտնայ ասոնք երկրաչափութեան մէջ գործածելու ատեն:

87. Երկու արտաքին անդամներուն արդիւնքը, երկու ներքին անդամներուն արդեանցը հաւասար է:

Ցուցում. Գիտենք թէ

$$\text{ա} : \text{բ} = \text{գ} : \text{դ} \text{ կամ } \frac{\text{ա}}{\text{բ}} = \frac{\text{գ}}{\text{դ}}$$

ուստի (առած).

$$\frac{\text{ա} \cdot \text{դ}}{\text{բ}} = \frac{\text{գ} \cdot \text{դ}}{\text{դ}} \text{ կամ } \frac{\text{ա} \cdot \text{դ}}{\text{բ}} = \text{գ} \quad (19)$$

$$\text{եւ } \frac{\text{ա} \cdot \text{դ} \cdot \text{բ}}{\text{բ}} = \text{գ} \cdot \text{բ} \text{ կամ } \text{ադ} = \text{բգ}$$

88. Համեմատութեան ամէն մէկ անդամը՝ կրնայ մէկալ երեք անդամներուն միջոցաւ գտնուիլ, այսինքն.

Առաջին անդամը հաւասար է՝ երկու ներքին անդամներուն արդեանցը, չորրորդ անդամին վրայ բաժնուած:

Երկրորդ անդամը հաւասար է՝ երկու արտաքին անդամներուն արդեանցը, երրորդ անդամին վրայ բաժնուած:

Երրորդ անդամը հաւասար է՝ երկու արտաքին անդամներուն արդեանցը, երկրորդ անդամին վրայ բաժնուած:

Չորրորդ անդամը հաւասար է՝ երկու ներքին անդամներուն արդեանցը, առաջին անդամին վրայ բաժնուած:

89. Երբ որ երկու արդիւնք իրարու հաւասար ըլլան, ան ատեն անոնց չորս առնելիներն ութը համեմատութիւն կրնան կազմել՝ եթէ արդիւնքներէն մէկուն առնելիներն՝ երբեմն ներքին ու երբեմն արտաքին անդամ դնենք:

Զորօրինակ որովհետեւ $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 = 36$ է. ուրեմն ասոնց չորս թուերը՝ 4ը, 9, 3ն ու 12ն աս ետեւի ութը համեմատութիւնները կը կազմեն:

$$
\begin{aligned}
4 &: 3 = 12 : 9\\
4 &: 12 = 3 : 9\\
9 &: 3 = 12 : 4\\
9 &: 12 = 3 : 4\\
3 &: 4 = 9 : 12\\
3 &: 9 = 4 : 12\\
12 &: 4 = 9 : 3\\
12 &: 9 = 4 : 3
\end{aligned}
$$

90. Ուրեմն կրնանք ամէն մէկ համեմատութեան մէջ՝ անդամները դարձեալ եօթը զանազան եղանակաւ փոխել, այնպէս որ միշտ նորէն ուղիղ համեմատութիւններ յառաջ գան, միայն թէ աղէկ միտ պէտք է դնել որ երկու արտաքին անդամները կամ դարձեալ

արտաքին մնան եւ կամ երկուքն ալ ներքին ըլլան:

91. Համեմատութեան մը առաջին անդամները հաւասար որ ըլլան, յաջորդ անդամներն ալ հաւասար կ'ըլլան: Նոյնպէս եթէ յաջորդ անդամները հաւասար ըլլան, առաջին անդամներն ալ հաւասար կ'ըլլան:

Ծանօթութիւն. Աս նախադասութիւններն այնպէս դիւրին են, որ եթէ թուով օրինակներու դարձընելու ըլլանք, գրեթէ ծիծաղելի բաներ կ'ըլլան: Բայց երկրաչափութեան համար շատ հարկաւոր են:

92. Ինչպէս որ կոտորակի մը թէ համարիչն ու թէ յայտարարը մի եւ նոյն թուով կրնայ բազմապատկուիլ, կամ մի եւ նոյն թուոյ վրայ բաժնուիլ, (26 ու 27.) առանց ատով կոտորակին զօրութիւնը փոխուելու, նոյնպէս կրնայ նաեւ առանց զօրութիւնը փոխուելու մի եւ նոյն կշռութեան թէ առաջին անդամն ու թէ յաջորդ անդամը մի եւ նոյն թուով բազմապատկուիլ կամ մի եւ նոյն թուոյ վրայ բաժնուիլ:

93. Նոյնպէս կրնայ նաեւ առաջին ու երրորդ անդամը, կամ երկրորդ ու չորրորդ անդամը մի եւ նոյն թուոյ վրայ բաժնուիլ կամ մի եւ նոյն թուով բազմապատկուիլ:

94. Համեմատութեան մը երկու կշռութիւններն ալ, կրնան ուրիշ երրորդ կշռութեամբ մը բազմապատկուիլ:

Դիցուք թէ ըլլայ՝

ա : բ = գ : դ

եւ ե : զ ուրիշ երրորդ կշռութիւն մը, ուստի

աե : բզ = գե : դզ կ'ըլլայ:

95. Նոյնպէս կրնայ երկրորդ կշռութիւնն ուրիշ չորրորդ կշռութեամբ մը բազմապատկուիլ, որն որ

երրորդին հաւասար է, եւ որով առաջին կշռութիւնը բազմապատկուած է. կամ ուրիշ կերպ բացատրելով.

96. Երկու համեմատութիւններէ կրնանք ուրիշ երրորդ համեմատութիւն մը կազմել, թէ որ անդամները հաւասար կարգաւ իրարու հետ բազմապատկելու ըլլանք:

Եթէ $\text{ա} : \text{բ} = \text{գ} : \text{դ}$

ու $\text{մ} : \text{ն} = \text{շ} : \text{ո}$ ըլլայ.

ան ատեն նաեւ՝

$\text{ամ} : \text{բն} = \text{գշ} : \text{դո}$ կ'ըլլայ:

Այս եղանակաւ ուզածնուս չափ համեմատութիւններ կրնանք իրարու հետ միացընել:

97. Նոյնպէս կրնանք համեմատութեան մը անդամները, հաւասար կարգաւ ուրիշ համեմատութեան մը անդամներուն վրայ բաժնել:

98. Համեմատութեան մը ամէն մէկ անդամները միանգամայն կրնան չորեքկուսի կամ խորանարդ ըլլալ, եւ կամ ուրիշ կարողութեան մը բարձրացուիլ: Ասի 96 Համարէն կը հետեւի, վասնզի երկրորդ, երրորդ եւ այլն համեմատութիւններն առաջին համեմատութեան հետ նոյն կը սեպուին:

Եւ ընդ հակառակն համեմատութեան ամէն մէկ անդամէն կրնայ նոյն արմատը հանուիլ:

99. Եթէ $\text{ա} : \text{բ} = \text{գ} : \text{դ}$ ըլլայ, ան ատեն նաեւ $\text{ա} + \text{բ} : \text{բ} = \text{գ} + \text{դ} : \text{դ}$ կ'ըլլայ:

Ցուցում. Ըստ մեր ենթադրութեանն է.

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}} = \frac{\text{գ}}{\text{դ}}$$

ուրեմն (առած).

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}} + 1 = \frac{\text{գ}}{\text{դ}} + 1$$

կամ

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}} + \frac{\text{բ}}{\text{բ}} = \frac{\text{գ}}{\text{դ}} + \frac{\text{դ}}{\text{դ}}$$

ուրեմն

$$\frac{\text{ա} + \text{բ}}{\text{բ}} = \frac{\text{գ} + \text{դ}}{\text{դ}}$$

որ է

$$\text{ա} + \text{բ} : \text{բ} = \text{գ} + \text{դ} : \text{դ}$$

100. Եթէ $\text{ա} : \text{բ} = \text{գ} : \text{դ}$ ըլլայ, ան ատեն նաեւ $\text{ա} - \text{բ} : \text{բ} = \text{գ} - \text{դ} : \text{դ}$ կ'ըլլայ:

Ասոր ցուցումն ալ 99 Համարին մէջ ըսուածին պէս կ'ըլլայ:

101. Եթէ երկու համեմատութիւն հաւասար ցուցիչ ունենալու ըլլան, այն ատեն աս երկու համեմատութիւններէն կրնանք ուրիշ երրորդ համեմատութիւն մը կազմել, թէ որ անդամները հաւասար կարգաւ գումար ընելու ըլլանք:

Ցուցում. Այս երկու համեմատութիւնները՝ այս եղանակաւ կրնանք բացատրել.

$$\text{եմ} : \text{մ} = \text{են} : \text{ն}$$
$$\text{եպ} : \text{պ} = \text{եջ} : \text{ջ}$$

Եթէ առանձին անդամները գումար ընելու ըլլանք, կ'ըլլայ.

$$\text{եմ} + \text{եպ} : \text{մ} + \text{պ} = \text{են} + \text{եջ} : \text{ն} + \text{ջ}$$

կամ $\text{ե}(\text{մ} + \text{պ}) : \text{մ} + \text{պ} = \text{ե}(\text{ն} + \text{ջ}) : \text{ն} + \text{ջ}$,

որուն մէջ համեմատութեան ուղիղ ըլլալն անմիջապէս կը տեսնուի:

Նոյնպէս կրնանք երեք, չորս կամ աւելի նոյն ցուցիչ ունեցող համեմատութիւններ գումար ընելով իրարու հետ միացընել:

102. Նոյնպէս ալ նոյն ցուցիչ ունեցող երկու հեմեմատութեանց անդամները, կրնան հաւասար կարգաւ իրարմէ հանուիլ:

103. Եթէ երկու համեմատութեան մէջ հաւասար կարգաւ երեք անդամներն հաւասար ըլլան, ան ատեն չորրորդ անդամներն ալ հաւասար կ'ըլլան:

104. Եթէ երկու համեմատութեան մէջ երկու կշռութիւններն իրարու հաւասար են, միւս երկու կշռութիւններն ալ հաւասար կ'ըլլան, եւ ըստ հետեւորդի մէկ համեմատութիւն կը կազմեն:

---

105. Երկու հաւասար դրամագլուխ՝ որ հաւասար առհարիւրով շահի տրուած են, տարուէ տարի հաւասար ալ շահ կը բերեն: Բայց թէ որ առհարիւրը հաւասար ըլլայ՝ իսկ դրամագլուխն անհաւասար, ան ատեն շահերն իրարու հետ այնպէս կը համեմատին՝ ինչպէս դրամագլուխները: Իսկ եթէ դրամագլուխը հաւասար ըլլայ եւ առհարիւրն անհաւասար, ան ատեն շահերն իրարու հետ այնպէս կը համեմատին ինչպէս առհարիւրները:

Ասկէ կը հետեւի՝ որ երբ որ թէ դրամագլուխն եւ թէ առհարիւրն անհաւասար ըլլան, տարուէ տարի եկած շահերը դրամագլխոյն եւ առհարիւրին արդեանցը պէս իրարու կը համեմատին:

Ցուցում. Դիցուք թէ առաջին դրամագլուխն երկրորդ դրամագլխէն Ր անգամ մեծ ըլլայ, եւ առաջին

դրամագլխին համար տրուած առհարիւրն երկրորդ դրամագլխին համար տրուածէն Ն անգամ մեծ ըլլայ, ուր Ր ու Ն որեւիցէ ամբողջ թիւ կամ կոտորակ մը կրնան ցուցընել, ուստի ըստ մեր առաջին ենթադրութեանը՝ առաջին դրամագլխին շահն երկրորդ դրամագլխին շահէն Ր անգամ աւելի է, եւ ըստ երկրորդ ենթադրութեան Ն անգամ, ուրեմն թէ որ երկու ենթադրութիւններն ալ ի միասին հանդիպելու ըլլան, ան ատեն ՐՆ անգամ աւելի պիտ'որ ըլլայ քան երկրորդին շահը. այսինքն տարեկան շահերն՝ այնպէս իրարու կը համեմատին, ինչպէս ՐՆ : 1:

Արդ եթէ աս անհաւասար դրամագլուխները Գ ու Ֆով նշանակենք, առհարիւրները Հ ու Ճով, եւ տարեկան շահերն ալ Ռ ու ռով, ան ատեն կ'ըլլայ.

$$\text{Ր} = \frac{\text{Գ}}{\text{Ֆ}}, \text{Ն} = \frac{\text{Հ}}{\text{Ճ}}$$

ուրեմն (առած).

$$\text{Ր} . \text{Ն} = \frac{\text{Գ}}{\text{Ֆ}} \times \frac{\text{Հ}}{\text{Ճ}} = \frac{\text{ԳՀ}}{\text{ՖՃ}}$$

կամ

$$\text{ԳՀ} : \text{ՖՃ} = \text{Ր} . \text{Ն} : 1$$

ասկէ կը հետեւի որ,

$$\text{ԳՀ} : \text{ՖՃ} = \text{Ռ} : \text{ռ}$$

Յաւելուած: Եթէ Ռով նշանակուած շահուն տեղ՝ ուրիշ բան մը ենթադրենք, որուն զօրութիւնն երկու Գ ու Հ քանակութիւններէն միանգամայն կախուած ըլլայ, ան ատեն թէ որ,

1. Հ = Ճ. գտնելու ըլլանք՝

Ռ : ռ = Գ: Ֆ կ'ըլլայ.

իսկ եթէ 2. Գ = Ֆ.

Ռ : ռ = Հ : Ճ

եւ ընդհանուր․

$$\text{Շ} : \text{շ} = \text{ՀԳ} : \text{Հգ} \text{ կ'ըլլայ։}$$

106․ Համեմատութիւն մը՝ որուն երկու ներքին անդամներն իրարու հաւասար են, Աղխաղխեալ կամ Անանջատ համեմատութիւն կը կոչուի, ինչպէս․

$$8 : 12 = 12 : 18$$

հոս 12ը, Երկրաչափական համեմատութեան միջին թիւը կ'ըսուի 8ին ու 18ին մէջ։ Երկու թուոց երկրաչափական համեմատութեան միջին թիւը կը գտնուի, թէ որ երկու արտաքին անդամներուն արդիւնքէն չորեքկուսի արմատ հանուելու ըլլայ, որ 87 համարէն կը հետեւի։

Թուաբանական ու Երկրաչափական կարգ։

107․ Թուոց կարգ մը՝ որուն մէջ ամէն մէկ իրարու յաջորդող երկու երկու անդամները մի եւ նոյն տարբերութիւնն (այլակերպութիւնն) ունին, Թուաբանական կարգ կը կոչուի։ Իսկ թուոց կարգ մը՝ որուն մէջ ամէն մէկ իրարու յաջորդող երկու երկու անդամները նոյն քանորդն ունին, Երկրաչափական կարգ կը կոչուի։

Թուաբանական կարգին ընդհանուր բացատրութիւնն այս է․

$$\text{ա} \quad \text{ա}+\text{տ} \quad \text{ա}+2\text{տ} \quad \text{ա}+3\text{տ} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{ա}+(\text{ն}-1)\,\text{տ}$$

իսկ երկրաչափական կարգին այս է․

$\text{ա} \quad \text{աց} \quad \text{աց}^2 \quad \text{աց}^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{աց}\,(\text{ն}-1)$․ ուր ան առաջին անդամն է, իսկ ն անդամներուն թիւը կը ցուցնէ․ տը՝ թուաբանական կարգին մէջ Տարբեր կամ տարբերու-

թիւն, իսկ ցն՝ երկրաչափական կարգին մէջ Ցուցիչ կարգէ կը կոչուի։

108․ Թուաբանական կարգին մէջ առաջին եւ վերջին անդամներուն գումարն է․

$$= \text{ա} + \text{ա} + (\text{ն} - 1)\,\text{տ} = 2\text{ա} + (\text{ն} - 1)\,\text{տ}$$

Աջ կողման երկրորդ անդամին եւ ձախ կողման երկրորդ անդամին գումարն է․

$$= \text{ա} + \text{տ} + \text{ա} + (\text{ն} - 2)\,\text{տ} = 2\text{ա} + (\text{ն} - 1)\,\text{տ}$$

Աջ կողման երրորդ եւ ձախ կողման երրորդ անդամներուն գումարն է․

$$= \text{ա} + 2\text{տ} + \text{ա} + (\text{ն} - 3)\,\text{տ} = 2\text{ա} + (\text{ն} - 1)\,\text{տ}.$$

ուրեմն առհասարակ երկու ծայրերէն հաւասար հեռու եղող ամէն անդամներուն գումարն է $= 2\text{ա} + (\text{ն}-1)\,\text{տ}$. իսկ աս բովանդակութիւններուն թիւն՝ անդամներուն թուոյն կէսն է։ Ուստի եթէ ն անդամ ունեցող թուաբանական կարգի մը գումարը Գ գտնելու ըլլանք, ան ատեն կ'ըլլայ․ $\text{Գ} = \frac{1}{2}\,\text{ն}\,(2\text{ա} + [\text{ն} - 1]\,\text{տ})$

109․ Եթէ վերջին անդամը յ գտնելու ըլլանք, ան ատեն կ'ըլլայ․ $\text{յ} = \text{ա} + (\text{ն} - 1)\,\text{տ}$

110․ Երկրաչափական կարգին մէջ կ'ըլլայ․

$$\text{Գ} = \text{ա} + \text{ցա} + \text{ց}^2\text{ա} + \text{ց}^3\text{ա} \; . \; . \; . + \text{ց}^{\text{ն}-2}\text{ա} + \text{ց}^{\text{ն}-1}\text{ա}$$

ուրեմն նաեւ (առած)․

$$\text{ցԳ} = \text{ցա} + \text{ց}^2\text{ա} + \text{ց}^3\text{ա} + \text{ց}^4\text{ա} \; . \; . \; . + \text{ց}^{\text{ն}-1}\text{ա} + \text{ց}^{\text{ն}}\text{ա}$$

եւ ըստ հետեւորդի

$$\text{ցԳ} - \text{Գ} = \text{ց}^{\text{ն}}\text{ա} - \text{ա}$$

Առաջին բացատրութիւնն ուրիշ բան չի սորվեցըներ, բայց եթէ աս՝ որ երկրաչափական կարգի մը գումարը հաւասար է բոլոր անդամներուն գումարին։ Երկրորդ բացատրութիւնը գտանք հաւասարը հաւասարով (այսինքն հաւասարութեան գծին երկու անդամները ծայրէ ծայր ցով) բազմապատկելով: Իսկ երրորդը գըտնուեցաւ առաջին բացատրութիւնն երկրորդէն հանելով, որովհետեւ եթէ հաւասարը հաւասարէն հանելու ըլլանք դարձեալ հաւասար կը մնայ: Աս հանումն ընելու ատեն առաջին կարգին վերջին Ն — 1 անդամներն, եւ երկրորդ կարգին առաջին Ն — 1 անդամները զիրար ջնջեցին եւ մնաց միայն՝

$$ցԳ — Գ = ց^{ն}ա — ա$$

$$կամ\ (ց − 1)\ Գ = (ց^{ն} − 1)\ ա$$

ուրեմն (առած).

$$Գ = \frac{ց^{ն} — 1}{ց — 1}.\ ա$$

Երկրաչափական կարգին մէջ՝

$$յ = ց^{ն − 1}\ ա\ է:$$

Ղոգարիթմոս կամ Պատշաճաւոր Թիւ:

111. Եթէ երկու կարգ՝ մէկը թուաբանական որ 0էն սկսի, իսկ մէկալն երկրաչափական՝ որ 1էն սկսի, տակէ տակ դնելու ըլլանք, թուաբանական կարգին անդամներն երկրաչափական կարգէն իրենց պատշաճող անդամներուն Ղոգարիթմոսը կ'ըսուին:

Զորօրինակ դիցուք թէ աս կարգերը՝

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . .

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 . . . . .

տակէ տակ դրուած ըլլան. հօս 3ն 8ին ղոգարիթմոսը կը կոչուի, 5ը 32ին եւ այլն, որն որ համառօտութեան համար այս եղանակաւ կը բացատրուի.

3 = Ղոգ. 8 կամ նաեւ 3 = Ղ. 8 եւ այլն:

112. Այսպիսի տակէ տակ շարուած կարգերը, որոնց մէջ թուաբանական կարգին տարբերութիւնն եւ երկրաչափական կարգին ցուցիչն որոշեալ թուեր են, Ղոգարիթմոսի բովանդակած կը կոչուի: Ղոգարիթմոսի բովանդակածին ընդհանուր բացատրութիւնն այս է.

$$0 \quad ա \quad 2ա \quad 3ա \quad 4ա \quad 5ա\ . . .$$

$$1 \quad ց \quad ց^{2} \quad ց^{3} \quad ց^{4} \quad ց^{5}\ . . .$$

ուստի 4ան է = Ղոգ. $ց^{4}$:

113. Եւ որովհետեւ ամէն մէկ ան ու ցն՝ որոնք իրարու կը պատշաճին մի եւ նոյն թիւը կը ցուցընեն, եւ մի եւ նոյն թուոյն կարողութիւնները բազմապատկելու կամ բաժնելու համար, միայն անոնց ցուցիչները պէտք է գումարել կամ հանել. դարձեալ կարողութիւններն ուրիշ բարձրագոյն կարողութեան բարձրացընելու կամ անկէ արմատ հանելու համար, պէտք է միայն ցուցիչը բազմապատկել կամ բաժնել, (55, 56, 57) ասկէ ինք իրեն արդէն կ'իմացուի՝ որ հաշիւները համառօտ կերպով ընելու համար ինչպէս հարկաւոր է ղոգարիթմոսի գործածութիւնը: Վասն զի՝

114. ա. Այսպէս կ'ըլլայ.

$$ց^{2} \cdot ց^{4} = ց^{6}$$

$$եւ\ 2ա + 4ա = 6ա$$

Ուրեմն երբ որ պէտք ըլլայ երկու թիւ բազմապատկել, նախ փնտռելու է ան թուերուն ղոգարիթմոսները. անոնք իրարու հետ գումարելէն ետքը, ան գումարէն ելած ղոգարիթմոսին թիւը պէտք է փնտռել:

115. բ. Դարձեալ՝

$$\frac{ց^{5}}{ց^{3}} = ց^{2}$$

$$եւ\ 5ա — 3ա = 2ա\ է:$$

Ուրեմն եթէ հարկ ըլլայ երկու թիւ իրարու վրայ բաժնել, պէտք է իրենց ղոգարիթմներն իրարմէ հանել. ելած մնացորդը քանորդին ղոգարիթմն է։

116. գ. Դարձեալ՝

$$(\text{յ}^2)^3 = \text{յ}^6$$

$$\text{եւ} \quad 2\text{ա} \times 3 = 6\text{ա}$$

Ուրեմն եթէ ուզենք թիւ մը Ներորդ կարողութեան բարձրացընել, պէտք է միայն անոր ղոգարիթմը Նով բազմապատկել եւ անով ուզուած կարողութեան ղոգարիթմը կը գտնուի։

117. գ. Դարձեալ՝

$$\sqrt[2]{\text{յ}^6} = \text{յ}^{\frac{6}{2}} = \text{յ}^3 \; (63)$$

$$\text{եւ} \quad \frac{6\text{ա}}{2} = 3\text{ա} \text{ է։}$$

Ապա ուրեմն եթէ պէտք ըլլայ թուէ մը Ներորդ արմատ հանել, պէտք է անոր ղոգարիթմը Նի վրայ բաժնել. ելածը փնտռուած արմատին ղոգարիթմն է։

118. Հասարակօրէն գործածուած ղոգարիթմի բովանդակածն՝ աս ետեւի եկած կարգերէն կը կազմուի։

0 1 2 3 4 5 . . . .

1 10 100 1000 10000 100000 . . . . .

Հոս 2էն մինչեւ 9, 11էն մինչեւ 99, 101էն մինչեւ 999 եւայլն թուերուն ղոգարիթմները կը պակսին, բայց ասոնք ալ մեծ աշխատութեամբ անոնց մէջ կրնան խոթուիլ։

119. Թիւ մը ղոգարիթմի բովանդակածին մէջ խոթելու համար, այս ձեւս կրնայ գործածուիլ։

$$\text{Ղոգ.}\,\text{ա} + \text{Ղոգ.}\,\text{բ} = \text{Ղոգ.}\,\text{աբ} \; (113)$$

$$\text{եւ} \quad \frac{\text{Ղոգ.}\,\text{ա} + \text{Ղոգ.}\,\text{բ}}{2} = \text{Ղոգ.}\,\sqrt{(\text{աբ})} \; (117)$$

Օրինակի աղագաւ, եթէ ուզենք 5ը հասարակ գործածուած ղոգարիթմի բովանդակածին մէջ խոթել, գիտենք որ 5ը 1ին ու 10ին մէջ կ'իյնայ, ուստի է՝

$$0 = \text{Ղոգ.}\,1$$

$$1 = \text{Ղոգ.}\,10$$

$$\text{ուրեմն} \quad \frac{0+1}{2} = \text{Ղոգ.}\,\sqrt{(1 \cdot 10)}$$

$$\text{կամ} \quad 0,5 = \text{Ղոգ.}\,3,162277$$

Արդ 5ը 10ին ու 3,162277ին մէջ կ'իյնայ, ուրեմն եթէ դարձեալ հաշուելու ըլլանք.

$$\frac{0,5+1}{2} = \text{Ղոգ.}\,\sqrt{(3,162277 \times 10)}$$

$$\text{կամ} \quad 0,75 = \text{Ղոգ.}\,5,623413 \text{ կ'ըլլայ։}$$

Դարձեալ 5ը 3,162277ին ու 5,623413ին մէջ կ'իյնայ, արդ եթէ հաշիւը շարունակելու ըլլանք կ'ելլէ.

$$\frac{0,5+0,75}{2} = \text{Ղոգ.}\,\sqrt{(3,162277 \times 5,623413)}$$

$$\text{կամ} \quad 0.625 = \text{Ղոգ.}\,4,216964$$

Այս եղանակաւ դարձեալ հաշուելով կ'ելլէ.

$$0,6875 = \text{Ղոգ.}\,4,869674$$

$$0,71875 = \text{Ղոգ.}\,5,232991 \text{ եւայլն։}$$

Եւ որովհետեւ աս հաշիւը միշտ կրնանք յառաջ տանիլ, այսինքն 5էն պզտիկ եղող մերձաւոր թիւը՝ 5էն մեծ եղող մերձաւոր թուոյն հետ բազմապատկել եւ արդիւնքէն չորեքկուսի արմատ հանել, որչափ հաշիւը կը շարունակենք այնչափ 5ընեղ սահմանի մէջ կը մնայ, մինչեւ վերջապէս (շատ երկայն հաշիւներ ընելէն ետքը) 5էն պզտիկ եղող ամենէն մերձաւոր թիւն ինչպէս նաեւ անոնց ղոգարիթմը, շատ քիչ տարբերութիւն կ'ունենան իրարմէ, այնպէս որ երկուքն ալ 5ին տեղ կրնանք դնել եւ անոնց ղոգարիթմն ալ 5ին ղոգարիթմին տեղ կրնանք գրել։

120. Այս եղանակաւ թուերը մէջը խոթելով վերը գրուած երկրաչափական կարգը,

1. 10. 100. 1000, 10000 եւայլն.

Թուաբանական աս կարգին կը դառնայ.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . .

Իսկ այն սկզբնական թուաբանական կարգը, այսինքն՝

0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . .

բոլորովին անծանօթ կ'ըլլայ։ Բայց ասիկայ ղոգարիթմոսը՝ հաշիւներու մէջ գործածելու արգելք չըլլար։

ԱԼԳԵԲՐԱ

1. Հաւասարութիւն։

121. Երկու հաւասար բացատրութեանց մէկտեղ գալն ու գրուիլը Հաւասարութիւն կ'ըսուի։ Ուստի այսպէս համեմատութիւնն ալ, իբրեւ քովէքով գրուած երկու հաւասար քանորդներ, հաւասարութեան կը վերաբերի։

Բայց հոս մասնաւորապէս այնպիսի խնդիրներու վրայ խօսք կ'ըլլայ, ուր աս երկու հաւասար բացատրութիւններէն մէկուն կամ նաեւ երկուքին մէջ այնպիսի քանակութիւններ յառաջ կու գան, որոնց զօրութիւնն անծանօթ է եւ կ'ուզուի որ այն անծանօթ քանակութիւնը գտնուի։

Ծանօթութիւն. Հասարակօրէն այս անծանօթ քանակութիւններն այբուբենին վերջի գրերովը կը նշանակուին։

122. Հաւասարութեան մը մէջէն անծանօթ քանակութիւնը գտնելը, հաւասարութիւնը լուծել կ'ըսուի։ Եւ թուաբանութեան այն մասը՝ որն որ հաւասարութիւնները լուծելու կը զբաղի Ալճեբրա կը կոչուի։

123. Թէ որ հաւասարութեան մը երկու հաւասար մասանցը վրայ՝ հաւասար փոփոխութիւններ ըլլալու ըլլան, դարձեալ ուղիղ հաւասարութիւն մը կ'ելլէ (առած), որն որ առջի հաւասարութենէն միայն ձեւով կը տարբերի։ Բայց անծանօթ քանակութեան զօրութեան կողմանէ առաջին հաւասարութեան հետ բոլորովին նոյն է։

124. Հաւասարութեան մէջ քանի անծանօթ որ գտնուի, անոր համեմատ մէկ անծանօթով, երկու անծանօթով, երեք անծանօթով հաւասարութիւն կ'անուանուի։

125. Առաջին աստիճանի կամ Պարզ կը կոչուին հաւասարութիւնք, որուն մէջ անծանօթ քանակութիւնը միայն առաջին կարողութեամբ կը գտնուի։ Բայց թէ որ անծանօթը բարձրագոյն կարողութեան բարձրացած ըլլայ, ան ատեն հաւասարութիւնն ալ բարձրագոյն աստիճանի կը կոչուի. ուստի երկրորդ աստիճանի, երրորդ աստիճանի եւայլն կ'ըսուի՝ թէ որ անծանօթն երկրորդ, երրորդ եւ այլն կարողութեան բարձրացած ըլլայ։

126. Բայց որովհետեւ (ըստ 123) մի եւ նոյն հաւասարութիւնը զանազան ձեւեր կրնայ ունենալ, այնպէս որ մէկուն մէջ առաջին աստիճանի հաւասարութիւն եղած ատեն, մէկալին մէջ վեցերորդ աստիճանի հաւասարութիւն ըլլայ (ինչպէս $x+5=12$ եւ $x^6+5x^5=12x^5$), անոր համար պէտք է որոշել որ ինչ ձեւի մէջ հաւասարութեան աստիճանը կրնայ որոշուիլ։

127. Հաւասարութիւն մը (ըստ 126 համարին) պատշաճ ձեւի մէջ կ'ըլլայ՝

1. Եթէ անծանօթ քանակութիւնը բաժանարարին մէջ չի գտնուիր.

2. Եւ ոչ փակագծի մէջ.

3. Եւ ոչ արմատի նշանի տակ.

4. Եւ ոչ հաւասարութեան ամէն մէկ անդամին մէջ:

5. Եթէ պարզ հանմամբ կամ գումարով չի ջնջուիր:

128. Հաւասարութիւն մը իր պատշաճ ձեւը խոթելու կանոնն այս է. այնպէս փոփոխութիւններ (123) պէտք է ընել՝ որ իր պատշաճ ձեւին դառնայ, այսինքն՝

1. Եթէ անծանօթ քանակութիւնը բաժանարարին մէջ գտնուելու ըլլայ պէտք է ամբողջ բաժանարարը ջնջել, որ կ'ըլլայ եթէ բոլոր հաւասարութիւնն ան բաժանարարով բազմապատկուելու ըլլայ: (19)

2. Եթէ անծանօթ քանակութիւնը փակագծի մէջ ըլլայ, փակագծի մէջ եղած բացատրութիւնն իբրեւ ամբողջ թիւ սեպելու է, եւ այնպէս մտածելու է որ անոր վրայ թուաբանական գործողութիւն մը պիտ'որ կատարուի: Եւ այս գործողութիւնն իրօք ընելով փակագիծն ալ կը վերնայ:

3. Եթէ անծանօթ քանակութիւնն արմատոյ նշանի տակ ըլլայ, ան ատեն թէ որ հաւասարութեան երկու մասն ալ նոյն կարողութեան բարձրացընելու ըլլանք արմատոյ նշանը կը ջնջուի:

4. Եթէ անծանօթ քանակութիւնը հաւասարութեան ամէն անդամներուն մէջն ալ գտնուելու ըլլայ, ան ատեն հաւասարութեան բոլոր անդամներն՝ ամէնէն փոքր կարողութիւն ունեցող անծանօթին վրայ պէտք է բաժնել:

5. Ան անդամները՝ որ պարզ գումար կամ հանում ընելով զիրար կ'աւրեն, պէտք է ջնջել:

129. 128 համարին մէջ ըսուածը դիւրին է ի գործ դնելը: Միայն արմատոյ նշանը ջնջելը մասնաւոր դէպքի մը համար առանձին մեկնութեան կարօտութիւն ունի: Այսինքն՝ երբ որ հաւասարութեան ան կողմն

ուր անծանօթ քանակութիւնն արմատոյ նշանով կը գտնուի ուրիշ անդամներ ալ ըլլան, ան ատեն միայն կարողութեան բարձրացընելով արմատոյ նշանը չի ջնջուիր: Ինչպէս օրինակի աղագաւ $\text{ա} + \sqrt{\text{ք}} = \text{բ}$ ըլլայ. եթէ ասանք երկրորդ կարողութեան բարձրացընելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\text{ա}^2 + 2\text{ա}\sqrt{\text{ք}} + \text{ք} = \text{բ}^2$$

ուրեմն նաեւ կարողութեան բարձրացընելով արմատոյ նշանը չվերցաւ:

Այսպիսի դէպքի մէջ հաւասարութիւնն այնպէս փոխելու է, որ արմատոյ նշանը հաւասարութեան մէկ կողմն առանձին մնայ: Ուստի վերի օրինակը

$$\text{ա} + \sqrt{\text{ք}} = \text{բ}$$

$$\sqrt{\text{ք}} = \text{բ} - \text{ա} \text{ կ'ըլլայ.}$$

եւ եթէ ասի երկրորդ կարողութեան բարձրացընելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\text{ք} = \text{բ}^2 - 2\text{աբ} + \text{ա}^2$$

2. Առաջին աստիճանի հաւասարութիւնները լուծել:

130. Մէկ անծանօթ քանակութեամբ առաջին աստիճանի հաւասարութիւն մը լուծել:

Հաւասարութեան երկու մասին վրայ ալ հետզհետէ այնպիսի փոփոխութիւններ պէտք է ընել, որ միշտ աւելի պարզ հաւասարութիւններ յառաջ գան, (123) մինչեւ վերջապէս այնպէս ըլլայ՝ որ հաւասարութեան մէկ կողմը միայն անծանօթ քանակութիւնը, իսկ մէկալ կողմն անծանօթին զօրութիւնը մնայ:

Բայց որոշելու համար թէ եղած հաւասարութիւնը նախընթացէն աւելի պարզ է թէ չէ, կամ թէ ինչ փոփոխութիւններ կրնան ըլլալ որ միշտ հետզհետէ աւելի պարզ հաւասարութիւններ յառաջ գան, ուրիշ բան չի կրնար ըսուիլ բայց եթէ ամէն մէկուն մտաց սրութեանը թող տրուիլ:

Օրինակ:

$$1)\quad \frac{3x - 1}{4} = 5$$

Եթէ հաւասարութեան երկու մասն ալ 4ով բազմապատկելու ըլլանք, կ'ըլլայ՝

$$3x - 1 = 20$$

Եւ եթէ հաւասարութեան երկու կողմն ալ 1 աւելցընելու ըլլանք՝

$$3x = 21$$ կ'ըլլայ.

Եթէ երկու կողմն ալ 3ի վրայ բաժնելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$x = 7$$

Փորձ

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$3 \cdot 7 - 1 = 20$$

$$\frac{3 \cdot 7 - 1}{4} = 5$$

$$2)\quad 6(x - 5) + 7 = 25$$

Հաւասարութեան երկու մասերէն ալ 7 հանելով կ'ըլլայ՝

$$6(x - 5) = 18$$

Եւ եթէ երկու մասն ալ 6ի վրայ բաժնելու ըլլանք կ'ըլլայ՝

$$x - 5 = 3$$

Եթէ երկու մասերուն վրայ 5 աւելցընելու ըլլանք՝

$$x = 8$$ կ'ըլլայ:

$$3)\quad 60 - 3x = 4(17 - x)$$

Եթէ փակագիծը ջնջելու ըլլանք՝

$$60 - 3x = 68 - 4x$$ կ'ըլլայ.

Եւ եթէ երկու կողմն ալ $4x$ աւելցընելու ըլլանք՝

$$60 + x = 68$$ կ'ըլլայ.

Եւ եթէ երկու կողմանէ ալ 60 հանելու ըլլանք կը մնայ.

$$x = 8$$

$$4)\quad \frac{x - 19}{6} - 2 = \frac{x + 5}{12}$$

պէտք է հաւասարութեան երկու կողմն ալ 12ով բազմապատկել, եւ ան ատեն կ'ըլլայ.

$$2x - 38 - 24 = x + 5$$ կամ

$$2x - 62 = x + 5$$

երկու կողմանէ ալ x հանուելու ըլլայ՝

$$x - 62 = 5$$ կ'ըլլայ.

երկու կողմն ալ 62 աւելցընելով՝

$$x = 67$$ կ'ըլլայ:

$$5)\quad \frac{4}{5}\left[\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40\right] - 12 = 100$$

$$\frac{4}{5}\left[\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40\right] = 112$$

$$\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40 = 140$$

$$\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) = 180$$

$$\frac{2}{3}x - 60 = 210$$

$$\frac{2}{3}x = 270$$

$$x = 405$$

6) $(խ + 3)^2 = խ^2 + 525$

$$\begin{array}{r} խ + 3 \\ խ + 3 \\ \hline խ^2 + 3խ \\ + 3խ + 9 \\ \hline խ^2 + 6խ + 9 = խ^2 + 525 \end{array}$$

$$6խ + 9 = 525$$

$$6խ = 516$$

$$խ = 86:$$

7) $$ե\left(\frac{ախ - բ}{գ} - դխ\right) = խ$$

պէտք է փակագիծը ջնջել եւ ան ատեն՝

$$\frac{աեխ - եբ}{գ} - դեխ = խ \text{ կ'ըլլայ.}$$

եթէ երկու կողմն ալ գով բազմապատկելու ըլլանք՝

$$աեխ - եբ - գդեխ = գխ \text{ կ'ըլլայ.}$$

եթէ երկու կողման վրայ ալ բե — գխ աւելցընելու ըլլանք՝

$$աեխ - գդեխ - գխ = բե \text{ կ'ըլլայ.}$$

կամ

$$(աե - գդե - գ)\,խ = բե$$

թէ որ երկու կողմն ալ աե — գդե — գ քանակութեան վրայ բաժնելու ըլլանք՝

$$խ = \frac{բե}{աե - գդե - գ} \text{ կ'ըլլայ:}$$

Թուով օրինակ:

Դիցուք թէ $ա = 12$, $բ = 87$, $գ = 6$, $դ = 1/2$, $ե = 20$ ըլլայ, ան ատեն կ'ըլլայ.

$$խ = \frac{87 \cdot 20}{12 \cdot 20 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 - 6} = \frac{1740}{240 - 60 - 6}$$

$$= \frac{1740}{174} = 10$$

131. Երկու անծանօթով հաւասարութիւն մը, անծանօթներուն համար շատ զօրութիւններ կրնայ տալ: Ինչպէս թէ որ ըլլայ՝

$$7խ = 3 + յ$$

ան ատեն՝ $$խ = \frac{3 + յ}{7} \text{ կ'ըլլայ.}$$

Ուստի ինչ որ յին զօրութիւնը գնելու ըլլանք, ըստ այնմ խին զօրութիւնն ալ կը փոխուի.

Եթէ $յ = 1$ գնելու ըլլանք, $խ = \frac{4}{7}$ կ'ըլլայ.

իսկ թէ որ $յ = 2$ գնելու ըլլանք, $խ = \frac{5}{7}$ կ'ըլլայ:

Դարձեալ վերի հաւասարութենէն կ'ելլէ.

$$յ = 7խ - 3$$

թէ որ $խ = 1$ գնելու ըլլանք, $յ = 4$ կ'ըլլայ. իսկ եթէ $խ = 2$ գնելու ըլլանք, $յ = 11$ կ'ըլլայ:

132. Բայց թէ որ այս երկու անծանօթ քանակութիւններուն մէջ ուրիշ հաւասարութիւն մ'ալ մտանելու ըլլայ, եւ այնպէս ենթադրուի որ երկու հաւասարութեանց մէջն ալ աս անծանօթները նոյն զօրութիւնն ունին, այն ատեն թէպէտ եւ ասոնց զօրութիւնը դեռ ծանօթ չ'ըլլար, բայց ասով երկու անծանօթ անդամներն որոշուած կ'ըլլան: Ինչպէս դիցուք թէ վերը դրուած հաւասարութենէն զատ, նաեւ աս հաւասարութիւնն ալ ըլլայ.

$$2խ = յ - 37$$

ուրեմն՝ $$խ = \frac{յ - 37}{2}$$

եւ որովհետեւ երկու հաւասարութեան մէջ եղած խին զօրութիւններն իրարու հաւասար են, ուստի

$$\frac{յ + 3}{7} = \frac{յ - 37}{2}$$

ուրեմն՝

$$2\text{յ} + 6 = 7\text{յ} - 259$$
$$265 = 5\text{յ}$$
$$53 = \text{յ}$$

արդ՝

$$\text{ք} = \frac{3 + \text{յ}}{7} = \frac{3 + 53}{7} = \frac{56}{7} = 8 \text{ կ'ըլլայ։}$$

Ծանօթութիւն. Երկրորդ հաւասարութիւնը պէտք չէ որ 123 համարին մէջ ըսուած փոփոխութեան ձեռքով, առաջին հաւասարութեան դառնայ. վասնզի չի կրնար ըլլալ, որ օրինակի աղագաւ, $14\text{ք} = 6 + 2\text{յ}$ հաւասարութիւնը՝ $7\text{ք} = 3 + \text{յ}$ հաւասարութենէն տարբեր կարենանք մտածել։

133. Ընդհանրապէս երբ որ իրարու վերաբերած հաւասարութիւններէն աւելի անծանօթ քանակութիւններ ըլլալու ըլլան, ան ատեն անոնց զօրութիւնն ալ անորոշ կ'ըլլայ։ Զօրութիւնն որոշ ըլլալու համար այնչափ հաւասարութիւններ հարկաւոր են, որչափ խնդրոյն մէջ անծանօթ քանակութիւններ կան։

134. Մեր ըսածներէն կը հետեւի շատ անծանօթներով առաջին աստիճանի հաւասարութեանց լուծելուն կերպը։ Այսինքն միայն անոր միտ պէտք է դնել, որ անծանօթ քանակութիւններն ետեւէ ետեւ ջնջուին, այնպէս որ հուսկ վերջը մէկ անծանօթով հաւասարութիւն մը մնայ, որ ըստ 130 համարին կը լուծուի։

Եթէ անծանօթներէն մէկուն զօրութիւնը գտնուելու ըլլայ, պատշաճական փոխանակութիւններով մեկալներուն զօրութիւնն ալ կը գտնուի։

Օրինակ:

1) $$3\text{ք} + 4\text{յ} = 183 \text{ եւ } 4\text{ք} + 3\text{յ} = 167$$
$$3\text{ք} = 183 - 4\text{յ} \qquad 4\text{ք} = 167 - 3\text{յ}$$
$$\text{ք} = \frac{183 - 4\text{յ}}{3} \qquad \text{ք} = \frac{167 - 3\text{յ}}{4}$$

Պէտք է ք-ին երկու զօրութիւններն իրարու հաւասար դնել, որով կ'ըլլայ.

$$\frac{183 - 4\text{յ}}{3} = \frac{167 - 3\text{յ}}{4}$$

եթէ երկու կողմն ալ 3.4 ով բազմապատկելու ըլլանք՝

$$732 - 16\text{յ} = 501 - 9\text{յ} \text{ կ'ըլլայ.}$$

եւ դարձեալ՝

$$231 = 7\text{յ}$$
$$33 = \text{յ}$$

ուստի

$$\text{ք} = \frac{167 - 3\text{յ}}{4} = \frac{167 - 99}{4} = \frac{68}{4} = 17$$

Փորձ. $3.17 + 4.33 = 51 + 132 = 183$

եւ $4.17 + 3.33 = 68 + 99 = 167$

2) $$\text{ք} + \text{յ} = \text{ա} \text{ եւ } \text{ք} - \text{յ} = \text{բ}$$

Պէտք է երկու հաւասարութիւններն իրարու հետ գումար ընել, ինչու որ եթէ հաւասարը հաւասարին վրայ աւելցնելու ըլլանք՝ դարձեալ ելածը հաւասար կ'ըլլայ, այսպէս յ ջնջուելով հետեւեալը կ'ելլէ.

$$\text{ք} + \text{յ} = \text{ա}$$
$$\text{ք} - \text{յ} = \text{բ}$$
$$2\text{ք} = \text{ա} + \text{բ}$$

ուրեմն

$$\text{ք} = \frac{\text{ա} + \text{բ}}{2}$$

Նոյնպէս եթէ երկու հաւասարութիւններն իրարմէ հանուելու ըլլան, ք կը ջնջուի եւ կ'ըլլայ.

$$\begin{array}{r} ք + յ = ա \\ \underline{-ք \mp յ = -բ} \\ 2յ = ա - բ \end{array}$$

ուստի

3) $$յ = \frac{ա - բ}{2}$$

$$ա)\ \frac{1}{ք} + \frac{1}{յ} = \frac{1}{70}:\ բ)\ \frac{1}{ք} + \frac{1}{զ} = \frac{1}{84}:\ գ)\ \frac{1}{յ} + \frac{1}{զ} = \frac{1}{140}$$

Պէտք է բ. հաւասարութիւնն ա. հաւասարութենէն հանել, որով կ'ըլլայ՝

$$\frac{1}{յ} - \frac{1}{զ} = \frac{1}{70} - \frac{1}{84}$$

կամ

$$դ)\ \frac{1}{յ} - \frac{1}{զ} = \frac{1}{420}$$

Եթէ ասոր վրայ ալ գ. հաւասարութիւնն աւելցընենք, կ'ելլէ՝

$$\frac{2}{յ} = \frac{1}{140} + \frac{1}{420}$$

կամ

$$ե)\ \frac{2}{յ} = \frac{4}{420} = \frac{2}{210}$$

ըստ հետեւորդի՝

$$յ = 210$$

Եւ որովհետեւ ա. հաւասարութենէն այսպէս կը գտնենք.

$$\frac{1}{ք} = \frac{1}{70} - \frac{1}{յ} = \frac{1}{70} - \frac{1}{210} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$$

ուրեմն՝

$$ք = 105$$

Դարձեալ դ. հաւասարութեան մէջէն այսպէս կը գտնենք.

$$\frac{1}{զ} = \frac{1}{յ} - \frac{1}{420} = \frac{1}{210} - \frac{1}{420} = \frac{1}{420}$$

ուստի

$$զ = 420$$

3. Երկրորդ աստիճանի կամ չորեքկուսի հաւասարութիւնները լուծելու կերպը:

135. Բարձրագոյն աստիճանի հաւասարութիւն մը (125) **Անխառն** կը կոչուի, թէ որ իրեն մէջ անծանօթ քանակութեան միայն բարձրագոյն կարողութիւնն ունենայ. իսկ եթէ բարձրագոյն կարողութիւն ունեցող անծանօթին քով՝ խոնարհագոյն կարողութիւններ ալ գտնուին, ան ատեն **Խառն** կը կոչուի։

Ծանուցեալ քանակութիւնները՝ որ անծանօթին հետ բազմապատկուած են, անծանօթ քանակութեան **Գործակիցները** կ'ըսուին։

136. Անխառն երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մը լուծելու համար, պէտք է զանիկայ իբրեւ առաջին աստիճանի հաւասարութիւն սեպել, եւ 130 համարին կանոնին համաձայն չորեքկուսի անծանօթին զօրութիւնը փնտռել։ Աս ընելէն ետքը քառակուսի արմատ հանելու է։

Օրինակ:

$$\frac{ք^2}{4} = 20 - \frac{100 - ք^2}{9}$$
$$9ք^2 = 720 - 400 + 4ք^2$$
$$5ք^2 = 320$$
$$ք^2 = 64$$
$$ք = 8$$

Ծանօթութիւն. Այս կերպով նաեւ ամէն բարձրագոյն կարողութեամբ անխառն հաւասարութիւն կրնայ լուծուիլ: Պէտք է ք^nին զօրութիւնը փնտռել, ու ետքը ներորդ արմատ հանել:

137. Խառն քառակուսի հաւասարութիւն մը լուծելու համար՝

ա. Պէտք է չորեքկուսի հաւասարութեան այս կերպարանքը տալ.

$$\text{ք}^2 \pm \text{փ}\text{ք} = \pm \text{ղ}$$

բ. Պէտք է միտքը բերել որ՝

$(\text{ա} \pm \text{բ})^2 = \text{ա}^2 \pm 2\text{ա}\text{բ} + \text{բ}^2$ է (48. բ. օրին. 1 եւ 2):

Ուստի եթէ դնելու ըլլանք՝

$$\text{ք}^2 = \text{ա}^2$$

եւ $$\text{փ}\text{ք} = 2\text{ա}\text{բ}$$

ան ատեն $$\text{փ} = 2\text{բ}$$

ուրեմն $$\text{բ} = \frac{1}{2}\text{փ}$$

եւ $$\text{բ}^2 = \frac{1}{4}\text{փ}^2$$

գ. Պէտք է հաւասարութեան երկու մասին վրայ ալ $\frac{1}{4}\text{փ}^2$ աւելցընել, այսինքն քին կէս գործակցին քառակուսին, եւ այսպէս հաւասարութեան ձախ կողմը $\text{ք} \pm \frac{1}{2}\text{փ}$ ին ամբողջ քառակուսին կը գտնուի:

$$\text{ք}^2 \pm \text{փ}\text{ք} + \frac{1}{4}\text{փ}^2 = \frac{1}{4}\text{փ}^2 \pm \text{ղ}$$

դ. Եթէ երկու մասէն ալ չորեքկուսի արմատ հանելու ըլլանք կ՚ըլլայ.

$$\text{ք} \pm \frac{1}{2}\text{փ} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{փ}^2 \pm \text{ղ}\right)}$$

որուն մէջ $\sqrt{(\frac{1}{4}\text{փ}^2 \pm \text{ղ})}$ կրնայ թէ հաստատական ըլլալ եւ թէ ուրացական (ըստ 75):

ե. Ի վախճանի կ՚ըլլայ՝

$$\text{ք} = \pm \frac{1}{2}\text{փ} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\text{փ}^2 \pm \text{ղ})}$$

Օրինակ:

1. Դիցուք թէ ըլլայ՝

$$\text{ք}^2 + 3\text{ք} = 88$$

ուրեմն $\text{փ} = 3$, $\text{ղ} = 88$, ուստի եւ

$$\text{ք} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 88)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{19}{2} = \begin{cases} -11 \\ +8 \end{cases}$$

2. Դարձեալ ըլլայ՝

$$\frac{4680}{\text{ք}} + 195 = \frac{4680}{\text{ք}-2}$$

ուստի՝

$$4680\text{ք} - 9360 + 195\text{ք}^2 - 390\text{ք} = 4680\text{ք}$$
$$195\text{ք}^2 - 390\text{ք} = 9360$$
$$\text{ք}^2 - 2\text{ք} = 48$$

ուրեմն $\text{փ} = 2$, $\text{ղ} = 48$

եւ $$\text{ք} = 1 \pm \sqrt{(1 + 48)} = 1 \pm 7 = \begin{cases} +8 \\ -6 \end{cases}$$

3. Դարձեալ ըլլայ՝

$$\text{ք} + \text{յ} = 29, \text{ եւ } \text{ք}^2 + \text{յ}^2 = 425$$

ուրեմն՝

$$\text{ք} = 29 - \text{յ}, \text{ եւ } \text{ք}^2 = 425 - \text{յ}^2$$
$$\text{ք}^2 = 841 - 58\text{յ} + \text{յ}^2$$

ուստի՝

$$841 - 58\text{յ} + \text{յ}^2 = 425 - \text{յ}^2$$
$$2\text{յ}^2 - 58\text{յ} = -416$$
$$\text{յ}^2 - 29\text{յ} = -208$$

ուրեմն $\text{փ} = 29$, $\text{ղ} = 208$

եւ $$\text{յ} = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{841}{4} - 208\right)} = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$= \frac{29}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} +16 \\ +13 \end{cases}$$

ուստի՝

$$ք = 29 - յ = \left\{\begin{matrix} +13 \\ +16 \end{matrix}\right. \text{ կ՚ըլլայ։}$$

4. Դարձեալ ըլլայ՝

$$ք^2 - 4ք = 6$$

ուրեմն $փ = 4$, $ղ = 6$

$$\text{եւ } ք = 2 \pm \sqrt{(4 + 6)} = 2 \pm \sqrt{10}$$

$$2 = \pm 3,1622 \ldots = \left\{\begin{matrix} +5,1622 \ldots \\ -1,1622 \ldots \end{matrix}\right.$$

5. Դարձեալ ըլլայ՝

$$ք^2 - 2ք = -10$$

ուրեմն $փ = 2$, $ղ = 10$

$$\text{եւ } ք = 1 \pm \sqrt{(1 - 10)} = 1 \pm \sqrt{-9}$$

Ուրեմն չորեքկուսի հաւասարութեան մէջ՝ անծանօթ քանակութիւնը միշտ երկու զօրութիւն ունի, որոնց երկուքն ալ հաւասարութիւնը կը լրացընեն. բայց 5երորդ օրինակին մէջ այս երկու զօրութիւններն անկարելի քանակութիւններ են (75)։

Ծանօթութիւն. Ալգեբրան ուսողութեան զանազան մասանցը մէջ (Համարողութեան, Երկրաչափութեան, Մեքենականութեան մէջ եւ այլն) շատ կը գործածուի։ Բայց ամէն դէպքի մէջ այն զանազան խնդիրները՝ որոնք Ալգեբրայով կը լուծուին, պէտք է զանազանել ան հաւասարութիւններէն, որ խնդիրները լուծելու համար կը գործածուին։

Խնդիրները լուծելու համար մեր ձեռքն է աս Ալգեբրային դիւրին եղանակը գործածելը կամ չգործածելը. նոյնպէս մեր ձեռքն է Ալգեբրան գործածելու ատեն քանի անծանօթ քանակութիւն գործածելը։ Հաւասարութիւններուն ծագման կերպն Ալգեբրային չ՚ելնար, վասն զի Ալգեբրային միտ դնելու բանը միայն առջեւը դրուած հաւասարութիւնը լուծելն է։

Երբ որ խնդիր մը լուծելու համար Ալգեբրա ուզենք գործածել, հարկ է միանգամայն խնդրոյն լեզուն Ալգեբրայի լեզուին դարձընել։ Մէյ մ՚որ խնդրոյն մէջի պարունակուածը պատշաճական հաւասարութիւններով բացատրուելու ըլլայ, Ալգեբրան հաւասարութիւնները կը լուծէ առանց միտ դնելու խնդրոյն առարկային։ Բայց հաւասարութիւններէն անծանօթին զօրութիւնը գտնուելէն ետքը, Ալգեբրային լեզուն խնդրոյն լեզուին պէտք է դարձընել։

Պատշաճական հաւասարութիւններ գտնելու համար, ընդհանուր կանոն մը չի կրնար տրուիլ։ Ամէն մէկ խնդիրը զատ զատ խորհրդածութիւններ կը պահանջէ. ասկէ զատ թէ որ խնդիրն երկրաչափութենէն կամ գործնական ուսողութենէն է, անոնց հարկաւոր նախընթաց տեղեկութիւններն ալ պէտք է գիտնալ։ Ընդհանրապէս աս կրնայ ըսուիլ, որ հաւասարութիւն մը գտնելու համար, մի եւ նոյն բանի երկու թուաբանական բացատրութիւն պէտք է փնտռել՝ որոնք խնդրոյն մտացը համաձայն ըլլան, եւ այս երկու բացատրութիւններն իրարու հաւասար դնել։

Բ. ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Ա. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Երկրաչափութիւնը սովորութիւն է երկու մաս բաժնել, ըստ որում քննութիւնները կամ մէկ հարթ երեսի դրիցը վրայ միայն եւ կամ շատ հարթ երեսներուն վրայ կ'ըլլան: Առաջինը **Հարթաչափութիւն**, իսկ երկրորդը **Հաստատաչափութիւն** կը կոչուի:

1. ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

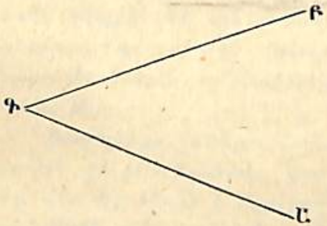
Ուղիղ գիծ, անկիւն եւ հաւասար հեռաւոր (զուգահեռական) գիծ:

1. Գիծ մը՝ որ ամէն կողմ նոյն ուղղութիւնն ունի, **Ուղիղ գիծ** կը կոչուի:

2. Երկու ուղիղ գծեր՝ որ նոյն ուղղութիւնն ունին, **Հաւասար հեռաւոր** կամ **Զուգահեռական** կը կոչուին:

3. Երկու ուղիղ գծերուն նոյն կէտէ սկսեալ զանազան ուղղութեամբ իրարմէ հեռանալը՝ **Անկիւն** կը կոչուի, ինչպէս է ԲԳԱ (Ձեւ 1): ԱԳ ու ԲԳ **Սրունք** կը կոչուին: Իսկ Գն՝ անկեան **Գագաթը** կ'անուանուի:

Ձեւ 1.



4. Ուրեմն որչափ սրունքներն իրարմէ բաց ըլլան, անկիւնն այնչափ մեծ կ'ըլլայ. բայց սրունքներուն երկայնութիւնը բան մը չ'ըներ:

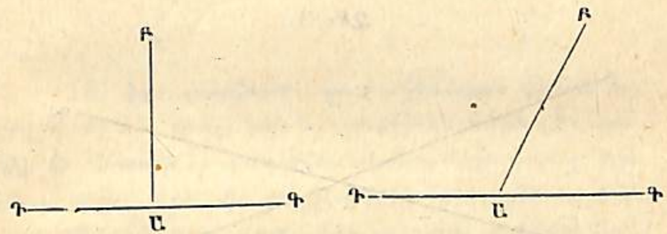
5. Ընկեանց սրունքներուն համար կ'ըսուի, որ՝ դէպ ի գագաթը կը **հակին**, իսկ գագաթան կէտէն կը **խոտորին** կամ կը **հեռանան**:

Ուրեմն անկիւն մը այնչափ մեծ կ'ըլլայ, որչափ սրունքներուն իրարու ունեցած հակումը քիչ է:

6. Երկու անկիւններ՝ որոնք նոյն հասարակաց սրունքն ունին, եւ որոնց միւս երկու սրունքներն ուղիղ գծի վրայ կը կենան, **Առընթերակաց անկիւններ** կը կոչուին: Ասանկ (Ձեւ 2) ԲԱԴ անկիւնը՝ ԲԱԳ անկեան առընթերակաց անկիւնն է, նոյնպէս ԲԱԳ անկիւնը՝ ԲԱԴ անկեան:

Ձեւ 2.

ա. բ.



7. Եթէ երկու առընթերակաց անկիւններ իրարու հաւասար ըլլան, **Ուղիղ անկիւն** կը կոչուին (Ձեւ 2, ա): Ուղիղ անկեան մը սրունքներուն համար կ'ըսուի, որ իրարու վրայ **ուղղորդ** կամ **ուղղահայեաց** կը կենան:

8. Եթէ երկու առընթերակաց անկիւններ իրարու անհաւասար ըլլան, **Ծուռ անկիւն** կը կոչուին. մեծը՝ ինչպէս ԲԱԴ **Բութ անկիւն**, իսկ պզտիկը՝ ինչպէս ԲԱԳ (Ձեւ 2. բ) **Սուր անկիւն** կ'անուանուի:

9. Եօթներորդ համարէն կը հետեւի որ՝

ա. Ամէն ուղիղ անկիւններն իրարու հաւասար են:

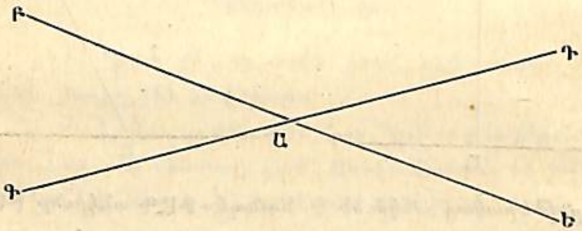
10. բ. Երկու առընթերակաց անկիւններուն գումարը = է 2 ուղիղ անկեանց։

11. գ. Նոյնպէս ամէն իրարու քով եղող անկիւններուն գումարը, որոնց երկու արտաքին սրունները ուղիղ գծի վրայ կը կենան = է 2 Ո։

12. դ. Կէտի մը բոլորտիքն եղող անկիւններուն գումարը = է 4 Ո։

13. Եթէ ԲԱԳ անկեան սրունները՝ Ա գագաթէն անցնելով ուղիղ գծով երկընցընելու ըլլանք, ան ատեն ԵԱԴ անկիւնը՝ ԲԱԳ անկեան **Գագաթան անկիւնը** կը կոչուի։

Ձեւ 3.

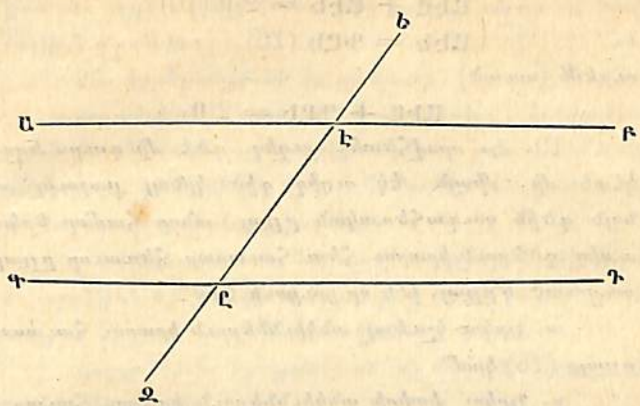


Նոյնպէս ԲԱԴ անկիւնը՝ ԳԱԵ անկեան (Ձեւ 3) գագաթան անկիւնը կ'ըսուի։

14. Գագաթան անկիւններն երկու երկու իրարու հաւասար են։

15. Թէ որ ԱԲ ու ԳԴ երկու հաւասար հեռաւոր գծերն՝ ուրիշ երրորդ ԵԶ ուղիղ գծէ մը կտրուելու ըլլան, ան ատեն ԵԷԲ ու ԵԸԴ անկիւնները (Ձեւ 4) **Կշռեալ անկիւն** կը կոչուին։ Իսկ ԱԷԸ ու ԷԸԴ անկիւնները **Փոփոխ անկիւն** կ'ըսուին։

Ձեւ 4.



16. Եւ որովհետեւ զուգահեռական գծերն ուղիղ գծեր են, որոնք նոյն ուղղութիւնն ունին (2), ասկից կը հետեւի որ զուգահեռական գծերը կտրող երրորդ ուղիղ գիծ մը, ինչպէս ԵԶ, երկուքին ալ նոյն հակումն ունի. կամ ԵԷԲ անկիւնը՝ ԵԸԴ անկեան հաւասար է (3 եւ 5)։ Ուրեմն կշռեալ անկիւններն երկու երկու իրարու հաւասար են։

17. Փոփոխ անկիւններն երկու երկու իրարու հաւասար են։

Ցուցում. Որովհետեւ՝

Ա· ԱԷԸ = ԵԷԲ (14)

եւ Ա· ԷԸԴ = ԵԷԲ (16)

ուրեմն (առած) Ա· ԱԷԸ = ԷԸԴ

18. Եթէ երկու ուղիղ գծեր իրարու հետ զուգահեռական ըլլան, ան ատեն հատանող գծին մի եւ նոյն կողմը կեցող ներքին անկիւններն, երկու ուղիղ անկեան հաւասար կ'ըլլան։

Ցուցում. Որովհետեւ

ԱԷԸ + ԱԷԵ = 2 Ո (10)

եւ ԱԷԵ = ԳԸԷ (16)

ուրեմն (առած)

ԱԷԸ + ԳԸԷ = 2 Ո։

19. Եւ որովհետեւ ուղիղ գծէ մը դուրս եղող կէտէ մը, միայն մէկ ուղիղ գիծ կրնայ քաշուիլ՝ որ նոյն գծին զուգահեռական ըլլայ, անոր համար երկու ուղիղ գծերուն իրարու հետ հաւասար հեռաւոր ըլլալը ցուցուած կ'ըլլայ, թէ որ ցուցուի կամ՝

ա. Երկու կշռեալ անկիւններուն իրարու հաւասար ըլլալը (16) կամ՝

բ. Երկու փոփոխ անկիւններուն իրարու հաւասար ըլլալը (17) եւ կամ՝

գ. Հատանող գծին կողմն եղող երկու ներքին անկիւններուն = 2 Ո ըլլալը (18)։

20։ Եթէ երկու ուղիղ գծեր՝ ուրիշ երրորդ գծի մը զուգահեռական են, իրարու ալ զուգահեռական են։

Ձեւեր ընդհանրապէս:

21. Երես մը՝ որ ամէն կողմանէ սահմանաւորեալ է, Ձեւ կը կոչուի։ Ձեւերը կը բաժնուին Ուղղագիծ, Կորագիծ ու Խառն գծերով ձեւերու։ Ձեւի մը սահմանն անոր Շրջապատը կ'ըսուի։ Դարձեալ ձեւի մը մէջ պէտք է զանազանել Կողը, Անկիւնը, Անկիւնային Ծագն ու Անկիւնագիծը։

22. Ուղղագիծ ձեւերն իրենց կողերուն թուին

նայելով կը բաժնուին՝ Երեքանկիւն, Չորեքանկիւն, Հնգանկիւն եւ այլն։ Բայց նաեւ ընդհանուր անուամբ Բազմանկիւն կ'ըսուին։

23. Երեքանկիւնը կը բաժնուի.

ա. Կողերուն նայելով՝ Հաւասարակող, Հաւասարասրուն եւ Անհաւասարակող երեքանկեան. ըստ որում երեք հաւասար, կամ միայն երկու հաւասար եւ կամ բոլոր անհաւասար կողերէ կը կազմուի։

բ. Անկիւններուն նայելով՝ Ուղղանկիւն, Բթանկիւն եւ Սրանկիւն երեքանկիւններու. ըստ որում ուղիղ, բութ անկիւն մը կամ բոլոր սուր անկիւններ ունին։

Ուղղանկիւն երեքանկեան մը կողերն երկուք են՝ Ներքնաձիգ եւ Էջք։

24. Չորեքանկիւնը կը բաժնուի՝ Չորեքկուսի (կամ Քառակուսի), Ուղղանկիւն, Շեղանկիւն, Շեղակերպ եւ Սեղան։

25. Այն չորեքանկիւնն՝ որուն հակակայ կողերն իրարու հաւասար հեռաւոր են, Հաւասարահեռաւոր գիծ (կամ Զուգահեռագիծ) կը կոչուի. իսկ եթէ միայն երկու հակակայ կողերը զուգահեռական ըլլան, Հաւասարահեռաւոր սեղան կ'ըսուի։

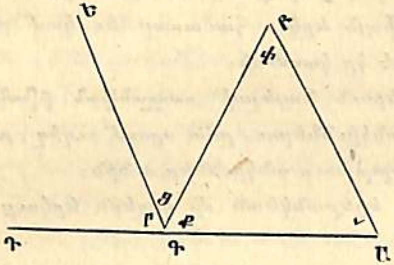
26. Երեքանկեան եւ զուգահեռագծին մէջ ուզուած կողը կրնայ իբրեւ Խարիսխ առնուիլ։ Եւ այն ուղղորդ գիծը՝ որ երեքանկեան ծայրէն կամ զուգահեռագծին հակակայ կողէն խարսխին վրայ կը ձգուի, երեքանկեան կամ զուգահեռագծին Բարձրութիւնը կը կոչուի։

27. Թէ որ ձեւի մը թէ անկիւններն ու թէ կողերն իրարու հաւասար ըլլան, այն ձեւը Կանոնաւոր ձեւ կը կոչուի. իսկ եթէ ասոր հակառակ ըլլալու ըլլայ՝ Անկանոն ձեւ կը կոչուի։

Կանոնաւոր ձեւի մը մէջ՝ երկու երկու կողերէն կազմուած անկիւնը, Անկիւն բազմանկեան կամ Անկիւն շրջանակի կը կոչուի:

28. Երեքանկեան մը երեք անկիւնները միանգամայն առեալ միշտ են = 2 Ո:

Ձեւ 5.



Ցուցում. Պէտք է (Ձեւ 5) ԱԳը մինչեւ Դ երկնցընել, եւ ԳԵ∥ԱԲ քաշել, որով կ'ըլլայ.
Ա· ր = ւ (16)
Ա· ց = փ (17)
Ա· ք = ք (առած)

ուրեմն երեքանկեան երեք անկիւնները միանգամայն են = Գ կէտին քով եղող երեքանկիւններուն, որ են = 2 Ո (11):

Ծանօթութիւն. ԳԵ ∥ ԱԲ քաշել ըսելու տեղ, աւելի ճիշդ կ'ըլլար ըսել՝ եթէ ԳԵ ∥ ԱԲ քաշուած մտածենք. բայց առաջին եղանակաւ ըսուածն աւելի համառօտ է, ∥ նշանը զուգահեռական կը ցուցընէ, իսկ ⋕ նշանը հաւասար եւ զուգահեռական կը նշանակէ:

29. Նոյնպէս ր + ց կամ Ա· ԴԳԲ է = փ + ւ այսինքն.

Երեքանկեան մը արտաքին անկիւնը, երկու ներքին հակակայ անկիւններուն գումարին հաւասար է:

30. Ուրեմն երեքանկեան մը արտաքին անկիւնը, երկու հակակայ ներքին անկիւններուն ամէն մէկէն մեծ է:

31. Թէ որ երեքանկեան մը երկու անկիւնները ծանօթ են, երրորդն ալ կրնայ գտնուիլ թէ որ այս

երկու անկիւններն երկու ուղիղ անկիւններէն հանելու ըլլանք: Եւ թէ որ երկու երեքանկեան մէջ՝ երկու անկիւններն իրարու հաւասար են, երրորդ անկիւնն ալ հաւասար է:

32. Երեքանկիւն մը՝ մէկ ուղիղ անկիւնէ կամ մէկ բութ անկիւնէ աւելի չի կրնար ունենալ, եւս առաւել մէկ ուղիղ ու մէկ բութ անկիւն միանգամայն չի կրնար ունենալ:

33. Երեքանկեան մը շրջանակի անկիւնն է = $^2/_3$ Ո:

34. Աս կանոնը բազմակող ձեւերուն վրայ ալ կը գործածուի: Ամէն չորեքանկեան 4 անկիւնները մէկտեղ են = 4 Ո: Ինչու որ չորեքանկիւնն՝ անկիւնագծով մը կրնայ երկու երեքանկեան բաժնուիլ՝ որոնց 6 անկիւնը քառակուսւոյն 4 անկիւններն են: Քառակուսւոյն շրջանակի անկիւնն է = 1 Ո: Հնգանկեան շրջանակի անկիւնն է = $^6/_5$ Ո եւ այլն:

Ձեւոց պատշաճականութիւնն եւ անոնց յարակցեալ ուրիշ մէկ քանի բաներ:

35. Պատշաճական կը կոչուին այն ձեւերն՝ որ իրարմէ միայն դիրքը կը զանազանին:

Ուրեմն երկու պատշաճական ձեւեր չէ թէ միայն նոյնչափ կող եւ նոյնչափ անկիւն ունին, այլ նաեւ մէկուն մէջ այն կարգաւ իրարու կը յաջորդեն որ կարգաւ մէկալին մէջ, եւ մէկուն մէջ այնչափ մեծ են որչափ մէկալին մէջ:

36. Պատշաճական ձեւերն իրարու հետ նոյն մեծութիւնն ու նոյն ձեւն ունին, եւ եթէ իրարու վրայ դրուին՝ իրար կը գոցեն:

37. Եթէ երեքանկեան մը երեք անկիւնաւոր ծագերուն իրարու նկատմամբ ունեցած դիրքը ծանօթ է, անով բոլոր երեքանկիւնն ալ կ'որոշուի։ Ինչու որ անկիւնաւոր ծագերուն մէջ եղած ուղիղ գծերն որոշեալ են, եւ դիրքերնին ալ անկիւնաւոր ծագերուն դրիցը համեմատ է, ուրեմն ասոնք որոշեալ անկիւններ կը շինեն։ Երեքանկեան մը երեք անկիւնաւոր ծագերուն դիրքն ի մէջ այլոց կ'որոշուի.

ա. Երեքանկեան երեք կողերովը, կամ՝

բ. Երկու կողերով եւ անոնցմէ կազմուած մէկ անկեամբ, կամ՝

գ. Միայն մէկ կողով եւ անոր երկու ծայրն եղող երկու անկիւններով։

Աս երեք դէպքերէն ամէն մէկուն մէջ, երեքանկեան մէկալ մասերն ըստ կամի չեն կրնար առնուիլ։

Ծանօթութիւն. Աս վերն ըսուած երեք դէպքերէն զատ, ուրիշ շատ դէպքեր ալ կան որոնց մէջ երեքանկիւն մը իր մէկ քանի մասերովը կ'որոշուի. զօրօրինակ եթէ երեքանկեան գագաթէն խարսխին վրայ ուղղորդ գիծ մը քաշուած մտածելու ըլլանք, ան ուղղորդ գծով եւ խարսխին երկու հատածներովն երեքանկիւնը կ'որոշուի։ Եւ ընդհանրապէս աս իբր կանոն կրնայ ըսուիլ, որ երեք բան՝ որոնց մէջ առ առաւելն երկու անկիւն ըլլայ, երեքանկեան ձեւն ու մեծութիւնը կ'որոշեն։

38. Ուրեմն երկու երեքանկեան պատշաճականութիւնը ցուցուած կ'ըլլայ, երբ որ ցուցուելու ըլլայ որ՝

ա. Մէկուն երեք կողերը միւսին երեք կողերուն հաւասար են, կամ՝

39. բ. Մէկուն մէջ երկու կողերն եւ անոնցմէ փակուած անկիւնը, միւսին երկու կողերուն եւ անոնցմէ փակուած անկեան հաւասար է, կամ՝

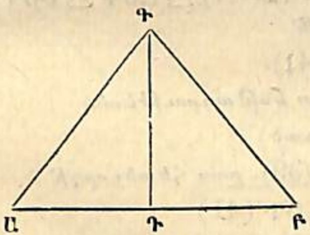
40. գ. Մէկուն մէկ կողն եւ երկու անկիւնները՝ հաւասար են միւսին մէկ կողին եւ երկու անկիւններուն որոնք նոյն դիրքն ունին։ — Եւ որովհետեւ երեքանկեան մը մէջ երկու անկիւններուն մեծութենէն երրորդ անկեան մեծութիւնն ալ կ'որոշուի (31), ընդհանրապէս կրնայ ըսուիլ որ կող մը եւ երկու անկիւն երեքանկիւնը կ'որոշեն։

41. Պատշաճական երեքանկիւններու մէջ հաւասար կողերու դիմացը՝ հաւասար անկիւններ կը գտնուին, եւ հաւասար անկեանց դիմացը՝ հաւասար կողեր։

42. Երկու բազմակող ձեւերուն իրարու հետ պատշաճական ըլլալն ընդհանրապէս կրնայ ցուցուիլ, երբ որ երկուքն ալ հաւասարագիր անկիւնագծերով՝ երեքանկիւններու բաժնուին, եւ իրարու յաջորդող երեքանկիւններուն պատշաճականութիւնն եւ հաւասարաչափ դիրքը ցուցուի։

43. Հաւասարասրուն երեքանկեան մէջ խարսխին վրայ եղած անկիւններն իրարու հաւասար են։ — Հոս համառօտութեան համար խարիսխ ըսելով անհաւասար կողը կ'իմանանք։

Ձեւ 6.



Ցուցում։ Պէտք է (Ձեւ 6) Գ գագաթէն ԱԲ խարսխին միջին կէտին վրայ ԳԴ ուղիղ գիծը քաշել, որով կ'ըլլայ՝

ԱԳ = ԲԳ (ըստ ենթադրութեան)

ԱԴ = ԲԴ (ըստ կազմութեան)

ԳԴ = ԳԴ (առած).

ուրեմն նաեւ △ ԱԳԴ ≅ △ ԲԳԴ (38), եւ ըստ հետեւորդի Ա. Ա = Ա. Բ (41)։

44. ԱԴԳ ու ԲԳԴ երեքանկեանց պատշաճականութենէն կը հետեւի նաեւ ԱԴԳ եւ ԲԴԳ անկեանց հաւասարութիւնը (41)։ Ապա ուրեմն երկուքն ալ ուղիղ անկիւններ են (7)։ Ասկէ այս կանոնը յառաջ կու գայ.

Այն գիծը՝ որ հաւասարասրուն երեքանկեան գագաթէն խարսխին միջին կէտին վրայ կը քաշուի, խարսխին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

45. Այս ուղղորդ գիծը՝ նաեւ գագաթան անկիւնն երկու կը բաժնէ։

46. Ասոր հակառակ հաւասարասրուն երեքանկեան գագաթէն խարսխին վրայ քաշուած ուղղորդ գիծը, թէ խարիսխն եւ թէ գագաթան անկիւնը կը կիսէ։

47. ԳԴ ուղղորդ գծին ամէն մէկ կէտն, Ա ու Բ կէտերէն հաւասար հեռաւորութիւն ունի։

48. Եթէ նոյն խարսխի վրայ կեցող երկու հաւասարասրուն երեքանկեանց գագաթէն ուղիղ գիծ մը քաշուելու ըլլայ, այն գիծը խարիսխն երկու բաժնելով մէջէն ուղղորդ կ՚անցնի։

Ցուցում. Որովհետեւ (Զեւ 7) △ ԱԵԳ △ ԲԵԳ ին պատշաճական է (38) ուրեմն

Ա. ԱԳԴ = ԲԳԴ (41)

ԱԳ = ԲԳ (ըստ ենթադրութեան)

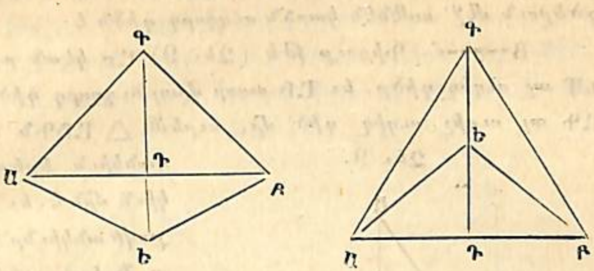
ԳԴ = ԳԴ (առած)

ուրեմն △ ԱԳԴ ≅ ԲԳԴ (39). ըստ հետեւորդի

Նախ ԱԴ = ԲԴ (41)

Երկրորդ Ա. ԱԴԳ = ԲԴԳ (41). ուստի այս անկիւններէն ամէն մէկն՝ ուղիղ անկեան մը հաւասար է։

Զեւ 7.



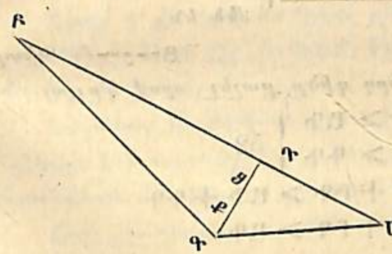
49. Երեքանկիւն մը՝ որուն երկու անկիւններն իրարու հաւասար են, հաւասարասրուն է. 43 Համարէն կը հետեւի։

50. Հաւասարակող երեքանկեան մը անկիւններն իրարու հաւասար են, եւ ասոր հակառակ երեքանկիւն մը՝ որ երեք հաւասար անկիւն ունի, հաւասարակող է։

51. Երեքանկեան մը մեծագոյն կողին դիմացը՝ միշտ մեծագոյն անկիւն մ՚ալ կը գտնուի, ասոր հակառակ մեծագոյն անկեան դիմացը՝ մեծագոյն կող մը։

Ցուցում. Դիցուք թէ (Զեւ 8) ԲԱ > ԲԳ ըլլայ, ուրեմն ԲԱ գծէն կրնայ ԲԴ = ԲԳ մաս մը կտրուելով առնուիլ, եւ եթէ ԳԴ գիծը քաշելու ըլլանք, ան ատեն Ա. ք = Ա. ց (43) կ՚ըլլայ։ Բայց որովհետեւ ց > Ա (30), ուստի նաեւ ք > Ա է, ուրեմն եւս առաւել ԱԳԲ > Ա պիտ՚որ ըլլայ։

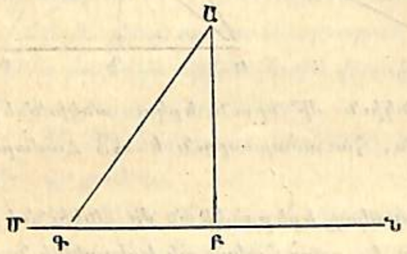
Զեւ 8.



52. **Կէտէ** մը դէպ ի ուղիղ գիծ մը քաշուած գծերուն մէջ՝ ամէնէն կարճն ուղղորդ գիծն է։

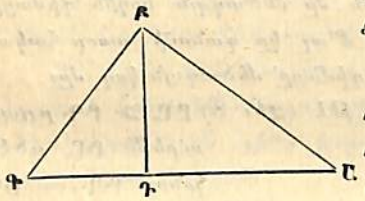
Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 9) Աը կէտն ըլլայ, ՆՄ ալ ուղիղ գիծը, եւ ԱԲ անոր վրայ ուղղորդ գիծ մը, ԱԳ ալ ուրիշ ուղիղ գիծ մը, ուրեմն △ ԱԲԳն ուղղանկիւն երեքանկիւն մըն է, եւ Բին քովի անկիւնը՝ Գին քովն եղող անկիւնէն մեծ է (32), ուրեմն նաեւ ԱԳ > ԱԲ է (51)։

Ձեւ 9.



Ծանօթութիւն. Ուղղորդ գիծը՝ կէտի եւ ուղիղ գծի մը մէջ եղած հեռաւորութիւնը կը ցուցընէ։

Ձեւ 10.



53. **Երեքանկեան** մը երկու կողերը մէկտեղ առեալ, միշտ երրորդէն մեծ են։

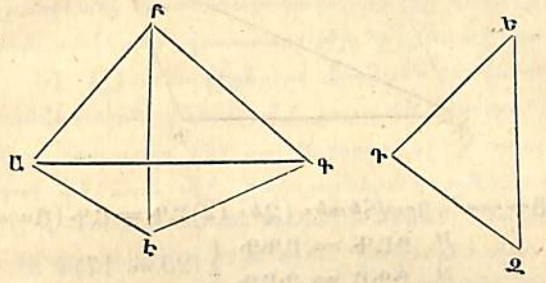
Ցուցում։ Պէտք է (Ձեւ 10) ԲԴ ուղղորդ գիծը քաշել, որով կ'ըլլայ.

	ԱԲ > ԱԴ	52
եւ	ԲԳ > ԳԴ	
ուրեմն նաեւ	ԱԲ + ԲԳ > ԱԴ + ԳԴ	
կամ	ԱԲ + ԲԳ > ԱԳ։	

Ծանօթութիւն. Եթէ ԲԴ ուղղորդ գիծն՝ ԱԳ գծին երկընցած մասին վրայ իյնալու ըլլայ, ցուցումը նոյնչափ դիւրին կ'ըլլայ։

54. **Թէ** որ երկու երեքանկեան մէջ՝ մէկուն երկու կողերը մէկալին երկու կողերուն հաւասար ըլլան, եւ աս կողերէն կազմուած անկիւնը՝ մէկուն մէջ մէկալէն մեծ ըլլայ, անոր երրորդ կողն ալ մէկալին երրորդ

Ձեւ 11.



կողէն մեծ կ'ըլլայ։ Անոր հակառակ թէ որ երրորդ կողը մեծ է՝ անկիւնն ալ մեծ կ'ըլլայ։

Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 11) ԱԲԳ ու ԴԵԶ երեքանկիւններուն մէջ, ԱԲ = ԴԵ ու ԲԳ = ԵԶ, իսկ Ա. ԱԲԳ > ԴԵԶ ըլլայ. հիմայ պիտ'որ ցուցուի որ նաեւ ԱԳ > ԴԶ է։

Պէտք է Ա. ԱԲԷ = ԴԵԶ ընել, ու ԲԷ = ԵԶ, ան ատեն △ ԱԲԷ ≅ △ ԴԵԶ կ'ըլլայ (39), ուրեմն նաեւ ԱԷ = ԴԶ է։

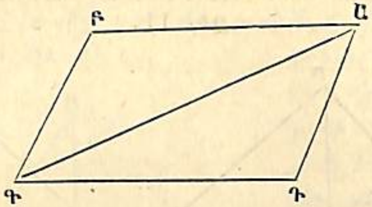
Դարձեալ Ա. ԲԷԳ = Ա. ԲԳԷ (43), ուրեմն նաեւ > ԱԳԷ։ Եւս առաւել ԱԷԳ > ԱԳԷ է, ուրեմն ԱԷԳ երեքանկեան մէջ ԱԳ > ԱԷ է (51)։

Ըստ հետեւորդի որովհետեւ ԴԶ = ԱԷ է, ԱԳ > ԴԶ է։

Ծանօթութիւն. իսկ եթէ Է կէտն՝ ԱԳ կողին վրայ կամ ԱԲԳ երեքանկեան մէջ իյնայ, ցուցումը դիւրին կ'ըլլայ։

55. Ամէն հաւասար հեռաւոր ձեւ, անկիւնագծով մը երկու պատշաճական երեքանկեան կը բաժնուի:

Ձեւ 12.



Ցուցում. Որովհետեւ (Ձեւ 12) ԱԳ = ԱԳ (Առած)

Ա. ԲԱԳ = ԱԳԴ
Ա. ԲԳԱ = ԴԱԳ } (25 ու 17)

ուրեմն ասկէ կը հետեւի որ նաեւ՝

△ ԱԲԳ ≅ ԱԴԳ (40):

56. Ուրեմն նաեւ ԲԳ = ԱԴ, ու ԲԱ = ԳԴ է (41), այսինքն հաւասար հեռաւոր ձեւի մը հակակայ կողերն իրարու հաւասար են:

57. Դարձեալ Ա. Բ = Ա. Դ, նոյնպէս Ա. ԲԱԴ = Ա. ԲԳԴ, այսինքն հաւասար հեռաւոր ձեւի մը մէջ՝ հակակայ անկիւններն իրարու հաւասար են:

58. Հաւասար հեռաւոր ձեւ մը՝ երկու քովէ քով եղող կողերով ու մէկ անկեամբ կ՚որոշուի:

59. Եթէ չորեքկուսւոյ մը երկու կողերը հաւասար եւ զուգահեռական ըլլան, այն ձեւը զուգահեռական ձեւ կ՚ըլլայ:

Ցուցում. Դիցուք թէ ԱԲ ⧣ ԳԴ ըլլայ. պէտք է ԱԳը քաշել որով △ ԱԲԳ ≅ △ ԱԴԳ (39) կ՚ըլլայ, ուրեմն նաեւ Ա. ԱԳԲ = Ա. ԳԱԴ (41), ըստ հե-

տեւորդի ԳԲ ∥ ԱԴ է (19. բ.). ուրեմն աս չորեքանկիւնը զուգահեռական ձեւ մըն է (25):

60. Ամէն չորեքանկիւն՝ որուն հակակայ կողերն իրարու հաւասար են, զուգահեռական ձեւ մըն է:

Ցուցում. Որովհետեւ 38 համարէն ԱԲԳ ու ԱԳԴ երեքանկեանց պատշաճականութիւնը կը հետեւի, որմէ փոփոխ անկեանց հաւասարութիւնը յառաջ կու գայ:

61. Յիսունումեցերորդ համարէն կը հետեւի, որ զուգահեռական գծերու մէջ քաշուած ուղղորդ գծերն իրարու հաւասար են: — Ուղղորդ գիծը՝ զուգահեռական գծերուն մէջ քաշուածներուն ամէնէն կարճն է (52), ուստի եւ անոնց իրարմէ ունեցած հեռաւորութիւնը կը չափէ: Ուրեմն երկու զուգահեռական գծեր ամէն կողմանէ իրարմէ նոյն հեռաւորութիւնն ունին, եւ որչափ ալ երկընցուին երբեք իրարու չեն կրնար հանդիպիլ: Նոյնպէս եթէ երկու գծեր իրարու չկարենան հանդիպիլ՝ զուգահեռական կ՚ըլլան:

62. Մինչեւ հիմայ ըսուածներէն հետեւեալ խնդիրները կրնան դիւրաւ լուծուիլ:

ա. Ուղիղ գծի մը որոշեալ կէտին վրայ՝ որոշեալ անկիւն մը գծել:

բ. Ուղիղ գծէ դուրս եղող կէտէ մը՝ հաւասար հեռաւոր գիծ մը քաշել:

գ. Երեք որոշեալ կողերով երեքանկիւն մը շինել.

դ. Երկու որոշեալ կողերով եւ անոնցմէ կազմուած անկիւնով՝

ե. Մէկ կողով եւ անոր երկու ծայրերն եղող երկու անկիւններով:

զ. Ուղիղ գծի մը որոշեալ մէկ կէտին վրայ՝ ուղղորդ գիծ մը քաշել:

է. Ուղիղ գծէ մը դուրս եղող որոշ կէտէ մը՝ անոր վրայ ուղղորդ գիծ մը քաշել:

ը. Ուղիղ գիծ մը՝ երկու հաւասար մաս բաժնել:

թ. Անկիւն մը՝ երկու հաւասար մաս բաժնել:

Ձեւերուն հաւասարութիւնն երեսներուն տարածութեան նկատմամբ:

63. Երկու ձեւ իրարու համազօր կ'ըսուին, թէ որ իրենց երեսաց տարածութիւնն առանց ձեւերն նայելու հաւասար ըլլալու ըլլայ: Ուստի կրնայ ըլլալ, օրինակի աղագաւ, որ երեքանկիւն մը չորեքանկեան հաւասար ըլլայ:

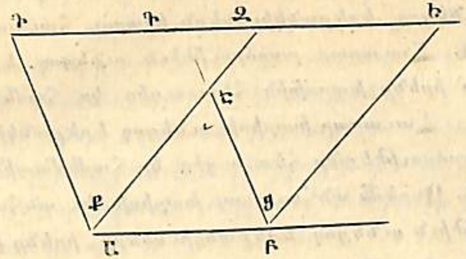
64. Ան զուգահեռական ձեւերը՝ որոնք նոյն խարսխի վրայ եւ նոյն զուգահեռական գծերու մէջ քաշուած են, հաւասար մեծութիւն ունին:

Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 13) ԱԲԳԴ ու ԱԲԵԶ այս երկու հաւասար հեռաւոր ձեւերն ըլլան, որով կ'ըլլայ.

$$\left.\begin{array}{l} ԱԴ = ԲԳ \\ ԱԶ = ԲԵ \end{array}\right\} 56 \Big\}$$

Ա. ք = Ա. ց (ինչու որ երկուքն ալ = են Ղի ըստ 17). ուրեմն նաեւ △ ԴԱԶ ≌ △ ԳԲԵ (38). եւ որովհետեւ պատշաճական երեքանկիւնները միշտ իրարու հետ հաւասար մեծութիւն ունին (36), անոր համար թէ որ երկու երեքանկիւնէն ալ ԳԷԶ մասը մէկդի վերցնելով՝ անոր տեղն ԱԷԲ մասը դնելու ըլլանք, երեքանկիւններէն մէկը

Ձեւ 13.



ԱԲԳԴ, իսկ մէկալն ԱԲԵԶ հաւասար հեռաւոր ձեւերուն կը դառնայ, որոնք նոյնպէս (Առած) իրարու հաւասար են:

Ծանօթութիւն. Թէ որ Է կէտը՝ Գ կէտին կամ ԳԴ կողին վրայ իյնալու ըլլայ, ցուցումը նոյն կերպով կ'ըլլայ:

65. Ուրեմն հաւասար բարձրութիւն եւ հաւասար խարիսխ ունեցող զուգահեռական ձեւերն ալ, իրարու հաւասար են (26, 61):

66. Հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռական ձեւերն՝ իրենց խարիսխներուն հետ ուղիղ կը համեմատին:

67. Հաւասար խարիսխ ունեցող զուգահեռական ձեւերն՝ իրենց բարձրութեան հետ ուղիղ կը համեմատին:

68. Ուրեմն անհաւասար խարիսխ եւ անհաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռական ձեւերը, իրենց խարսխին ու բարձրութեանն արդիւնքին հետ ուղիղ կը համեմատին (Ա. 105. Յաւել.):

69. Ան որովհետեւ ամէն երեքանկիւն՝ որ զուգահեռագծի մը հետ հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունի, զուգահեռագծին կէս մեծութիւնը

կ'ունենայ, ինչպէս 55 համարէն դիւրաւ կրնայ մակաբերուիլ, ուրեմն հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունեցող երեքանկիւններն իրարու հաւասար են:

70. Հաւասար բարձրութիւն ունեցող երեքանկիւններն՝ իրենց խարսխին հետ ուղիղ կը համեմատին:

71. Հաւասար խարիսխ ունեցող երեքանկիւններն իրենց բարձրութեանը հետ ուղիղ կը համեմատին:

72. Ուրեմն անհաւասար խարիսխ եւ անհաւասար բարձրութիւն ունեցող երեքանկիւնները, իրենց խարըսխին ու բարձրութեան արդիւնքին հետ ուղիղ կը համեմատին (Ա. 105. Յաւել.):

73. **Չափել** ըսելով՝ առհասարակ կ'իմացուի քանակութիւն մը ուրիշ քանակութեան հետ, որ իբրեւ ծանուցեալ կը սեպուի՝ բաղդատել, որոշելով որ քանի անգամ աս քանակութիւնն անոր մէջ կը գտնուի: Ուրեմն չափելի քանակութիւնն եւ անոր **չափը** նոյնատեսակ բաներ պիտ'որ ըլլան: Երեսները (մակերեւոյթները) միայն երեսով կը չափուին: Ընդհանուր իբր չափ երեսաց կը գործածուի չորեքկուսին (քառակուսին):

74. Դիցուք թէ չորեքկուսւոյ մը մէկ կողն ըլլայ = 1, ուրեմն բարձրութեան հետ խարսխին ունեցած արդիւնքը կ'ըլլայ = 1 · 1 = 1: Ուրիշ զուգահեռագծի մը խարիսխն այս չորեքկուսւոյն կողը **ա** անգամ բովանդակէ, իսկ բարձրութիւնն ալ **բ** անգամ, ուստի բարձրութեան խարսխին հետ ունեցած արդիւնքը կ'ըլլայ = **բ. ա.** ուրեմն զուգահեռագիծը չորեքկուսւոյն հետ այնպէս կը համեմատի, ինչպէս **ա. բ**: 1. որ է ըսել զուգահեռական ձեւը չորեքկուսին **ա. բ** անգամ իր մէջը կը բովանդակէ:

75. **Ուրեմն զուգահեռագիծ մը** չափելու համար,

զուգահեռագծին թէ բարձրութիւնն ու թէ խարիսխն իբրեւ միութիւն չափոյ առնուող չորեքկուսւոյն կողովը չափելու է, ու ելած թուերն իրարու հետ բազմապատկելու է. արդիւնքը չորեքկուսւոյն զուգահեռագծին հետ ունեցած համեմատութիւնը կը ցուցընէ:

Կամ պարզ եղանակաւ բացատրելու համար՝ պէտք է բարձրութիւնը խարսխին հետ բազմապատկել:

76. Չորեքկուսիներն իրարու հետ իրենց կողերուն չորեքկուսւոյն պէս կը համեմատին:

77. **Երեքանկիւն մը չափելու համար**՝ պէտք է բարձրութիւնը խարսխին հետ բազմապատկել, եւ 2ի վրայ բաժնել (տես 69):

78. **Ուրիշ ամէն ուղղագիծ ձեւ չափելու** համար, պէտք է ձեւն երեքանկիւններու բաժնել եւ ըստ 77 համարին ամէն մէկ երեքանկիւններուն պարունակածը գտնելէն ետքը գումար ընել:

79. Ներքնաձիգին չորեքկուսին՝ երկու էջքերուն չորեքկուսիներուն գումարին հաւասար է:

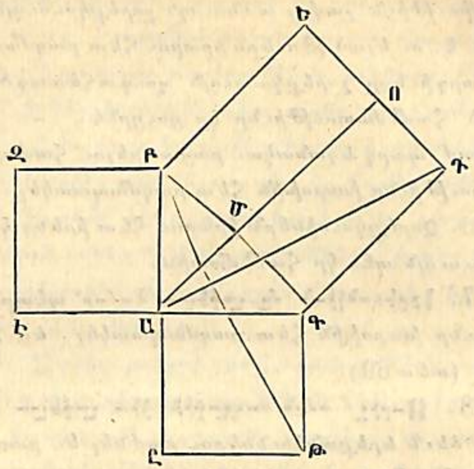
Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 14) ԱԲԳ ուղղանկիւն երեքանկիւն մ'ըլլայ, ԲԳ ալ անոր ներքնաձիգը, իսկ ԱԲ ու ԱԳ երկու էջքերը (տես 23), եւ երեք կողերուն վրայ ալ մէյմէկ չորեքկուսի շինուած ըլլայ: Պէտք է Ա կէտէն ԱՈ ∥ ԲԵ քաշել, որով ԲԵՈՄ ու ՄՈԴԳ երկու հաւասար հեռաւոր ձեւերը կ'ելլեն: Դարձեալ պէտք է ԱԴ ու ԲԹ գծերը քաշել, որով կ'ըլլայ՝

ԱԳ = ԳԹ ⎫ ինչու որ մի եւ նոյն չորեքկու-
ԳԴ = ԳԲ ⎭ սւոյն կողերն են (տես 74)

եւ դարձեալ՝ Ա. ԱԳԴ = ԲԳԹ (ինչու որ ամէն մէկը՝ մէկ Ո է եւ ԱԳԲ անկիւնէն կը կազմուի.)

ուրեմն նաեւ՝ △ ԳԴԱ = ԳԹԲ (39)

Ձեւ 14.



Արդ ԴԳԱ երեքանկիւնը՝ ՄՈԴԳ զուգահեռագծին հետ նոյն ԳԴ խարիսխն ունի. եւ որովհետեւ ասոնք երկուքն ալ ԱՈ ու ԳԴ զուգահեռագծերուն մէջն են, եւ երկուքն ալ մի եւ նոյն բարձրութիւնն ունին, ասկից կը հետեւի որ երեքանկիւնը՝ ՄՈԴԳ զուգահեռագծին կէս մեծութիւնն ունի։ Նոյնպէս ԳԹԲ երեքանկիւնը՝ ԱԳԹԸ չորեքկուսւոյն կէսն է։

Ուստի՝

ՄՈԴԳ = ԱԳԹԸ է։

Այս եղանակաւ կրնայ նաեւ ցուցուիլ որ,

ԲԵՈՄ = ԱԲԶԷ

եւ ըստ հետեւորդի՝

ՄՈԴԳ + ԲԵՈՄ = ԱԳԹԸ + ԱԲԶԷ

կամ՝

ԲԳԴԵ = ԱԳԹԸ + ԱԲԶԷ է։

Ծանօթութիւն 1. Այս կանոնը՝ գտնողին Պիւթագորասին անուամբը, Պիւթագորեան կանոն կ՚ըսուի։

Ծանօթութիւն 2. ԲԳԴԵ = ԱԳԹԸ + ԱԲԶԷ գրելու տեղ, ԲԳ^{2} = ԱԳ^{2} + ԱԲ^{2} կրնայ գրուիլ։

Ձեւերուն նմանութիւնը:

80. Երկու ձեւ իրարու **նման** կ՚ըսուին, թէ որ աւանց իրենց մեծութեանը նայելու, երկուքն ալ նոյն ձեւն ունենան։

81. Ուրեմն երկու նման ձեւեր՝ նոյնչափ թուով անկիւններ եւ նոյնչափ ալ կողեր ունին։ Մէկուն անկիւններն միւսին անկիւններուն չափ մեծ են ու երկուքին մէջն ալ մի եւ նոյն կարգաւ իրարու կը յաջորդեն։ Նոյն դիրքն ունեցող կողերը մէկուն մէջ այնպէս իրարու կը համեմատին, ինչպէս միւսին մէջ կամ թէ ըսեմ **համեմատական** են։

Ծանօթութիւն 1. Երկու զանազան մեծութիւն ունեցող նման ձեւերու համար կրնայ մտածուիլ, որ երկուքն ալ մի եւ նոյն եղանակաւ բայց զատ զատ չափերով գծագրուած ըլլան։

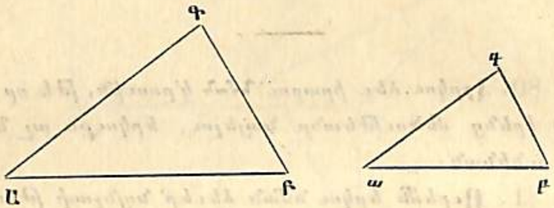
Ծանօթութիւն 2. Ան գծերն՝ որ մէկ ձեւին մէջ ըստ ամենայնի նոյն դիրքն ունին ինչպէս միւսին մէջ, Համանուն կամ Միաբան գիծ կը կոչուին։

82. Երեքանկեան մը ձեւը մէկ քանի մասերով կ՚որոշուի, այնպէս որ եթէ ասոնք որոշեալ ըլլալու ըլլան, մնացած մասերն ուզուածին պէս չեն կրնար առնուիլ։

Ծանօթութիւն. Հոս ալ շատ դէպքեր կրնան ըլլալ, որոնց մէջ երեքանկեան մը ձեւը մէկ քանի մասերով կ'որոշուի։ Եւ ընդհանրապէս կրնայ ըսուիլ որ միշտ երկու բան բաւական կ'ըլլայ։

83. *Երկու երեքանկիւն իրարու նման կ'ըլլան, եթէ իրենց կողերն իրարու համեմատական ըլլան։*

Ձեւ 15.



կամ ուրիշ կերպ բացատրելով թէ որ՝

ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ

եւ ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ

ան ատեն նաեւ (*ըստ* Ա. 104)

ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ է։

84. *Երկու երեքանկիւն իրարու նման կ'ըլլան, թէ որ մէկուն երկու կողը մէկալին երկու կողերուն համեմատական ըլլայ, եւ ասոնցմէ կազմուած անկիւնը հաւասար ըլլայ։*

Կամ ուրիշ եղանակաւ բացատրելով եթէ՝

ԱԲ : ԱԳ = աբ : ագ

եւ

Ա. Ա = ա *ըլլալու ըլլայ*։

85. *Երկու երեքանկիւն իրարու նման կ'ըլլան, թէ որ երկուքին ալ անկիւններն իրարու հաւասար ըլլան։*

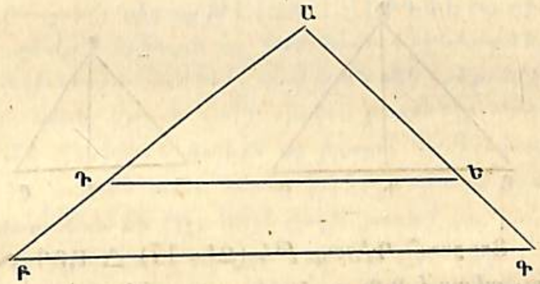
86. *Նման երեքանկիւններու մէջ՝ համանուն կո-*

ղերուն դիմացը հաւասար անկիւններ կան, եւ հաւասար անկիւններուն դիմացը՝ համանուն կողեր։

87. *Երկու բազմանկիւն ձեւերուն նման ըլլալն ընդհանրապէս կը ցուցուի, թէ որ երկուքն ալ հաւասար անկիւնագծերով երեքանկիւններու բաժնելէն ետքը, անոնց նմանութիւնն ու միաչափ դիրքը ցուցուի։*

88. *Թէ որ* ԱԲԳ *երեքանկեան մէջ* (Ձեւ 16) ԴԵ ∥ ԲԳ *գիծ մը քաշուելու ըլլայ,* ԱԴԵ *կտրուած երեքանկիւնն ամբողջ* ԱԲԳ *երեքանկեան նման է, որ* 85 *համարէն կը հետեւի։*

Ձեւ 16.



89. *Դարձեալ՝*

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ (86)

այսինքն ամբողջ կողերն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԴԵ *ին վերի կտորներն։*

90. *Դարձեալ՝*

ԱԲ — ԱԴ : ԱԴ = ԱԳ — ԱԵ : ԱԵ (Ա. 100)

կամ՝ ԲԴ : ԱԴ = ԳԵ : ԱԵ

այսինքն վերի կտորներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս վարի կտորները։

91. Դարձեալ՝

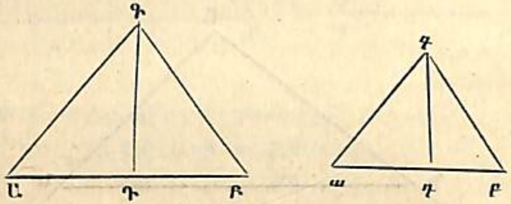
$$\text{ԱԴ} : \text{ԴԵ} = \text{ԱԲ} : \text{ԲԳ}$$

Ծանօթութիւն. Ասոր վրայ հաստատուած է պզտիկցուած չափիչ բռուած գործիքին սովորական կազմուածքը։

92. Ընդ հակառակն եթէ 89—91 յառաջ բերուած համեմատութիւններէն մէկը տեղի ունենալու ըլլայ, ան ատեն նաեւ ԴԵ ∥ ԲԳ կ՚ըլլայ։

93. Նման երեքանկիւններն իրենց համանուն կողերուն չորեքկուսւոյն պէս իրարու կը համեմատին։

Ձեւ 17.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 17) $\triangle$ ԱԲԳ ∾ աբգ ըլլայ. պէտք է ԳԴ ու գդ ուղղորդ գծերը քաշել, որով $\triangle$ ԱԳԴ ∾ $\triangle$ ագդ կ՚ըլլայ (85).
ուրեմն նաեւ՝

$$\text{ԱԳ} : \text{ագ} = \text{ԳԴ} : \text{գդ} \quad (86)$$

եւ ԱԳ : ագ = ԱԲ : աբ (ըստ ենթադրութեան)
ուրեմն՝

$$\text{ԱԳ}^2 : \text{ագ}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{ԳԴ} : \text{աբ} \cdot \text{գդ} \quad (\text{Ա}.\ 96)$$

եւ որովհետեւ նաեւ՝

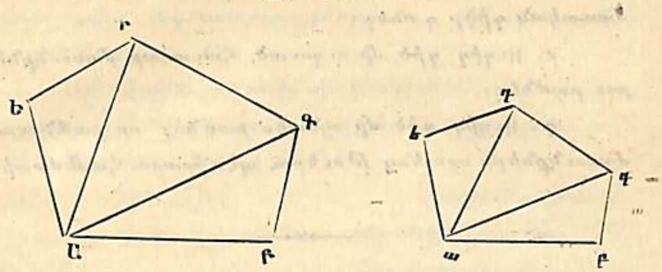
$$\triangle\ \text{ԱԲԳ} : \triangle\ \text{աբգ} = \text{ԱԲ} \cdot \text{ԳԴ} : \text{աբ} \cdot \text{գդ} \quad (72)$$

ասկէ կը հետեւի որ նաեւ՝

$$\triangle\ \text{ԱԲԳ} : \triangle\ \text{աբգ} = \text{ԱԳ}^2 : \text{ագ}^2 \quad (\text{Ա}.\ 104)$$։

94. Նման բազմանկիւններն՝ իրենց համանուն կողերուն չորեքկուսւոյն պէս իրարու կը համեմատին։

Ձեւ 18.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 18) ԱԲԳԴԵ ∾ աբգդե ըլլայ. պէտք է երկուքն ալ համանուն անկիւնագծերով երեքանկիւններու բաժնել, որով ամէն մէկ երեքանկիւնն իրարու նման կ՚ըլլայ (87)։ Երկու բազմանկիւններուն ամէն մէկ համանուն կողերն ալ իրարու համեմատական են (81), ուրեմն նաեւ անոնց չորեքկուսիներն իրարու համեմատական են (Ա. 98)։ Ասկէ յառաջ կու գայ որ,

$$\triangle\ \text{ԱԲԳ} : \text{աբգ} = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2 = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2$$

$$\triangle\ \text{ԱԳԴ} : \text{ագդ} = \text{ԳԴ}^2 : \text{գդ}^2 = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2$$

$$\triangle\ \text{ԱԴԵ} : \text{ադե} = \text{ԱԵ}^2 : \text{աե}^2 = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2$$

եւ ըստ հետեւորդի (Ա. 101)

$$\triangle\ \text{ԱԲԳ} + \text{ԱԳԴ} + \text{ԱԴԵ} : \text{աբգ} + \text{ագդ} + \text{ադե} = 3\,\text{ԱԲ}^2 : 3\,\text{աբ}^2$$

ուստի՝

$$\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{աբգդե} = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2 \quad (\text{Ա}.\ 92)$$

Ինչ որ հոս հնգանկեան վրայ ցուցուցինք, նոյնը նաեւ աս եղանակաւ ուրիշ ամէն բազմանկիւններուն վրայ կրնայ ցուցուիլ։

95. Առհասարակ նման ձեւերն իրենց համանուն գծերուն չորեքկուսւոյն պէս իրարու կը համեմատին։

96. Վերն ըսուածներէն եռեւի եկած խնդիրները կրնան դիւրաւ լուծուիլ։

ա. Արդէն ծանօթ երեք գծերուն՝ չորրորդ համեմատական գիծը գտնել։

բ. Ուղիղ գիծ մը ուզուած հաւասար մասունքներու բաժնել։

գ. Ուղիղ գիծ մը այնպէս բաժնել՝ որ բաժնուած մասունքներն որոշեալ թուերու պէս իրարու համեմատին։

Բոլորակ։

97. Ձեւ մը՝ որուն շրջանակին ամէն մէկ կէտն ուրիշ ներքին հաստատուն կէտէ մը հաւասար հեռու է, **Բոլորակ** կը կոչուի. իսկ այն կէտը՝ **Կեդրոն** կ'ըսուի։ Այս դէպքիս մէջ՝ շրջանակն առանձին անուամբ **Շրջագիծ** կը կոչուի։ Իսկ ան ուղիղ գիծը՝ որ կեդրոնէն դէպ ի շրջապատ կը քաշուի, **Կէս տրամագիծ** կամ **Ճառագայթ** կ'անուանուի։

98. Շրջապատին մէկ կտորն **Աղեղ** կը կոչուի, իսկ շրջապատին չորրորդ մասը՝ **Քառորդ շրջագիծ** կ'ըսուի։ Այն ուղիղ գիծն՝ որ շրջապատին մէկ կէտէն դէպ ի ուրիշ կէտ կը քաշուի, **Լար** կ'անուանուի։ Իսկ այն լարն որ բոլորակին կեդրոնէն կ'անցնի՝ **Տրամագիծ** կը կոչուի։

99. Բոլորակին այն մասն՝ որն որ երկու ճառագայթէ ու մէկ աղեղէ սահմանաւորուած է, **Բոլորակի հատէն** կ'ըսուի. իսկ այն մասն որն որ մէկ աղեղէ ու մէկ լարէ սահմանաւորուած է, **Հատուած բոլորակի** կ'ըսուի։

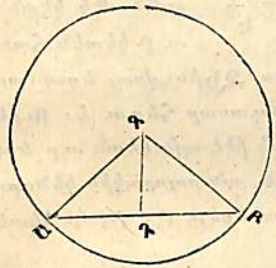
100. Թէ որ երկու կամ շատ բոլորակներ, նոյն

համարակաց կեդրոն ունենալու ըլլան, **Կեդրոնակից բոլորակք** կը կոչուին։

101. 97 համարէն կը հետեւի՝ որ մի եւ նոյն բոլորակին ամէն մէկ ճառագայթներն ու երկակտուրներն իրարու հաւասար են։

102. Եթէ բոլորակի մը կեդրոնէն լարի մը վրայ ուղղորդ գիծ մը քաշուելու ըլլայ, ուղղորդ գիծը լարն երկու հաւասար մաս կը բաժնէ։

Ձեւ 19.



Ցուցում. ԱԲԳ եռանկիւնը (Ձեւ 19) հաւասարասրուն է (101). ուրեմն հոս կ'արժէ 46 համարին մէջ եղած կանոնը։

103. Աստ ներհակ թէ որ բոլորակի մը կեդրոնէն՝ լարին միջին կէտին վրայ ուղիղ գիծ մը քաշուելու ըլլայ, այն գիծը լարին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

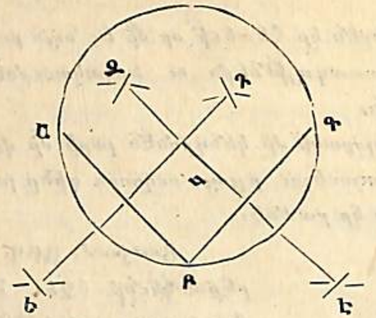
104. Եթէ լարի մը միջին կէտէն՝ ուղղորդ գիծ մը քաշուելու ըլլայ, բոլորակին կեդրոնէն կ'անցնի։

105. Ուրեմն երկու լարերուն միջին կէտէն քաշուած երկու ուղղորդ գծերը, կեդրոնին վրայ իրար կը կտրեն կամ իրարու կը հանդիպին։

Ուստի երկու այսպիսի ուղղորդ գծերով՝ բոլորակի մը կեդրոնը կրնայ գտնուիլ, միայն թէ լարերն իրարու զուգահեռական չըլլան։

106. Երեք կէտեր՝ միայն թէ ուղիղ գծի մը վրայ չըլլան, միշտ նոյն բոլորակին շրջապատին վրայ կ'իյնան։

Ձեւ 20.



Ցուցում. Դիցուք թէ սա երեք կէտերն ըլլան Ա, Բ, Գ (Ձեւ 20)։ Պէտք է ԱԲ ու ԲԳ գծերը ԴԵ ու ԶԷ ուղղորդ գծերով երկու հաւասար մաս բաժնել, ուստի ԴԵին վրայի ամէն մէկ կէտն՝ Ա ու Բ կէտէն հաւասար հեռու է (47). Նոյնպէս ԶԷին վրայ եղող ամէն մէկ կէտը՝ Բ ու Գ կէտերէն հաւասար հեռու է։ Ուրեմն ԱԿ = ԲԿ = ԳԿ է, եւ Կը կամ թէ այն կէտն ուր երկու ուղղորդ գծերն իրար կը կտրեն, ան բոլորակին կենդրոնն է՝ որուն շրջապատին վրայ սա երեք Ա, Բ, Գ կէտերն ինկած են։

107. Ուրեմն երեք կէտերով, որոնք մի եւ նոյն ուղիղ գծի վրայ չեն, կրնայ բոլորակ մը գծագրուիլ. եւ որովհետեւ ԴԵն ու ԶԷն միայն մէկ կէտի վրայ իրար կը կտրեն, ուրեմն երեք կէտերուն դիրքէն ամբողջ բոլորակն ալ կ՚որոշուի։

108. Հաւասար աղեղներուն դիմացը կենդրոնին քով, հաւասար ալ անկիւններ կը գտնուին. ասոր հակառակ կենդրոնին քով եղող հաւասար անկիւններուն՝ հաւասար աղեղներ կը պատշաճին։

109. Բոլորակին մէջ՝ կենդրոնին քովն եղող անկիւններն իրենց հակակայ աղեղներուն պէս իրարու կը համեմատին։

110. Զանազան բոլորակաց կենդրոնի հաւասար

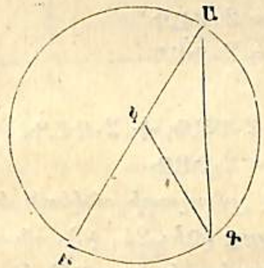
անկիւններուն՝ նման՝ աղեղներ կը պատշաճին, այսինքն այնպիսի աղեղներ՝ որ իրենց շրջապատին հետ նոյն համեմատութիւնն ունին։

Ծանօթութիւն. Ասոր վրայ հաստատուած է անկիւնները չափելու համար շրջապատը հաւասար մասերու բաժնելը։ Այսինքն հասարակօրէն ամբողջ բոլորակը 360 մաս կամ աստիճան կը բաժնուի. ամէն մէկ աստիճանն ալ 60 վայրկեան, եւ ամէն մէկ վայրկեանն ալ 50 երկրորդական վայրկեան։ — Անկիւնաչափ կամ Փոխադրիչ։

111. Մի եւ նոյն աղեղան վրայ կեցող կենդրոնի անկիւնը՝ շրջապատի անկիւնէն կրկին մեծ է։

Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 21) ԲԿԳը կենդրոնի անկիւնն ըլլայ եւ ԲԱԳ ալ շրջապատի անկիւնը, որն որ կենդրոնի անկեան հետ նոյն ԲԳ աղեղան վրայ կեցած է։ Ուստի կենդրոնը՝ կամ շրջապատի անկեան սրուններէն մէկուն վրայ կրնայ իյնալ, կամ երկու սրունին մէջ եւ կամ անոնցմէ դուրս։

Ձեւ 21.



Ա. Թէ որ Կ կենդրոնը սրուններէն մէկուն վրայ իյնալու ըլլայ, (Ձեւ 21, ա.) ան ատեն կ՚ըլլայ՝

Ա·ԲԿԳ = Ա·ԲԱԳ + ԱԳԿ (29)

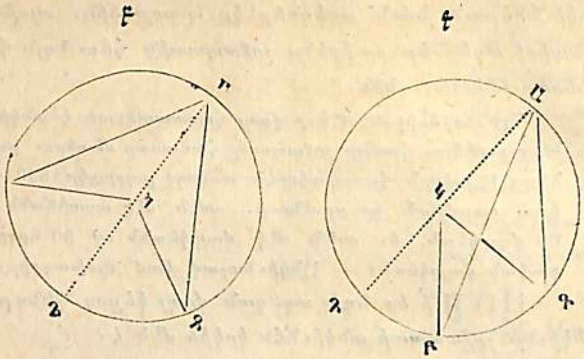
բայց որովհետեւ՝

Ա· ԱԳԿ = ԲԱԳ է (43)

ապա ուրեմն (Առած)

Ա·ԲԿԳ = ԲԱԳ + ԲԱԳ = 2· ԲԱԳ է։

Բ. Թէ որ Կ կենդրոնն երկու սրունից մէջտեղն իյ-



նալու ըլլայ (Ձեւ 21, բ), ան ատեն ԱԿԴ ուղիղ գիծը պէտք է քաշել, եւ ըստ Ա՛ին կ՚ըլլայ.

Ա·ԲԿԴ = 2·ԲԱԴ

Ա·ԴԿԳ = 2·ԴԱԳ

ապա ուրեմն՝

Ա·ԲԿԴ + ԴԿԳ = 2·ԲԱԴ + 2·ԴԱԳ

եւ կամ՝ Ա·ԲԿԳ = 2·ԲԱԳ

Գ. Թէ որ Կ կեդրոնը շրջապատի անկեան երկու սրունքներէն դուրս իյնալու ըլլայ (Ձեւ 21, գ.), ան ատեն ԱԿԴ ուղիղ գիծը պէտք է քաշել, եւ ըստ Ա՛ին կ՚ըլլայ.

Ա·ԳԿԴ — ԲԿԴ = 2.ԳԱԴ — 2.ԲԱԴ

եւ կամ՝

Ա·ԲԿԳ = 2·ԲԱԳ

112. Մի եւ նոյն աղեղան վրայ կեցող շրջապատի անկիւններն իրարու հաւասար են, եւ ասոր հակառակ հաւասար շրջապատի անկիւններն իրենց սրունքը մէջ հաւասար աղեղներ կը պարունակեն։

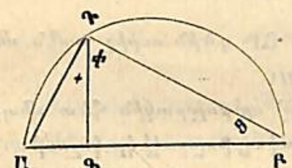
113. Շրջապատի անկեան մը մեծութեան չափն ան աղեղան կէսն է, որուն վրայ անկիւնը կեցած է։

114. Երկակտուրին ծագերուն վրայ կեցող շրջապատի անկիւնը = է 1 Ո։

115. Ամէն չորեքանկեան մէջ՝ որուն անկիւնաւոր ծագերը նոյն շրջապատին մէջ կ՚իյնան, շրջապատին հակակայ երկու անկիւնները մէկտեղ երկու ուղիղ անկիւն կ՚ընեն։

116. Շրջապատին մէկ կէտէն երկակտուրին վրայ քաշուած ուղղորդ գիծը, երկակտուրին երկու հատածներուն միջին համեմատականն է։

Ձեւ 22.



Յուցում. + եւ ‡ անկիւնները (Ձեւ 22) մէկտեղ՝ մէկ ուղիղ անկիւն կը կազմեն (114), նոյնպէս ց եւ ‡ անկիւնները մէկտեղ մէկ ուղիղ անկիւն կը կազմեն (28), ապա ուրեմն ց = + է, ուրեմն նաեւ ԱԳԴ ուղղանկիւն երեքանկիւնը՝ ԴԳԲ ուղղանկիւն երեքանկեան նման է (85), եւ ըստ հետեւորդի (86)

ԱԳ : ԴԳ = ԴԳ : ԳԲ

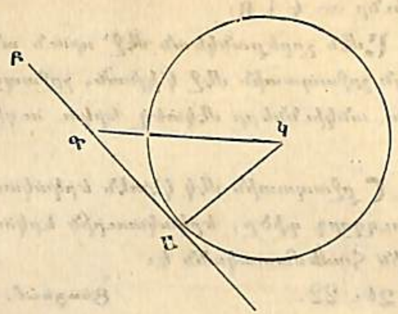
117. Նու որոմհետեւ △ ԱԴԳ ∾ ԱԴԲ է, ուրեմն ասկէ կը հետեւի որ՝

ԱԳ : ԱԴ = ԱԴ : ԱԲ

118. Թէ որ ճառագայթի մը ծայրն ուղղորդ գիծ մը քաշուելու ըլլայ, նոյն գիծը շրջապատին հետ ամենեւին ուրիշ հասարակաց կէտ մը չի կրնար ունենալ։

Յուցում. Թէ որ (Ձեւ 23) ԲԱԸ ԿԱ ճառագայթին վրայ ուղղորդ ձգուած ըլլայ, ան ատեն ամէն ուրիշ գիծ՝ ինչպէս ԿԳ, > ԿԱ (52) ուրեմն ճառագայթէն աւելի

Ձեւ 23.



մեծ է։ Ասկէ կը հետեւի որ ԱԲ գծին ուրիշ ամէն մէկ կէտը բոլորակէն դուրս կը մնայ։

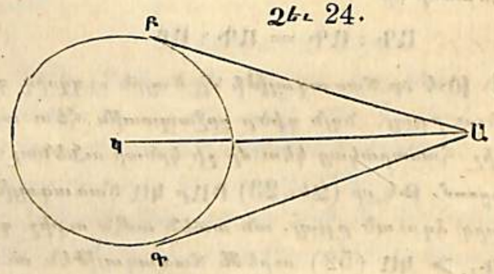
119. Այսպիսի գիծ մը՝ որ բոլորակին հետ միայն հասարակաց կէտ մ'ունի, Շօշափող բոլորակի կը կոչուի։

120. Թէ որ շօշափողի մը շօշափման կէտին վրայ ճառագայթ մը ձգուելու ըլլայ, անոր հետ ուղիղ անկիւն կը կազմէ։

121. Բոլորակէ մը դուրս եղող ամէն մէկ Ա կէտէն, երկու ԱԲ ու ԱԳ շօշափող կրնայ ձգուիլ։

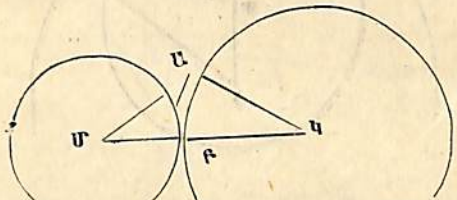
Բոլորակին կենդրոնէն քաշուած ԱԿ ուղիղ գիծը (Ձեւ 24), ԲԱԳ անկիւնն երկու հաւասար մաս կը բաժնէ։

Ձեւ 24.



122. Թէ որ երկու բոլորակներու կենդրոնները՝ միայն իրենց ճառագայթին գումարովը իրարմէ հեռու ըլլան, ան ատեն երկու բոլորակներն իրար դրսէն կը շօշափեն։

Ձեւ 25.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 25) ՄԿ աս երկու ճառագայթներուն գումարն ըլլայ, ուստի աս երկու բոլորակները Բ կէտէն զատ (որն որ ԿՄ ուղիղ գծին վրայ է) ուրիշ հասարակաց կէտ չունին։

Ինչու որ դիցուք թէ Ան ըլլայ ուրիշ կէտ մը Կ կենդրոնով բոլորակին շրջապատին վրայ, ուստի կ'ըլլայ.

ՄԱ + ԱԿ > ՄԲ + ԲԿ (53)

ուրեմն (առած)

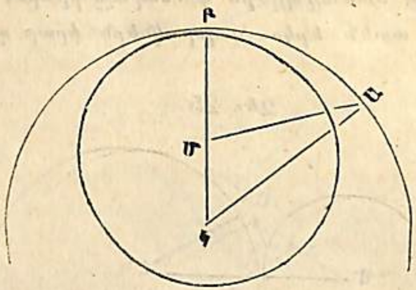
ՄԱ > ՄԲ

ասկէ կը հետեւի որ Ա կէտը՝ Մ կենդրոնով բոլորակին շրջապատէն դուրս է։

123. Թէ որ երկու բոլորակներու կենդրոններն՝ իրենց ճառագայթներուն այլակերպութեամբն իրարմէ հեռու ըլլան, աս երկու բոլորակներն իրար ներսէն կը շօշափեն։

Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 26) ԿԱն արտաքին բոլորակին ճառագայթն է, ՄԲ ալ ներքին բոլորակին. ու-

Ձեւ 26.



րեմ ՄԿն երկու ճառագայթներուն այլակերպութիւնն է։ Արդ աս երկու շրջապատները Բ կէտէն ուրիշ հասարակաց կէտ մը չունին, եւ Կ կենդրոնով շրջապատին ամէն մէկ Ա կէտը՝ Մ կենդրոնով շրջապատէն դուրս է։

Ինչու որ՝ ԱՄ + ՄԿ > ԱԿ (53) է.

ապա ուրեմն որովհետեւ՝

ԱԿ = ԲԿ = ԲՄ + ՄԿ

ԱՄ + ՄԿ > ԲՄ + ՄԿ

ասկէ կը հետեւի որ (առած)

ԱՄ > ԲՄ

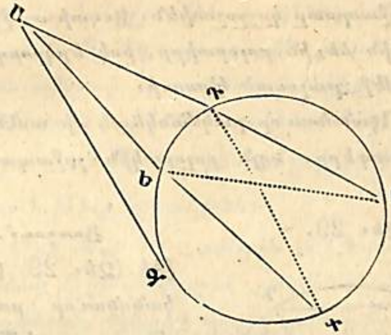
այսինքն Մ կենդրոնով բոլորակին ճառագայթէն մեծ է։

124. Թէ որ բոլորակէ մը դուրս եղող Ա կէտէ մը (Ձեւ 27), ԱԲ ու ԱԳ երկու ուղիղ գծերը բոլորակէն անցնելով քաշուելու ըլլան, այս գծերն այնպէս խոտորնակ կը համեմատին իրարու, ինչպէս անոնց արտաքին հատածներն իրարու հետ կը համեմատին, այսինքն.

ԱԲ : ԱԳ = ԱԵ : ԱԴ

Ցուցում. Որովհետեւ (Ձեւ 27) Δ ԱԲԵ ∾ ԱԳԴ է (85, 112)։

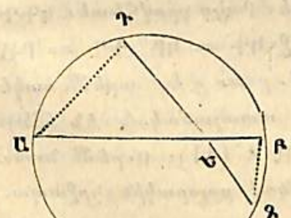
Ձեւ 27.



125. Եթէ ԱԵԳ գիծն Ա կէտին վրայ դառնալով մինչեւ ԱԶ հասած մտածելու ըլլանք, որն որ Զ կէտին վրայ բոլորակը շօշափէ, ան ատեն ԱԶ շօշափողը, ԱԲ գծին եւ անոր ԱԴ արտաքին հատածին միջին համեմատականը կ'ըլլայ։

126. Թէ որ երկու ԱԲ ու ԳԴ լարերն՝ Եին վրայ իրար կտրելու ըլլան, մէկուն հատածներն՝ իրարու այնպէս խոտորնակ կը համեմատին, ինչպէս միւսին հատածները, այսինքն՝

Ձեւ 28.



ԱԵ : ԴԵ = ԳԵ : ԵԲ։

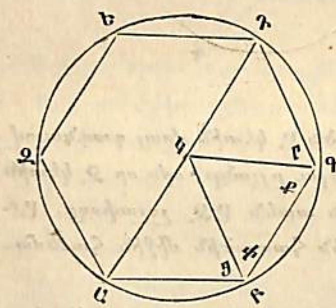
Ցուցում. Որովհետեւ (Ձեւ 28) Δ ԱԵԴ ∾ Δ ԳԵԲ (85)։

127. Ձեւ մը բոլորակին մէջ գծուած կ'ըսուի, թէ որ անոր ամէն մէկ անկիւնաւոր

ծագերը բոլորակին մէջն ըլլալու ըլլան. իսկ բոլորակէն բոլորտիքը քաշուած կ'ըսուի, թէ որ ամէն մէկ կողերը նոյն բոլորակին շրջապատը կը շօշափեն։ Ուստի առջի դէպքին մէջ՝ բոլորակին ձեւին բոլորտիքը, իսկ երկրորդ դէպքին մէջ՝ ձեւին մէջ քաշուած կ'ըսուի։

128. Կանոնաւոր բազմանկեան մը ամէն մէկ անկիւնաւոր ծագերը, նոյն բոլորակին շրջապատին վրայ կ'իյնան։

Ձեւ 29.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 29) ԱԲԳԴԵԶ կանոնաւոր բազմանկիւն մ'ըլլայ, ուրեմն կրնայ Ա, Բ ու Գ երեք կէտերով բոլորակ մը գծագրուիլ (107)։ Դիցուք թէ այս բոլորակին կենդրոնը Կ ըլլայ. ուրեմն △ԲԿԳը հաւասարասրուն երեքանկիւն մըն է (101), ուրեմն նաեւ Ա· փ = ք։ Բայց որովհետեւ Գ ու Բ շրջանակի անկիւններն ալ իրարու հաւասար են (27), ուրեմն ասկէ կը հետեւի որ նաեւ Ա·ր = ց է։ Բայց որովհետեւ ԿԳԴ ու ԿԲԱ երեքանկիւններուն մէջ ԿԳ = ԿԲ, ԳԴ = ԲԱ (ըստ ենթադրութեան) եւ Ա· ր = ց է, ուրեմն ասկէ կը հետեւի որ ասոնք իրարու պատշաճական են (39)։ Ապա ուրեմն նաեւ ԿԴ = ԿԱ է (41)։ Ուրեմն նաեւ չորրորդ Դ կէտն ալ, Կ կենդրոնով բոլորակին շրջապատին վրայ կ'իյնայ։

Այս եղանակաւ աս կարգաւոր ձեւին ուրիշ ամէն մէկ կէտին համար ալ կրնայ ցուցուիլ։

129. Ձեւի մը բոլորտիքը քաշուած բոլորակին կենդրոնը, կրնայ եղանակաւ մը իբրեւ կենդրոն կարգաւոր բազմանկեան մտածուիլ։ Եթէ աս կենդրոնէն բազմանկեան ծագերուն մէյմէկ ճառագայթ քաշուելու ըլլայ, բազմանկիւնն այնչափ պատշաճական երեքանկիւններու կը բաժնուի որչափ կող ունի։ Եւ կենդրոնին քով եղող անկիւնը միշտ $= \frac{4\,Ո}{Ն}$ է, համարելով որ Ն բազմանկեան կողերուն թիւը կը ցուցընէ։

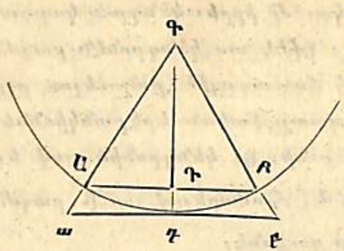
130. Ասի մեզի 78 համարին մէջ եղածէն աւելի դիւրին եղանակ մը կը սորվեցընէ, բազմանկեան մը տարածութիւնը գտնելու։ Պէտք է որոշել պատշաճական երեքանկիւններէն մէկուն տարածութիւնը, եւ բազմանկեան կողերուն թուոյն հետ բազմապատկել։

Դիցուք թէ բազմանկեան կողն = կ ըլլայ, իսկ կենդրոնէն բազմանկեան կողին վրայ քաշուած գիծը = բ, որով այսպիսի երեքանկեան մը տարածութիւնը կ'ըլլայ = ½ կբ (77)։ Ուրեմն Ն կող ունեցող բազմանկեան մը տարածութիւնը կ'ըլլայ = $\frac{1}{2}$ բ· Նկ, այսինքն = է շրջապատին ու երեքանկեան կենդրոնէն քաշուած բարձրութեանը կէսին արդիւնքը։

131. Բոլորակի մը բոլորտիքը քաշուած բազմանկեան մը կողերը, բոլորակին մէջ քաշուած նման բազմանկեան կողերուն հետ այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ճառագայթը՝ ներքին բազմանկեան կողին վրայ կենդրոնէն ձգուած ուղղորդ գծին հետ կը համեմատի։

Ցուցում. Դիցուք թէ ԱԲ (Ձեւ 30) բոլորակին մէջ քաշուած կարգաւոր բազմանկեան մը կողն ըլլայ, Գփ ալ կենդրոնէն ԱԲ ին միջին կէտին վրայ ձգուած ուղղորդ գիծ մը, որն ալ ԳԱ ու ԳԲ երկընցած ճառագայթ-

Ձեւ 30.



ներուն մէջ դ ին վրայ շօշափող մը. այսպէս աբը բոլորակին բոլորտիքը քաշուած բազմանկեան կողը կ'ըլլայ ու կը համեմատի.

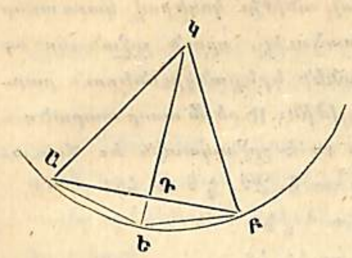
աբ : ԱԲ = Գա : ԳԱ = Գդ : ԳԴ (91 ու 89):

132. Կարգաւոր վեցանկեան մը կենդրոնի անկիւնը = 60° է (129). ուրեմն ԲԿԳ երեքանկեան մէջ (տես Ձեւ 29) Ա. ք + փ = 120° է, ասկէ կը հետեւի որ ամէն մէկը = 60° է, ուրեմն ԲԿԳ երեքանկիւնը հաւասարակող երեքանկիւն է (50). ասկէ ալ յառաջ կու գայ ԲԳ = ԲԿ կամ թէ ըսեմ կարգաւոր վեցանկեան կողին, բոլորտիքը քաշուած բոլորակին ճառագայթին հաւասար ըլլալը:

133. Բոլորակին մէջ քաշուած կարգաւոր վեցանկեան կողերէն, կրնայ հաշուուիլ նաեւ կարգաւոր երկոտասանանկեան կողերը, եւ ասով ալ քսանուչորսանկեան կողերը, եւ այլն:

Ինչու որ դիցուք թէ (Ձեւ 31) ԱԲը՝ կարգաւոր վեցանկեան մը մէկ կողը, եւ Կը բոլորտիքը քաշուած բոլորակին կենդրոնն ըլլայ: Պէտք է ԿԵ ուղղորդ գիծը ԱԲ էն անցընելով քաշել. ԱԵն ալ քաշելու է, ուստի ԱԵը բոլորակին մէջը քաշուած երկոտասանանկեան մէկ կողն է: Ուղղանկիւնի ԱԿԴ երեքանկեան մէջ՝ ԱԿ ներքնաձիգը՝ վեցանկեան կողին, եւ ԱԴ էջքն ալ վեցանկեան կողին կէսին հաւասար է: Ասկէ կրնայ ԿԴ գտնուիլ (79):

Ձեւ 31.



Դարձեալ ԿԵը վեցանկեան կողին հաւասար է: Ուստի ԴԵ = ԿԵ — ԿԴ կ'ըլլայ: ԱԴԵ ուղղանկիւն երեքանկեան ԱԴ ու ԴԵ էջքերէն ԱԵ ներքնաձիգը կը գտնուի կամ երկոտասանանկեան կողը:

Այս եղանակաւ կրնայ հաշուուիլ նաեւ քսանուչորսանկեան եւ քառասունութանկեան եւայլն կողերը:

134. Բոլորակին մէջ քաշուած կարգաւոր վեցանկեան, երկոտասանանկեան, քսանուչորսանկեան եւայլն կողերէն, նաեւ բոլորակին բոլորտիքը քաշուածներուն կողերն ըստ 131 համարին կրնան գտնուիլ: Որչափ աս հաշիւը յառաջ երթայ, այնչափ ալ բոլորակին մէջն եւ բոլորակին բոլորտիքը քաշուած շրջանակներուն տարբերութիւնը պզտիկ կ'ըլլայ, ուրեմն նաեւ այնչափ ալ բոլորակին բուն շրջանակին կը մերձենայ: Այս եղանակաւ կը գտնուի որ բոլորակին շրջապատին համեմատութիւնը կէս երկակտուրին հետ է = 6, 28 : 1, իսկ երկակտուրին հետ՝

= 3, 14 : 1 է

Աս 3, 14 թիւն առհասարակ ձով կը նշանակուի:

135. Կրնայ ճառագայթը ծով, երկակտուրը եով, շրջապատը շով, երեսաց տարածութիւնը փով նշանակուիլ. ուսկից աս ետեւի կանոնները յառաջ կու գան՝

Ա. շ = ձ. ե կամ շ = 2 ձ ծ (134)

Բ. $ե = \frac{շ}{ձ}$ կամ $ծ = \frac{շ}{2ձ}$ (Ա)

$$\text{Գ}.\ տ = Հ \cdot ճ^2 \ \text{կամ}\ տ = {}^1/_4\, Հ \cdot ե^2$$

Ինչու որ բոլորակն ալ անթիւ կողերով կարգաւոր բազմանկիւն մը կրնայ մտածուիլ, որուն շրջանակը = է շրջապատին, եւ կենդրոնէն երեքանկիւններուն բարձրութիւնը = է ճառագայթին: Ուրեմն ասոր տարածութիւնն ըստ 130 Համարին = է շրջապատին եւ ճառագայթին կէսին արդեանցը $= Հ \cdot 2ճ \cdot \frac{1}{2} ճ = Հճ^2$

դարձեալ՝ $ճ = {}^1/_2\, ե$

ուրեմն՝ $ճ^2 = {}^1/_4\, ե^2$

$$\text{Դ}.\ ճ = \sqrt{\frac{տ}{Հ}} \cdot \ \text{կամ}\ ե = \sqrt{\frac{տ}{{}^1/_4\, Հ}}\ (\text{Գ}):$$

136. Հարիւր երեսունուհինգ Համարին Գ թուէն կը հետեւի, որ բոլորակներն իրարու հետ իրենց կէս երկակտուրին կամ ճառագայթին չորեքկուսոյն պէս կը համեմատին: — Ասի նաեւ 95 Համարէն կրնայ յառաջ բերուիլ, ինչու որ ամէն բոլորակ իրարու նման է:

137. Բոլորակի հատածներուն վերաբերեալ քանի մը խնդիրներ:

ա) Երեք արդէն ծանօթ նոյն գծի վրայ չեղող կէտերուն վրայ բոլորակ մը քաշել (106 ու 107):

բ) Երկու արդէն ծանօթ գծերուն միջին համեմատական գիծը գտնել (116 ու 117):

գ) Բոլորակին եւ անկիւնաչափին միջոցաւ Ն կողերով կարգաւոր բազմանկիւն մը շինել (128, 129):

դ) Աղեղի մը երկայնութիւնը գտնել, որ Ն աստիճան ունենայ եւ ճառագայթը ծանօթ ըլլայ:

2• ՀԱՍՏԱՏԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Հարթ երեսներուն դիրքը կէտերուն, գծերուն ու հարթ երեսներուն համեմատութեամբ:

138. Թէ որ երես մը այնպիսի դիրք մ'ունենայ՝ որ ամէն նոյն երեսին մէկ կէտէն դէպ ի մէկալ կէտ ձգուած ուղիղ գծերն այն երեսին վրայ իյնան, Հարթ երես կ'անուանուի:

139. Երեք կէտեր միշտ նոյն հարթ երեսին վրայ կ'իյնան:

Ցուցում. Թէ որ երեք կէտերը նոյն ուղիղ գծին վրայ են՝ ան ատեն բանն արդէն ինք իրեն յայտնի է, իսկ եթէ նոյն ուղիղ գծի վրայ չեն՝ անոնց երկուքին մէջէն ուղիղ գիծ մը քաշելու է, եւ աս գծով հարթ երես մը շինելու է: Աս երեսն ուղիղ գծին վրայ իբր առանցքի մը վրայ կրնայ դարձուիլ. աս ընելու ժամանակ աս երեսը տեղ մը երրորդ կէտին ալ պիտ'որ պատահի:

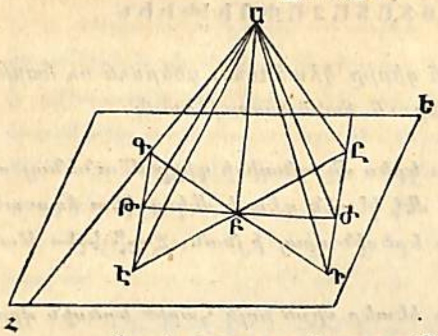
140. Ուրեմն նաեւ իրար կտրող երկու ուղիղ գծեր, մի եւ նոյն հարթ երեսին վրայ կ'իյնան:

141. Նոյն ուղիղ գծի վրայ չեղող երեք կէտեր, հարթ երեսին դիրքը կ'որոշեն. ինչու որ միայն մէկ դիրքի մէջ կրնայ հարթ երեսն (139) երրորդ կէտին հանդիպիլ:

142. Թէ որ ուղիղ գիծ մը՝ իրար կտրող երկու գծերուն վրայ ուղղորդ կենալու ըլլայ, այն երկու գծերուն հատման կէտէն անցնելով հարթ երեսին վրայ քաշուած ամէն ուղիղ գծերուն վրայ ալ ուղղորդ կը կենայ:

Ցուցում. Դիցուք թէ ՀՆ հարթ երեսին վրայ՝ ԳԴ ու ԷԸ (Ձեւ 32) երկու ուղիղ գծեր ըլլան. ԱԲՆ ալ ատոնց վրայ ուղղորդ կեցած ըլլայ. ԺԹ ուրիշ ուղիղ գիծ

Ձեւ 32.



մ'ըլլայ, որն որ Բ համման կէտէն անցած է։ Արդ պէտք է ԲԳ = ԲԴ, ԷԲ = ԸԲ ըննել, ուստի նաեւ ԱԳ=ԱԴ, ու ԱԷ =ԱԸ կ'ըլլայ (38 ու 39) եւ

1. △ ԳԲԷ ≅ △ ԸԲԴ (39 եւ 14)

ուրեմն նաեւ ԳԷ = ԸԴ եւ Ա· ԲԳԷ = Ա· ԲԴԸ. ասկէ յառաջ կու գայ՝

2. △ ԲԳԹ ≅ ԲԴԺ (40 եւ 14)

ուրեմն նաեւ ԹԳ = ԴԺ ու ԲԹ = ԲԺ. դարձեալ՝

3. △ ԱԳԷ ≅ ԱԴԸ (38.)

ուստի եւ Ա· ԱԳԷ = ԱԴԺ որով՝

4. △ ԱԹԳ ≅ ԱԴԺ (40 եւ Թիւ 2)

ուստի եւ ԱԹ = ԱԺ կը հետեւի։ Եւ որովհետեւ ԱԹ = ԱԺ, ԹԲ = ԺԲ (Թիւ 2) եւ ԱԲ = ԱԲ (առած) ապա ուրեմն նաեւ՝

5. △ ԱԲԹ ≅ ԱԲԺ (38)

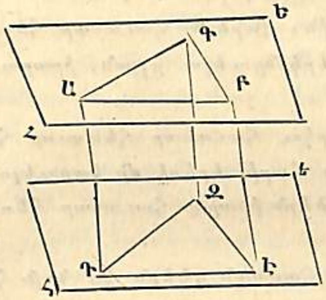
եւ ըստ հետեւորդի Ա· ԱԲԹ = Ա· ԲԺ, ուրեմն երկուքն ալ ուղիղ անկիւն են (7) եւ ԱԲը՝ ԹԺին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

143. Ան ուղիղ գծին համար՝ որ համման կէտէն անցնելով հարթ երեսին վրայ ինկող ամէն գծերուն վրայ ուղղորդ կը կենայ, կ'ըսուի որ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

Ուրեմն ուղիղ գիծ մը՝ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կեցած կ'ըլլայ, թէ որ հարթ երեսին միայն երկու ուղղորդ գծերուն վրայ ուղղորդ կենալու ըլլայ։

144. Երկու այլեւայլ հարթ երեսներու վրայ եղող անկիւններ, որ հաւասար հեռաւոր գծերով շինուած են, իրարու հաւասար են։

Ձեւ 36.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 36) այս երկու հարթ երեսները ՀԵ ու ՀԵ ըլլան, եւ ԱԲ ∥ ԴԷ ու ԱԳ ∥ ԴԶ ըլլայ. ուստի հիմայ պիտ'որ ցուցընենք որ ԲԱԳ = ԷԴԶ է։ Պէտք է ԱԲ = ԴԷ ու ԱԳ = ԴԶ ըննել, եւ ԳԲ, ԷԶ, ԱԴ, ԳԶ, ԲԷ ուղիղ գծերը քաշել. եւ որովհետեւ ԱԲ # ԴԷ է, ԱԲԴԷ չորեքանկիւնն ալ հաւասար հեռաւոր ձեւ մը կ'ըլլայ (59), ուրեմն նաեւ ԲԷ # ԱԴ է։ Նոյնպէս ԳԶ # ԱԴ է։ Ասկէ ալ կը հետեւի որ ԲԷ # ԳԶ է։ Ըստ այսմ ԳԲԶԷ հաւասար հեռաւոր ձեւ մըն է, ու ԳԲ = ԷԶ (56)։

Ուրեմն ԱԲԳ ու ԷԴԶ երեքանկիւններն իրարու պատշաճական են (38). ասկէ կը հետեւի որ նաեւ Ա· ԳԱԲ = ԷԴԶ է (41)։

145. Թէ որ ԱԴ, ԳԶ ու ԲԷ գծերն՝ ՀԵ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կենալու ըլլան, ան ատեն նաեւ ՀԵ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենան։

Ընդհանրապէս ՀԵ հարթ երեսին վրայ ամէն ուղղորդ գիծ, նաեւ նէ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ, եւ անոր հետ նոյն մեծութիւնն ունի։ Եւ որովհետեւ այս ուղղորդ գծերը, մէկ հարթ երեսէն դէպ ի ուրիշ հարթ երես ձգուած գծերէն ամէնէն կարճն են, անոր համար այս ուղղորդ գծերը՝ հարթ երեսներուն իրարմէ ունեցած հեռաւորութիւնը կը չափեն։

146. Երկու հարթ երեսներ՝ որ ամէն կողմանէ իրարմէ մի եւ նոյն հեռաւորութիւնն ունին, **հաւասար հեռաւոր երես** կը կոչուին։ Ուրեմն հաւասար հեռաւոր երեսներն որչափ ալ երկընցուելու ըլլան, իրարու չեն հանդիպիր։

147. Թէ որ երկու հաւասար հեռաւոր հարթ երեսներ՝ ուրիշ երրորդ հարթ երեսէ մը կտրուելու ըլլան, անոնց հատման գծերն իրարու հաւասար հեռաւոր կ՚ըլլան։

Ինչու որ երկու հատման գծերն ալ նոյն հարթ երեսին վրայ կ՚իյնան, եւ երբեք իրարու չեն հանդիպիր։

148. Այն հարթ երեսներն՝ որ իրարու հաւասար հեռաւոր չեն, թէ որ ըստ պատշաճի երկընցուելու ըլլան, ուղիղ գծի մը վրայ իրար կը կտրեն։ Այն անկիւնը՝ որն որ երկու հարթ երեսաց վրայէն հատման գծին մի եւ նոյն կէտին վրայ ուղղորդ ձգուած գծերով կը շինուի, այս երկու հարթ երեսներուն **Հակման անկիւնը** կը կոչուի։

149. Թէ որ հակման անկիւնն ուղիղ անկիւն մըն է, ան ատեն երկու հարթ երեսներն **իրարու վրայ ուղղորդ** կը կենան։

150. Թէ որ ուղիղ գիծ մը հարթ երեսին վրայ ուղղորդ է, ան ատեն նաեւ այն գծէն շինուած ամէն հարթ երեսները՝ նոյն հարթ երեսին վրայ ուղղորդ են։

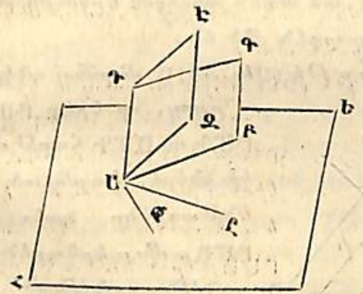
Ինչու որ աս հարթ երեսներուն հակման անկիւնն, ասոնց նկատմամբ միշտ ուղիղ անկիւն մըն է։

151. Եթէ հարթ երես մը ուրիշ հարթ երեսի վրայ ուղղորդ կենալու ըլլայ, ան ատեն հարթ երեսներէն մէկուն հատման գծին վրայ քաշուած ուղղորդ գիծն ալ ամբողջ միւս հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

Ինչու որ աս ուղղորդ գիծը (որովհետեւ երկու հարթ երեսներուն հակման անկիւնն ուղիղ անկիւն մըն է) (149) բաց ի հատման գծէն, նաեւ այն ուղղորդ գծին վրայ ուղղորդ կը կենայ, որ միւս հարթ երեսէն նոյն հատման գծին վրայ կը ձգուի (148). ուրեմն միւս հարթ երեսին վրայ եղող երկու գծերուն վրայ եւ ըստ հետեւորդի բոլոր այն երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ (143)։

152. Թէ որ երկու իրար կտրող հարթ երեսներ՝ ուրիշ հարթ երեսի մը վրայ ուղղորդ կենալու ըլլան, ասոնց հատման գիծն ալ երրորդ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ։

Ձեւ 37.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 37) ԱԳ ու ԱԷ երկու հարթ երեսներն՝ ՀԵ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կենան. ԱԴ ասոնց հասարակաց հատման գիծն ըլլայ, իսկ ԱԲ ու ԱԶ ալ ասոնց ու ՀԵ հարթ երեսին հատման գիծը։

Պէտք է ՀԵ երեսին մէջ ԱԲին վրայ ԹԱ ուղղորդ իսկ ԱՁԻՆ վրայ՝ ԸԱ ուղղորդ գիծը քաշել, ան ատեն ԹԱԸ՝ ամբողջ ԱԳ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ (151)․ ուրեմն նաեւ ԱԳ գծին վրայ ալ ուղղորդ կը կենայ․ իսկ ԸԱ ամբողջ ԱԷ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ, ուրեմն նաեւ ԱԳ գծին վրայ ալ ուղղորդ է։ Ուրեմն ԱԳ թէ ԱԹ ու թէ ԱԸ գծերուն վրայ ուղղորդ կը կենայ, եւ ըստ հետեւորդի ՀԵ հարթ երեսին վրայ ալ ուղղորդ է (143)։

Մարմնոյ անկիւններ։

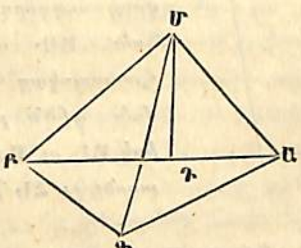
153. Եթէ երկուքէն աւելի ուղիղ գծեր, որոնցմէ միայն երկուքը մի եւ նոյն հարթ երեսին վրայ ըլլան, կէտի մը վրայ իրար կտրելու ըլլան, Մարմնոյ անկիւն կամ Անկիւնաւոր ծագ մը կը կազմեն։

Մարմնոյ անկիւն մը որչափ ուղիղ գիծ ունի, այնչափ հարթ անկիւններէ կը կազմուի։

154. Թէ որ մարմնոյ անկիւն մը երեք հարթ անկիւններէ կազմուած է, ան ատեն անոնցմէ երկուքը մէկտեղ առեալ՝ միշտ երրորդէն մեծ են։

Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 38) Մ մարմնոյ անկիւն մ'ըլլայ, որ երեք ԲՄԱ, ԲՄԳ ու ԱՄԳ հարթ անկիւններէ կազմուած է, ենթադրենք նաեւ որ ԲՄԱը միւս երկուքէն ալ առանձին առանձին մեծ ըլլայ։ Պէտք է ԲՄԳ = ԲՄԴ, ՄԳ = ՄԴ ընել, ու ԲԴԱ, ԲԳ, ԳԱ ուղիղ

Ձեւ 38.



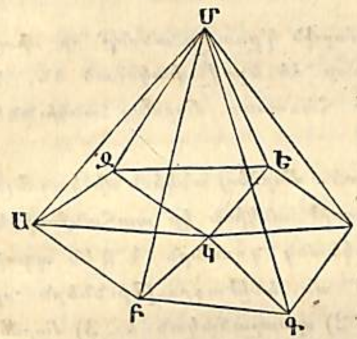
գծերը քաշել, ան ատեն △ ԲՄԳ ≅ ԲՄԴ (39)․ ուրեմն ԲԳ = ԲԴ է (41)․ բայց որովհետեւ՝

ԲԳ + ԳԱ > ԲԴ + ԴԱ (53) է, ուրեմն նաեւ ԳԱ > ԴԱ է։ Արդ ԳՄԱ ու ԴՄԱ երկու երեքանկեանց մէջ, ՄԱ = ՄԱ, ՄԳ = ՄԴ, բայց ԳԱ > ԴԱ է, ուրեմն ասկէ կը հետեւի որ նաեւ Ա․ԳՄԱ > ԴՄԱ է (54)։

Ասկէ ալ կը հետեւի որ ԲՄԳ + ԳՄԱ > ԲՄԴ + ԴՄԱ կամ ԲՄԳ + ԳՄԱ > ԲՄԱ է։

155. Մարմնոյ անկիւն մը կազմող հարթ անկիւններուն բովանդակութիւնը, 4 Ուէն պզտիկ է։

Ձեւ 39.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 39) Մ մարմնոյ անկիւն մ'ըլլայ, վեց հարթ անկիւններէ կազմուած. պէտք է ԱԲԳԴԵԶ հարթ երեսով անոր սրունքները կտրել. եւ աս երեսին վրայ ըստ կամի Կ կէտ մ'առնուլ, եւ ԿԱ, ԿԲ, ԿԳ եւայլն գծերը քաշել։

Մին քով եղող երեքանկիւններուն տասն'ութ անկիւնները, Կին քով եղող երեքանկիւններուն տասն'ութ անկեանց հաւասար են (28)։

Բայց որովհետեւ Ա․ ՄԲԱ + ՄԲԳ > ԿԲԱ + ԿԲԳ (154) է, կամ Մին քով եղող երեքանկեանց տասուերկու անկիւնները, Կին քով եղող երեքանկեանց տասուերկու անկիւններէն մեծ են, որոնք իրարու հետ

Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ վեց մարմնոյ անկիւնները կը կազմեն։

Անկէց կը հետեւի՝ որ այն երեքանկեանց միւս վեց անկիւնները, այս երեքանկեանց վեց անկիւններէն պզտիկ են. կամ՝ Մին քովն եղող անկիւնները՝ Կին քով եղող անկիւններէն պզտիկ են, անոր համար նաեւ 4 ՈԷն պզտիկ են (12)։

Կարգաւոր մարմիններ։

156. Կարգաւոր մարմին կ՚ըսուին անոնք՝ որ միայն պատշաճական կանոնաւոր ձեւերով փակուած են, եւ անկիւնաւոր ծագերնին հաւասար մարմնոյ անկիւններ ունին։

157. Իբր որովհետեւ մարմնոյ անկիւն մը կազմելու համար, գոնէ երեք հարթ անկիւն կը պահանջուի եւ անոր ամէն հարթ անկեանց գումարն 4 ՈԷն պզտիկ պիտ՚որ ըլլայ, ուրեմն ան ենթադրութիւններն որ, 1) ձեւերը կանոնաւոր, 2) պատշաճական եւ 3) մարմնոյ անկիւններն իրարու հաւասար պիտ՚որ ըլլան, զմեզ կարող կ՚ընեն (155) ամէն կարելի կարգաւոր մարմինները համրելու, որոնք հինգ տեսակ են։

1. Չորեքանիստ՝ որ չորս երեքանկիւններէ կազմուած է։

2. Խորանարդ կամ Վեցանիստ՝ որ վեց չորեքանկիւններէ կազմուած է։

3. Ութանիստ՝ որ ութ երեքանկիւններէ կազմուած է։

4. Երկոտասանանիստ՝ որ տասներկու հնգանկիւններէ կազմուած է։

5. Քսանանիստ՝ որ քսան երեքանկիւններէ կազմուած է։

Սղոցաձեւեր կամ Անկիւնաւոր սիւներ։

158. Սղոցաձեւ կամ Անկիւնաւոր սիւն կը կոչուի այն մարմինը, որ երկու պատշաճական եւ հաւասար հեռաւոր ձեւեր խարիսխ ունի, եւ խարսխին կողերուն չափ զուգահեռագծերէ սահմանաւորեալ է։

Թէ որ խարիսխներն ալ հաւասար հեռաւոր ձեւեր են, ան ատեն անկիւնաւոր սիւնը՝ Երկայնաձեւ խորանարդ կամ Զուգահեռանիստ կ՚անուանուի։

Անկիւնաւոր սիւնն երկու կը բաժնուի, Ուղիղ եւ Ծուռ։ Դարձեալ խարսխին կողերուն թուոյն համեմատ՝ անկիւնաւոր սիւնն Երեքկողեան, Չորեքկողեան, Հնգկողեան եւայլն կը կոչուի։ — Խորանարդն ալ (157 բ) զուգահեռանիստ տեսակ մըն է, որ 6 չորեքկուսի կողերէ կազմուած է։

159. Անկիւնաւոր սիւներն ամէն կողմ միօրինակ հաւասար թանձր են, այսինքն թէ որ խարսխին հետ հաւասար հեռաւոր երեսով մը կտրուելու ըլլան, հատման երեսները խարսխի երեսներուն պատշաճական կ՚ըլլան, ուրեմն նաեւ նոյն մեծութիւնը կ՚ունենան։

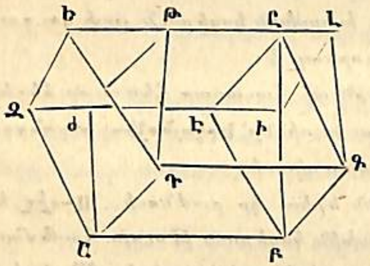
160. Սղոցաձոյ մարմնոյ մը մէջ հաւասար հեռաւոր հատածներով կտրուած մասերն անոնց պատշաճեալ կողերուն պէս իրարու հետ կը համեմատին։

161. Զուգահեռանիստ մը հակակայ կողերը, կրնան իբրեւ նոյն սղոցաձոյ մարմնոյն խարիսխները մտածուիլ։

162. Ամէն զուգահեռոտն կրնայ երկու պատշաճական երեքկողեան անկիւնաւոր սիւներու բաժնուիլ, ըստ ամենայնի այն եղանակաւ՝ որ եղանակաւ հաւասար հեռաւոր ձեւերն երկու պատշաճական երեքանկեանց կը բաժնուին:

163. Նոյն խարսխի վրայ կեցող եւ հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռոտները, հաւասար տարածութիւն ունին:

Ձեւ 40.



Ցուցում. Առաջին դէպք, թէ որ երկու երկայնաձեւ խորանարդներուն երկու կողերուն երեսները մի եւ նոյն հարթ երեսին վրայ կ'իյնան: Դիցուք թէ (Ձեւ 40) ԱԸՆ ու ԱԼՆ երկու նոյն ԱԳ խարսխին վրայ եղող երկայնաձեւ խորանարդներն ըլլան, եւ երկուքին ալ ԱԷ ու ԱԻ առջեւի կողին երեսները, նոյնպէս ԴԸ ու ԴԼ ետեւի կողին երեսները մի եւ նոյն հարթ երեսին վրայ իյնան:

Արդ ԱԹԶ երեքկողեան անկիւնաւոր սիւնը, ԲԼԷին հետ պատշաճական է: Թէ որ երկուքին վրայ ալ ԱԳԴԷԹ անկիւնաւոր սիւնն աւելցրնելու ըլլանք, կ'ըլլայ՝

Սղոցած ԱԹԶ + ԱԳԴԷԹ = ԲԼԷ + ԱԳԴԷԹ.

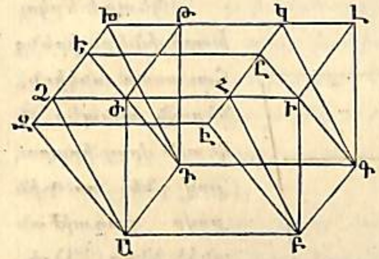
կամ թէ ըսեմ՝

Զուգահեռոտն ԱԸ = ԱԼ

Երկրորդ դէպք. Թէ որ երկու երկայնաձեւ խորա-

նարդներուն կողերուն երեսները՝ նոյն հարթ երեսին վրայ չեն իյնար: Դնենք որ (Ձեւ 41) այս երկու երկայնաձեւ խորանարդներն ըլլան ԱԸ ու ԱԼ: Պէտք է ԱԿ օգնիչ երկայնաձեւ խորանարդը գծել, որուն ԱԽ ու ԲԿ կողերուն երեսները, առաջիններին ԱԵ ու ԲԸ կողերուն երեսին հետ

Ձեւ 41.



եւ ԴԿ ու ԱՀ երեսները, երկրորդին ԴԼ ու ԱԻ կողերուն երեսներուն հետ նոյն հարթ երեսին վրայ կ'իյնան: Ուստի ըստ առաջին դէպքին.

Երկ. խոր. ԵԸ = ԱԿ

եւ Երկ. խոր. ԱԼ = ԱԿ

ապա ուրեմն նաեւ՝

Երկ. խոր. ԱԸ = ԱԼ:

164. Եթէ առաջին դէպքին մէջ (163) նոյն հարթ երեսին վրայ ինկող կողերուն երեսներն իբրեւ խարիսխ առնելու ըլլանք (161), ան ատեն հաւասար բարձրութեամբ երկու երկայնաձեւ խորանարդներ կ'ունենանք զուգահեռագծերու վրայ, որոնք նոյն խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւն ունին:

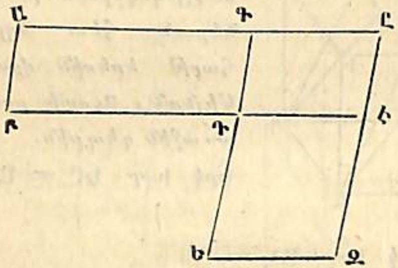
Ուրեմն ամէն հաւասար խարիսխ ու հաւասար բարձրութիւն ունեցող երկայնաձեւ խորանարդներն իրարու հաւասար են:

165. Հաւասար խարիսխ ու հաւասար բարձրութիւն ունեցող երկայնաձեւ խորանարդները, հաւասար ալ տարածութիւն ունին:

Ցուցում. Խարիսխները կամ հաւասարանկիւն են եւ կամ չեն։ Եթէ չեն՝ կրնայ երկայնաձեւ խորանարդներէն մէկուն տեղ ուրիշ մը գծուիլ (ըստ 164), որուն խարիսխը միւսին խարսխին հետ հաւասարանկիւն ըլլայ։

Դիցուք թէ (Ձեւ 42) ԱԴ ու ԴԶ հաւասարանկիւն խարիսխներն ըլլան։

Ձեւ 42.



Պէտք է երկու խարիսխներն իրենց հաւասար անկիւններուն այնպէս Դ կէտին վրայ իրարու քով դնել, որ Դին քովը գագաթման անկիւններ (13) չինուին, եւ այնպէս ԲԴԷ եւ ԵԴԳ ուղիղ գծեր ըլլան։

Արդ երկու երկայնաձեւ խորանարդներն կամ դէպ ի խարիսխ հաւասար հակում ունին եւ կամ չունին։ Եթէ չունին՝ երկայնաձեւ խորանարդներէն մէկուն տեղ կրնայ (ըստ 163) ուրիշ մը դրուիլ, որ միւսին հետ նոյն հակումն ունենայ։

Պէտք է ԱԳն ու ԶԷն երկընցընել մինչեւ որ Ըին վրայ իրար կտրեն, եւ այնպէսով ԳԴԷԸ հաւասար հեռաւոր ձեւ մը կ՚ըլլայ։ Կրնայ անոր վրայ երկայնաձեւ խորանարդ մը շինուիլ, որ մէկալ երկուքին խարսխին հետ հաւասար հակում ունենայ։ Ան ատեն ԱԴ ու ԳԷին վրայ եղած երկայնաձեւ խորանարդներուն երկուքը մէկտեղ միջ երկայնաձեւ խորանարդ մը կը շինեն, եւ կ՚ըլլայ (160).

Երկ. խոր. որ ի վերայ ԱԴ։ Երկ. խոր. ի վերայ ԳԷ = ԱԴ։ ԳԷ. դարձեալ՝

Երկ. խոր. որ ի վերայ ԴԶ։ Երկ. խոր. որ ի վերայ ԳԷ = ԴԶ։ ԳԷ. ասկէ կը հետեւի որ՝

Երկ. խոր. որ ի վերայ ԱԴ = Երկ. խոր. որ ի վերայ ԴԶ (Ա. 103)։

166. Թէ որ խորանարդի մը կողերը = 1 դնելու ըլլանք, ան ատեն անոր խարիսխը կ՚ըլլայ = 1.1 = 1, եւ խարսխին բարձրութեանը հետ ունեցած արդիւնքը 1.1.1 = 1։ Դիցուք թէ ուրիշ սլոցաձոյ մարմնոյ մը խարիսխը = Խ ըլլայ, բարձրութիւնն ալ = Բ, ան ատեն կ՚ըլլայ (167).

Խոր։ Սլոց. = 1։ ԽԲ.

ուրեմն սլոցաձը՝ ԽԲ խորանարդն իւր մէջը կը բովանդակէ։

Ինչպէս որ հարթաչափութեան մէջ երեսները չափելու համար չորեքկուսին կը գործածուի (73), տանկ ալ հաստատաչափութեան մէջ մարմինները չափելու համար խորանարդն իբրեւ միութիւն կ՚առնուի։

167. Սլոցած մը չափելու համար, պէտք է իբրեւ միութիւն առնուած խորանարդին կողովը թէ բարձրութիւնն եւ թէ խարիսխը չափել, ու ելած թուերն իրարու հետ բազմապատկել. ելած արդիւնքը խորանարդին սլոցածին ունեցած համեմատութիւնը կը ցուցընէ։

Համառօտիւ բացատրելու համար. Պէտք է խարիսխը բարձրութեան հետ բազմապատկել։

168. Ուրեմն խորանարդներն իրարու հետ իրենց կողերուն խորանարդին պէս կը համեմատին։

169. Այս որովհետեւ բոլորակն՝ անհամար շատ եւ անհնարին փոքր կողեր ունեցող բազմանկիւն մը կրնայ մտածուիլ, անոր համար կրնայ նաեւ ըլլալ որ սլոցածի

մը խարիսխները բոլորակներ ըլլան։ Այն ատեն աս սղոցածն անհնարին նեղ հաւասար հեռաւոր ձեւերով կողեր կ՚ունենայ, որոնց գումարն ամէնը մէկէն նոր երես մը կը շինէ։ — Այն սղոցածոյ մարմինը՝ որուն խարիսխը բոլորակ է, **Գլան** կ՚անուանուի։ Այն ուղիղ գիծը՝ որն որ երկու բոլորակներուն կեդրոններն իրարու հետ կը կապէ, **Առանցք գլանի** կը կոչուի։ Եւ ասոր ուղիղ կամ ծուռ ըլլալուն համեմատ, գլանն ալ **ուղղորդ** կամ **ծուռ** կ՚անուանուի։

170. Ինչ որ սղոցածոյ մարմնոց համար ըսուեցաւ, նոյնը գլանի համար ալ կ՚արժէ։

171. Ուղղորդ գլանի մը կոր երեսը՝ հաւասար է այնպիսի ուղղանկեան մը, որուն խարսխին գիծը հաւասար է խարսխի երեսին շրջապատին, եւ բարձրութիւնն ալ հաւասար է գլանին բարձրութեանը։

172. Երկու հաւասար խարիսխ ու հաւասար բարձրութիւն ունեցող մարմիններ իրարու հաւասար կ՚ըլլան, թէ որ անոնց ամէն մէկ խարսխին հաւասար հեռաւոր ու խարսխէն հաւասար բարձր կտրուածքներն իրարու հաւասար ըլլան։

Ցուցում. Երկու հաւասար հեռաւոր հատածներու մէջ եղող ամէն մարմին, այնչափ աւելի ուղղութեամբ իբրեւ սղոցած կրնանք մտածել, որչափ այս հատածներուն իրարմէ ունեցած հեռաւորութիւնը պզտիկ է։ Եւ արգելք մը չկայ աս հեռաւորութիւնն ուզածնուս չափ փոքր մտածելու։

Ուրեմն կրնանք աս երկու մարմինները՝ հաւասար հեռաւոր հատածներով անհամար սղոցածներու բաժնել, այնպէս որ միշտ մարմիններէն մէկուն սղոցածը միւսին մէջ եղող կշռեալ սղոցածին հաւասար խարիսխ

եւ հաւասար ալ բարձրութիւն ունենայ, ուստի նաեւ միւսին հետ ալ հաւասար մեծութիւն ունենայ (166)։ Ուրեմն մարմիններէն մէկուն սղոցածներուն գումարը, միւսին սղոցածներուն գումարին հաւասար է. ըստ հետեւորդի երկու մարմիններն ալ իրարու հաւասար են։

Ծանօթութիւն. 1. Աս կանոնն առաւելապէս բարձրագոյն երկրաչափութեան մէջ կը գործածուի։ Մենք ասիկայ ետեւի երկու հատուածներուն մէջ մեծ օգտիւ պիտ՚որ գործածենք։

Ծանօթութիւն. 2. Հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռագծերուն հաւասարութենէն (65), հարթ ձեւերուն հաւասարութեան համար ալ նման կանոն մը կը հետեւի։ Երկու ձեւ իրարու հաւասար կ՚ըլլան, թէ որ իրենց հաւասար հեռաւոր հատածոյ գծերը, որոնք խարսխէն հաւասար հեռաւորութեամբ առնուած են, իրարու հաւասար ըլլան։

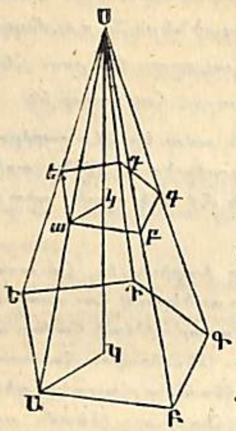
Բուրգ։

173. **Բուրգ** կ՚ըսուի ան մարմինն՝ որ մէկ ուղղագիծ խարսխի երես ունի, եւ սուր գագաթի մը վրայ ժողվուող այնչափ երեքանկիւններով կողի երեսներէ սահմանաւորուած է, որչափ խարսխի երեսը կողեր ունի։

174. Եթէ բուրգ մը խարսխին հետ զուգահեռական կտրուելու ըլլայ, ան ատեն հատման երեսը խարսխի երեսին նման կ՚ըլլայ։

Ցուցում. Դնենք թէ ԱԲԳԴԵՍ բուրգ մըն է, աբգդեն ալ հատած մը՝ որ ԱԲԳԴԵ խարսխին հետ զուգահեռական է, ուստի երկու ձեւերուն համանուն գծերն ալ զուգահեռական են (147), եւ ըստ հետեւորդի

Ձեւ 43.



նաեւ համանուն անկիւնները հաւասար են (144)։ Դարձեալ՝

$$\left.\begin{array}{l}\text{ՄԱ} : \text{Մա} = \text{ԱԵ} : \text{աե} \\ \text{ՄԱ} : \text{Մա} = \text{ԱԲ} : \text{աբ}\end{array}\right\} 91$$

ապա ուրեմն նաեւ՝

ԱԵ : աե = ԱԲ : աբ (Ա. 104).

Այս եղանակաւ ձեւոյ մը ամէն կողերուն համար ալ կրնայ ցուցուիլ, որ միւս ձեւոյն մէջ եղած համանուն կողերուն հետ համեմատական են։ Եւ առով նաեւ երկու ձեւոց իրարու նման ըլլալը կը ցուցուի (87).

175. Բրգան մը երկու զուգահեռական հատման երեսները՝ իրենց գագաթէն ունեցած հեռաւորութեանցը չորեքկուսիներուն պէս իրարու կը համեմատին։

Ցուցում. Դիցուք թէ (վերը դրուած ձեւոյն մէջ) ՄԿը՝ ԱԲԳԴԵ խարսխին վրայ ուղղորդ ըլլայ. ուրեմն այս գիծը կ կէտէն անցնելով նաեւ աբգդե երեսէն ալ ուղղորդ կ'անցնի (145)։ Պէտք է ԿԱն ու կաը քաշել, եւ ան ատեն երկուքն ալ իրարու զուգահեռական կ'ըլլան (147)։

Ուրեմն՝

ՄԱ : Մա = ՄԿ : Մկ (89)

դարձեալ՝

ՄԱ : Մա = ԱԲ : աբ (91)

ուրեմն նաեւ՝

ՄԿ : Մկ = ԱԲ : աբ (Ա. 104)

եւ ըստ հետեւորդի՝

$\text{ՄԿ}^2 : \text{Մկ}^2 = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2$ է (Ա. 98)

Բայց որովհետեւ նաեւ՝

$\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{աբգդե} = \text{ԱԲ}^2 : \text{աբ}^2$ (94)

ուրեմն նաեւ՝

$\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{աբգդե} = \text{ՄԿ}^2 : \text{Մկ}^2$ (Ա. 104).

ԱԲԳԴԵ խարսխին տեղ կրնար ուրիշ հատածոյ երես մ'առնուիլ։

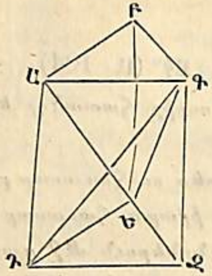
176. Հաւասար խարսխի երես ու հաւասար բարձրութիւն ունեցող բրգունքներն, իրարու հաւասար են։

Ցուցում. Այս երկու բրգունքներուն մէջ գագաթէն հաւասար հեռաւորութեամբ, եւ խարսխին հետ զուգահեռական հատման երես մ'առնելու է, ան ատեն երկու բրգունքներուն ալ խարիսխները, եւ այն խարիսխներուն ալ զուգահեռական հատման երեսները, իրենց գագաթէն ունեցած հեռաւորութեան չորեքկուսույն հետ նոյն համեմատութիւնն ունին (177). ուրեմն նաեւ իրարու հետ ալ նոյն համեմատութիւնն ունին (Ա. 104). Ինչու որ այս երկուքին ալ գագաթէն ունեցած հեռաւորութիւնը հաւասար է։ Եւ որովհետեւ երկուքին մէջն ալ խարսխի երեսներն իրարու հաւասար են, ուրեմն նաեւ հատածոյ երեսներն հաւասար են (Ա. 91). բայց հաւասար բարձրութիւն ունեցող բրգունքներուն մէջ՝ գագաթէն հաւասար հեռաւորութիւնը, նաեւ խարսխին վրայ ալ հաւասար բարձրութիւն կու տայ։

Ուրեմն երկու հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունեցող մարմիններ, խարսխէն հաւասար հեռաւոր կտրելով հաւասար ալ հատման երեսներ կ'ունենան, եւ ըստ հետեւորդի նաեւ իրարու ալ հաւասար կ'ըլլան (174)։

177. **Ամէն** երեքկողեան ողոցած՝ կրնայ երեք հաւասար երեքկողեան բրգունքներու բաժնուիլ:

Ձեւ 44.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 44) այն ողոցածը՝ որ երեք հաւասար բրգունքներու պիտի բաժնուի ԱԲԳԴԵԶ ըլլայ, ու երեք բրգունքներն ԱԲԳԵ, ԴԵԶԳ, ու ԱԳԴԵ ըլլան: Առնցմէ երկուքը ԱԲԳԵն ու ԴԵԶԳը, նոյն բարձրութիւն ու խարիսխ ունին, ուրեմն նաեւ իրարու մէջ ալ խարիսխնին ու բարձրութիւննին հաւասար է, եւ ըստ հետեւորդի նաեւ իրարու հաւասար են (178):

Կրնայ այնպէս մտածուիլ որ ԴԵԶԳ ու ԱԳԴԵ բրգունքներուն խարիսխները՝ ԴԳԶ ու ԴԳԱ ըլլան, եւ ան ատեն երկու բրգունքներն Ե կէտին վրայ նոյն գագաթը կ'ունենան: Եւ որովհետեւ ԴԳԶ = ԴԳԱ է (55), ուրեմն նոյն խարիսխն եւ նոյն բարձրութիւն ունին եւ ըստ հետեւորդի իրարու հաւասար են:

Ուրեմն աս երեք բրգունքներն իրարու հաւասար են:

178. **Ուրեմն** երեքկողեան բուրգ մը՝ իրեն հետ նոյն խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւն ունեցող ողոցածին երեքին մէկն է:

179. **Եւ** որովհետեւ ամէն բազմակողեան ողոցած եւ ամէն բազմակողեան բուրգ, երեքկողեան բրգան կամ ողոցածին հաւասար է, որոնք անոնց հետ նոյն հաւասար խարիսխ ու բարձրութիւն ունին, անոր համար

ընդհանրապէս այս կանոնը կրնայ տրուիլ. այսինքն ամէն բուրգ՝ երեք մասին մէկն է ողոցածի մը, որ բրգան հետ հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունի:

182. **Բուրգ մը չափելու համար**՝ պէտք է անոր խարիսխը բարձրութեան հետ բազմապատկել, եւ արդիւնքն 3ի վրայ բաժնել:

183. **Թէ** որ բրգան մը խարսխի երեսը բոլորակ ըլլայ, երեքանկիւնի կողերու երեսներն անհնարին պզտիկ կ'ըլլան, եւ ամէնը մէկտեղ կոր կողի երես մը կը կազմեն: Այս տեսակ բրգաձեւ մարմին մը **Կոն** կը կոչուի: — Այն ուղիղ գիծը՝ որ կոնին գագաթէն խարսխին կենդրոնին վրայ կը քաշուի, **կոնին առանցքը** կ'անուանուի. իսկ այն գիծը՝ որ գագաթէն խարսխին շրջապատին մէկ կէտին վրայ կը ձգուի՝ **կոնին կողը** կ'անուանուի: — Առանցքին խարսխին վրայ կեցած դիրքին համեմատ՝ կոնն ալ **ուղղորդ** կամ **ծուռ** կ'անուանուի:

184. **Ինչ** որ բրգան վրայ ըսուեցաւ, նոյնն ի մասնաւորի կոնին համար ալ կ'արժէ:

185. **Ուղղորդ** կոնի մը կոր երեսը = է բոլորակի մը բաժանածին, ճառագայթը = է կոնին կողին, աղեղն ալ = է խարսխի երեսաց շրջապատին:

Գունդ:

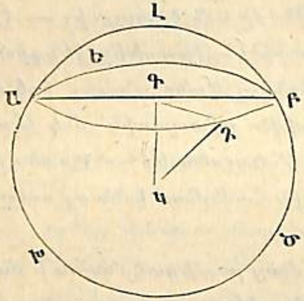
186. **Այն** մարմինը՝ որուն երեսին ամէն մէկ կէտը, ներքին հաստատուն կէտէ մը հաւասար հեռու է, **Գունդ** կ'անուանուի: Այս անունները **ճառագայթ** կամ **Կէս տրամագիծ**, **Տրամագիծ**, **Հատեալ գունդ** եւ **Հատուած գունդ** ըստ ամենայնի ան կը նշանակեն, ինչ

որ բոլորակի մէջ կը նշանակէին։ Երկու հաւասար հեռաւոր կտրուածքներուն մէջ եղող գնդի մը երեսաց մասը, Գօտի գնդի կը կոչուի։

187. Մի եւ նոյն գնդին ամէն ճառագայթներն իրարու հաւասար են։

188. Թէ որ գունդ մը հարթ երեսով կտրուելու ըլլայ, ան կտրուածքին երեսը միշտ բոլորակ մը կ'ըլլայ։

Ձեւ 42.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 42) ԽԾԼը գունդ մ'ըլլայ, Կ անոր միջնակէտը եւ ԱԳԲԵԱ ալ ըստ կամի կտրուածք մը։ Պէտք է կտրուած երեսին վրայ Կ կենդրոնէն ԿԳ ուղղորդ գիծը քաշել, եւ ԱԲԴԵԱ շրջապատին վրայ ալ ըստ կամի Դ կէտ մ'առնուլ, ԿԴ ճառագայթն ու ԳԴ ուղիղ գիծը քաշելով, ԳԿԴ ուղղանկիւն երեքանկիւն մը կ'ըլլայ, ուրեմն նաեւ ըստ Պիւթագորեան կանոնին (79).

$$ԳԴ^2 + ԳԿ^2 = ԿԴ^2$$

ուրեմն նաեւ (առած) $ԳԴ^2 = ԿԴ^2 - ԳԿ^2$

եւ $$ԳԴ = \sqrt{(ԿԴ^2 - ԳԿ^2)}$$

Դ կէտը՝ կտրուածքը երեսին շրջապատին որ կողմը դնելու ըլլանք, միշտ ԳԴ մի եւ նոյն մեծութիւնը կ'ունենայ, ինչու որ ԳԿ ու ԴԿ միշտ նոյն կը մնան։ Ուրեմն Գը բոլորակին կենդրոնն է, ԳԴ ճառագայթը եւ նոյն իսկ կտրուածքը բոլորակ մըն է։

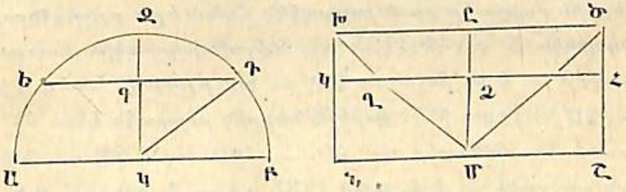
189. Որչափ ԳԿ պզտիկ առնուելու ըլլայ, այնչափ

ԳԴ մեծ կ'ըլլայ, այսինքն որչափ կտրուածքը կենդրոնին մօտ կ'ըլլայ՝ այնչափ բոլորակը մեծ կ'ըլլայ։

190. Կտրուածքն ան ատեն ամէնէն մեծ կ'ըլլայ, երբ որ ճիշդ գնդին կենդրոնէն կ'անցնի, ինչու որ ան ատեն գնդին հետ հաւասար ճառագայթ կ'ունենայ։ Կենդրոնէն անցնող ամէն կտրուածքներն իրարու հաւասար են, եւ Մեծ բոլորակ գնդի կը կոչուին։

191. Գունդը հաւասար է գլանի մը $^2/_3$ին, որ գնդին հետ հաւասար երկակտուր եւ երկակտրոյն հաւասար բարձրութիւն ունի։

Ձեւ 43.



Ցուցում. Դիցուք թէ (Ձեւ 43) ԱԶԲը կիսագնդի մը կտրուածքն ըլլայ, եւ ԽԾՆՀ ալ գլանի մը կտրուածքը՝ որն որ կիսագնդին հետ հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունի։ Դարձեալ մտածենք որ գլանէ կոն մը կտրուած ըլլայ, որն որ դարձեալ գլանին հետ հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունենայ, եւ ըստ հետեւորդի գլանին երրորդ մասին հետ հաւասար ըլլայ (184, 179). արդ կը մնայ ՆԽՄԾՀ մարմին մը, որ գլանին $\frac{2}{3}$ն իր մէջը կը բովանդակէ։ Ուստի հիմայ կիսագնդին ու մարմնոյն հետ հաւասար ըլլալը ցուցուած կ'ըլլայ, եթէ ցուցընելու ըլլանք որ ամէն կըտրուածքներն, որ թէ կիսագնդէն ու թէ գլանէն հաւասար բարձրութեամբ կտրուած են, իրարու հաւասար են (172)։

Կիսագնդէն անցնող ամէն կտրուածք՝ բոլորակ մըն է (188), իսկ այն կտրուածքն՝ որ կոնը հանուած գլանէն կ՚անցնի՝ մանեկաձեւ երես մըն է։ Դիցուք թէ ԿԴ ու ՄՉ երկուքին ալ խարսխին վրայ ունեցած հաւասար բարձրութիւնն ըլլայ, եւ աս ալ = բ ըլլայ, իսկ գնդին ու գլանին ճառագայթները = ճ։ Եւ դարձեալ կոնին Մ գագաթը գլանին խարսխին միջին կէտին վրայ ըլլայ, եւ ՄԸ ալ անոր առանցքը։

Մանեկին տարածութիւնը կը գտնուի, թէ որ ներքին բոլորակը դրսի բոլորակէն հանուելու ըլլայ։ Դրսի բոլորակն է = Հճ^{2} (135 դ)։ Ներսի բոլորակին ճառագայթը = է բ. ինչու որ ՄԸ = ԽԸ ըլլալով, նաեւ ՂՉ = ՉՄ (91) = բ է։ Ուրեմն ներքին բոլորակն է = Հբ^{2}, ուստի եւ մանեակը = Հճ^{2} — Հբ^{2} = Հ (ճ^{2} — բ^{2}). իսկ բոլորակը = է Հ. ԳԴ^{2} (135 դ) = Հ (ԿԴ^{2} — ԳԿ^{2}) ապա ուրեմն նաեւ = Հ (ճ^{2} — բ^{2})։

Ուստի եւ աստի կը հետեւի՝ որ բոլորակը միշտ մանեակին հետ հաւասար է։

Ուրեմն նաեւ կիսագունդն այնչափ մեծ է, որչափ գլանին $^{2}/_{3}$ մասը բովանդակող մարմինը մեծ է։

Եւ ըստ հետեւորդի բոլոր գունդն է $^{2}/_{3}$ մասն գլանի մը, որ գնդին հետ հաւասար երկակտուր եւ հաւասար բարձրութիւն ունի։

192. Թէ որ գնդի մը ճառագայթը ճով նշանակելու ըլլանք, ան ատեն գլանին խարիսխը = Հճ^{2} կ՚ըլլայ, բարձրութիւնն ալ = 2ճ. ուրեմն գլանին խորանարդ

տարածութիւնը = 2Հճ^{3}, եւ ըստ հետեւորդի գնդին խորանարդ տարածութիւնը = $^{4}/_{3}$Հճ^{3}։

193. Ամբողջ գունդը կրնայ իբրեւ անհամար փոքր բրգանց բովանդակութիւն մը մտածուիլ, որոնց խարսխի երեսներն ի միասին՝ գնդին երեսը կը կազմեն, եւ որոնց գագաթները գնդին կեդրոնը կը միանան. անոր համար ալ անոնց բարձրութիւնը ճառագայթին հաւասար է։

Ուստի ինչպէս որ գնդին երեսը՝ ճառագայթին երրորդ մասին հետ բազմապատկելով՝ գնդին խորանարդ տարածութիւնը կը գտնուի (182), նոյնպէս ալ ասոր հակառակ գնդին խորանարդ տարածութենէն անոր վերին երեսը կը գտնուի, թէ որ աս տարածութիւնը ճառագայթին երրորդ մասին վրայ բաժնուելու ըլլայ։ Ուստի ընդհանրապէս գնդին երեսաց տարածութիւնը կ՚ըլլայ.

= $^{4}/_{3}$ Հճ^{3} : $^{1}/_{3}$ ճ = 4 Հճ^{2}

194. Ուրեմն գնդին երեսն իր մեծ բոլորակէն չորս անգամ մեծ է (190)։

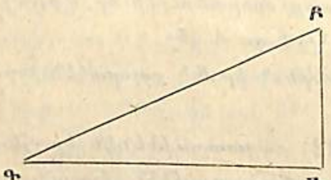
195. Ա՛ս $^{4}/_{3}$ Հճ^{3} (192) բացատրութենէն կը հետեւի, որ գնդերն իրենց ճառագայթին խորանարդթուերուն պէս իրարու կը համեմատին։

Բ· ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Երեքանկիւնները չափել:

196. Երկրաչափութիւնը ճամբայ ցուցուց ԲԱԳ ուղղանկիւն երեքանկեան մէջ Գ անկեան ամէն մէկ մեծութեանը համար, երեքանկեան երեք կողերուն համեմատութիւնը բաղձացուածին չափ ճշդութեամբ թուով բացատրելու:

Ձեւ 44.



Ինչպէս (Ձեւ 44) օրինակի համար, ըսենք որ Գ $=30^0$ ըլլայ, ան ատեն Բ $= 60^0$ կ'ըլլայ, ուրեմն ԱԲԸ հաւասարակող երեքանկեան մը խարսխին կէսն է, որուն բարձրութիւնը ԳԱ է, իսկ կողը ԲԳ: Եւ ըստ հետեւորդի ԲԱ $=\frac{1}{2}$ ԲԳ է, եւ որովհետեւ $\text{ԳԱ}^2 = \text{ԲԳ}^2 - \text{ԲԱ}^2$ (79) $= \text{ԲԳ}^2 - \frac{1}{4}\,\text{ԲԳ}^2 = \frac{3}{4}\,\text{ԲԳ}^2$, ուրեմն $\text{ԳԱ} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\text{ԲԳ}^2\right)} = \text{ԲԳ}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$ է:

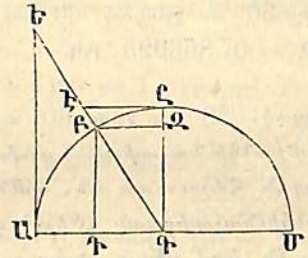
Ուրեմն ուղղանկիւն երեքանկեան մը, որուն անկիւններէն մէկը $= 30^0$ է, երեք կողերն իրարու հետ միշտ 1, $\frac{1}{2}$ ու $\sqrt{\frac{3}{4}}$, կամ 1, 0,5 ու 0,866025 թուերուն պէս կը համեմատին:

Ուրիշ դէպքերու մէջ ուղղանկիւն երեքանկեան երեք կողերուն համեմատութիւնը՝ թէպէտ ոչ այնպէս

դիւրաւ, սակայն ասոր պէս ճիշդ կը գտնուի (տես 215 ծանօթ.):

197. Աս համեմատութեան թուերն՝ երեքանկիւնները հաշուելու դիւրութեամբ գործածելու համար, հնարուած են Եռանկիւնաչափական գծերը:

Ձեւ 45.



Դնենք որ (Ձեւ 45) ԱԸՄ կէս բոլորակ մ'ըլլայ, ԱԳԲ ալ ըստ կամի սուր անկիւն մը, եւ ԲԴ, ԵԱ եւայլն գծերն ալ ուղղորդ քաշուած ըլլան, ան ատեն ԲԴ՝ Ծոց, ԵԱ՝ Շօշափող, ԳԵ՝ Հատանող ԱԳԲ անկեան կ'անուանուի: Նոյնպէս ԲԳԸ անկեան մէջ, ԲԶ՝ Ծոցը, ԷԸ՝ Շօշափողն եւ ԳԷ՝ Հատանողն է:

Երկու ԱԳԲ ու ԲԳԸ անկիւնները, որոնք մէկզմէկ լրացընելով ուղիղ անկիւն մը կը շինեն, Լրման անկիւն կը կոչուին: Լրման անկեան ծոցը, շօշափողն ու հատանողը ծանօթ անկեան Ծոցակիցը, Ի մօտէն շօշափողը եւ Ի մօտէն հատանողը կ'անուանուին: Ուստի ԲԶ = ԴԳ ԱԳԲ անկեան Ծոցակիցն է, եւ այլն. ԱԴն ալ՝ ԱԳԲին Շրջեալ ծոցը կ'անուանուի:

198. ԱԳ ճառագայթն որչափ ալ մեծ ըլլայ, սա–

կայն եւ այնպէս նոյն անկեան համար ամէն երեքանկիւնաչափական գծերն իրարու եւ ճառագայթին մէջ որոշ համեմատութիւն մ'ունին։ Հասարակօրէն ճառագայթը = 1 կը դրուի, եւ միւս երեքանկիւնաչափական գծերն ալ 1ին համեմատական թուերով կը նշանակուին։ Ինչպէս, օրինակի համար, թէ որ ԲԳԸ = 30° դնելու ըլլանք, ան ատեն նաեւ ԲԴ = ½ ԲԳ (196) կ'ըլլայ. ուրեմն՝

Ծոց 30° = Ծոցակ. 60° = 0, 5

եւ ԳԴ = 0, 866025. ԲԳ

ուրեմն՝

Ծոցակ. 30° = Ծոց 60° = 0.866025...։

199. Երեքանկիւնաչափական տախտակներուն մէջ՝ ուր ասոնք արդէն հաշուուած են, ամէն սուր անկիւններուն երեքանկիւնաչափական գծերը՝ վայրկենէ վայրկեան կը գտնուին, կամ միայն անոնց ղոգարիթմները կը գտնուին, որովհետեւ երեքանկիւնաչափական հաշիւներն ըստ մեծի մասին ղոգարիթմով համառօտ կ'ըլլան։ Ուստի աս տախտակներուն միջնորդութեամբ՝ ամէն մէկ ուղղանկիւն երեքանկեան երկու ծանօթ կտորներէն, պարզ համեմատութեան օրինակով մը մնացեալ մասերը կը գտնուին (տես 37 ծանօթ.)։

1. *Օրինակ.* ԲԳ կողով ու Գ անկիւնով ԱԲը գտնել (Ձեւ 44)։

Որովհետեւ՝

ԲԳ:ԱԲ=1: Ծոց Գ

ուրեմն՝

ԱԲ = ԲԳ. Ծոց Գ (Ա. 8)

եւ կամ՝

Ղոգ. ԱԲ = Ղոգ. ԲԳ + Ղոգ. Ծոց Գ (Ա. 114)։

2. *Օրինակ.* ԱԳով ու ԱԲով՝ Գ անկիւնը գտնել։

Որովհետեւ՝

ԱԳ : ԱԲ = 1 : Շօշ. Գ

ուրեմն՝

$$\text{Շօշ. Գ} = \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԳ}} \ (\text{Ա. } 88)$$

կամ՝

Ղոգ. Շօշ. Գ = Ղոգ. ԱԲ — Ղոգ. ԱԳ (Ա. 115)

3. *Օրինակ.* ԱԲ ու ԲԳով՝ Բ անկիւնը գտնել։

Որովհետեւ՝

ԲԳ : ԱԲ = 1 : Ծոցակ. Բ

ուրեմն՝

$$\text{Ծոցակ. Բ} = \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԳ}}$$

կամ՝

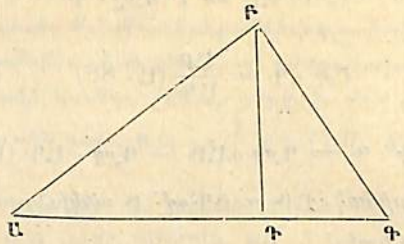
Ղոգ. Ծոցակ. Բ = Ղոգ. ԱԲ — Ղոգ. ԲԳ։

Ծանօթութիւն. Ուղղանկիւն երեքանկեան երկու կողերէն՝ երրորդ կողը գտնելու համար, Պիւթագորեան կանոնը (79 ծանօթ.2) կը գործածուի։ Անոր համար երեքանկիւնաչափական տախտակներու հարկաւորութիւն չկայ։

200. Դարձեալ՝ երեքանկիւնաչափական տախտակներուն միջնորդութեամբն ամէն մէկ ծռանկիւն երեքանկեան երեք ծանօթ մասերովը, որոնց մէջ առ առաւելն երկու անկիւն ըլլան (37 ծան.), մնացած մասերը հաշուով կրնան գտնուիլ։ Ասոր վերաբերեալ գլխաւոր դէպքերուն լուծումը, ետեւի ընդհանուր ձեւերուն մէջ կը գտնուի։

201. Ամէն երեքանկեան մէջ՝ կողերն իրարու հետ այնպէս կը համեմատին, ինչպէս հակակայ անկեանց ծոցերը։

Ձեւ 46.



Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 46) ԲԴ, ԱԳին վրայ ուղղորդ կեցած ըլլայ, ուստի

$$\text{ԱԲ} : \text{ԲԴ} = 1 : \text{Ծոց Ա}$$

եւ

$$\text{ԲԴ} : \text{ԲԳ} = \text{Ծոց Գ} : 1$$

ուրեմն նաեւ՝ (Ա 96)

$$\text{ԱԲ} : \text{ԲԳ} = \text{Ծոց Գ} : \text{Ծոց Ա}$$

202. Դիւրութեան համար՝ Ա, Բ, Գ անկիւններուն հակակայ կողերն ա, բ, գ գրերով նշանակենք, որով վերի նախադասութիւնը հետեւեալ ձեւը կու տայ.

$$\text{Ա)}\ \text{գ} : \text{ա} = \text{Ծոց Գ} : \text{Ծոց Ա}.$$

Այս ձեւս կը ծառայէ,

1) Երեքանկեան մը երկու կողերովն եւ անոնց քովն եղող անկիւնով, մէկալ յարակից անկիւնը (եւ ըստ հետեւորդի երրորդ եւայլն անկիւնը) հաշուելու:

2) Մէկ կողով ու երկու անկեամբ (40) ամբողջ երեքանկիւնը հաշուելու:

203. Նու դարձեալ է՝

$$\text{Բ)}\ \text{գ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 - 2\text{աբ}.\ \text{Ծոցակ. Գ}$$

Ցուցում. Որովհետեւ՝

$$\text{ԱԲ}^2 = \text{ԲԴ}^2 + \text{ԱԴ}^2\ (79)$$
$$= \text{ԲԴ}^2 + (\text{ԱԳ} - \text{ԳԴ})^2$$
$$= \text{ԲԴ}^2 + \text{ԱԳ}^2 - 2.\text{ԱԳ}.\text{ԳԴ} + \text{ԳԴ}^2$$
$$= \text{ԲԴ}^2 + \text{ԳԴ}^2 + \text{ԱԳ}^2 - 2.\text{ԱԳ}.\text{ԳԴ}$$
$$= \text{ԲԳ}^2 + \text{ԱԳ}^2 - 2.\text{ԱԳ}.\text{ԳԴ}$$

բայց որովհետեւ՝

$$\text{ԲԳ} : \text{ԳԴ} = 1 : \text{Ծոցակ.Գ}$$

ուրեմն՝

$$\text{ԳԴ} = \text{ԲԳ}.\ \text{Ծոցակ.Գ}$$

ուստի

$$\text{ԱԲ}^2 = \text{ԲԳ}^2 + \text{ԱԳ}^2 - 2.\text{ԱԳ}.\text{ԲԳ}.\text{Ծոցակ.Գ}:$$

կամ՝

$$\text{գ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 - 2\text{աբ}.\ \text{Ծոցակ.Գ}:$$

Այս ձեւս ալ կը ծառայէ երեքանկեան երկու կողերէն եւ անոնցմէ կազմուած անկիւնէն, երրորդ կողն եւ ըստ հետեւորդի բոլոր երեքանկիւնը հաշուելու:

204. Այս հաւասարութենէս՝

$$\text{գ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 - 2\text{աբ}.\ \text{Ծոցակ.Գ}$$

կը հետեւի՝

$$2\text{աբ}.\ \text{Ծոցակ. Գ} = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 - \text{գ}^2$$

ուրեմն՝

$$\text{Գ)}\ \text{Ծոցակ. Գ} = \frac{\text{ա}^2 + \text{բ}^2 - \text{գ}^2}{2\ \text{աբ}}$$

Այս ձեւս ալ կը ծառայէ երեքանկեան երեք կողերէն անկիւնները հաշուելու:

205. Արդէն յայտնի է որ՝

$$\text{ԲԴ}^2 = \text{ԲԳ}^2 - \text{ԳԴ}^2\ (79)\ \text{է}.$$

եւ որովհետեւ Ծոց Գ, Ծոցակ. Գ եւ ճառագայթը ԲԴ, ԲԳ ու ԳԴ գծերուն պէս իրարու կը համեմատին, նաեւ՝

$$(\text{Ծոց Գ})^2 = 1 - (\text{Ծոցակ. Գ})^2$$

բայց համառօտութեան համար կրնանք այսպէս գրել.

$$\text{Ծոց Գ}^2 = 1 - \text{Ծոցակ. Գ}^2$$

Ուստի թէ որ Ծոցակ. Գին տեղ 204 համարէն իրեն զօրութիւնն առնելով, անոր տեղը դնելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\text{Ծոց Գ}^2 = 1 - \frac{(\text{ա}^2+\text{բ}^2-\text{գ}^2)^2}{4\,\text{ա}^2\text{բ}^2} = \frac{4\,\text{ա}^2\text{բ}^2 - (\text{ա}^2+\text{բ}^2-\text{գ}^2)^2}{4\,\text{ա}^2\text{բ}^2}$$

Ասոր մէջ համարիչն է՝

$$= [2\,\text{աբ} + (\text{ա}^2+\text{բ}^2-\text{գ}^2)] \times [2\,\text{աբ} - (\text{ա}^2+\text{բ}^2-\text{գ}^2)]$$

որ յայտնի կ'ըլլայ՝ եթէ վերջի բացատրութիւնն իրօք բազմապատկելու ըլլանք (Ա. 48.բ.օր.3)։

Համարչին առաջին առնելին $2\,\text{աբ} + (\text{ա}^2+\text{բ}^2-\text{գ}^2)$ է.

$$= \text{ա}^2 + 2\,\text{աբ} + \text{բ}^2 - \text{գ}^2 = (\text{ա}+\text{բ})^2 - \text{գ}^2$$
$$= (\text{ա}+\text{բ}+\text{գ}) \cdot (\text{ա}+\text{բ}-\text{գ})։$$

Երկրորդ առնելին է

$$= 2\,\text{աբ} - \text{ա}^2 - \text{բ}^2 + \text{գ}^2 = \text{գ}^2 - (\text{ա}^2 - 2\,\text{աբ} + \text{բ}^2)$$
$$= \text{գ}^2 - (\text{ա}-\text{բ})^2 = [\text{գ}+(\text{ա}-\text{բ})] \times [\text{գ}-(\text{ա}-\text{բ})]$$
$$= (\text{ա}+\text{գ}-\text{բ}) \cdot (\text{բ}+\text{գ}-\text{ա})$$

Ուստի՝

$$\text{Ծոց Գ}^2 = \frac{(\text{ա}+\text{բ}+\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{բ}-\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{գ}-\text{բ})\cdot(\text{բ}+\text{գ}-\text{ա})}{4\,\text{ա}^2\,\text{բ}^2}$$

եւ ըստ հետեւորդի՝

$$\text{Դ)}\quad \text{Ծոց Գ} = \frac{\sqrt{[(\text{ա}+\text{բ}+\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{բ}-\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{գ}-\text{բ})\cdot(\text{բ}+\text{գ}-\text{ա})]}}{2\,\text{աբ}}$$

Աս ձեւս ալ Գին պէս կը գործածուի. բայց ասոր գործածութիւնը ղոգարիթմօսով հաշիւներու մէջ աւելի դիւրին է։

206. Թէ որ երեքանկեան մը երեսին տարածութիւնը Տով նշանակելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\text{Ե)}\quad \text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{աբ} \cdot \text{Ծոց Գ}$$

Ցուցում. ԱԲԳ երեքանկեան երեսաց տարածութիւնն է $= \frac{1}{2} \cdot \text{ԱԳ} \cdot \text{ԲԴ}$ (77) եւ $\text{ԲԴ} = \text{ԲԳ} \cdot \text{Ծոց Գ}$։

Աս ձեւս ալ կը գործածուի՝ երեքանկեան երկու կողերովն եւ անոնցմէ կազմուած անկեամբ, երեքանկեան տարածութիւնը հաշուելու։

207. Իսկ որովհետեւ՝

$$\text{ա} : \text{բ} = \text{Ծոց Ա} : \text{Ծոց Բ}\ (201)$$

ուրեմն՝

$$\text{բ} = \frac{\text{ա} \cdot \text{Ծոց Բ}}{\text{Ծոց Ա}}\ (\text{Ա. } 88)$$

ուստի եւ կ'ըլլայ՝

$$\text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{ա} \cdot \frac{\text{ա} \cdot \text{Ծոց Բ}}{\text{Ծոց Ա}} \cdot \text{Ծոց Գ}$$

կամ՝

$$\text{Զ)}\quad \text{Տ} = \frac{\text{ա}^2 \cdot \text{Ծոց Բ} \cdot \text{Ծոց Գ}}{2 \cdot \text{Ծոց Ա}}$$

աս ալ կը գործածուի՝ երեքանկեան երեսաց տարածութիւնը հաշուելու, երեքանկեան մէկ կողովն ու երկու անկեամբը։

208. Եթէ Ծոց Գին զօրութիւնը՝ 205 համարէն առնելով Ե. երորդ ընդհանուր ձեւոյն մէջ դրուելու ըլլայ կ'ըլլայ.

$$\text{Է)}\quad \text{Տ} = \frac{1}{4}\sqrt{\ }[(\text{ա}+\text{բ}+\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{բ}-\text{գ})\cdot(\text{ա}+\text{գ}-\text{բ})\cdot$$
$$(\text{բ}+\text{գ}-\text{ա})$$

աս ձեւովս ալ՝ երեքանկեան երեսի տարածութիւնն իրեն երեք կողերովը կը գտնուի։

Երեքանկիւնաչափական գծերուն իրարու հետ ունեցած համեմատութեանը հարկաւոր ընդհանուր ձեւեր:

---

209. 197 համարին ձեւին մէջ է.

$$\text{ԲԴ}^2 + \text{ԳԴ}^2 = \text{ԲԳ}^2$$

կամ՝

$$\text{Ա)}\quad \text{Ծոց}^2 + \text{Ծոցակ}^2. = 1$$

Ասկից յառաջ կու գայ,

$$\text{Բ)}\quad \text{Ծոց} = \sqrt{(1 - \text{Ծոցակ}^2.)}$$

եւ

$$\text{Գ)}\quad \text{Ծոցակ.} = \sqrt{(1 - \text{Ծոց}^2)}$$

210. Դարձեալ կը համեմատի

$$\text{ԱԵ} : \text{ԱԳ} = \text{ԲԴ} : \text{ԴԳ}\ (91)$$

կամ՝

$$\text{Շօշ.} : 1 = \text{Ծոց} : \text{Ծոցակ.}$$

ուստի

$$\text{Դ)}\quad \text{Շօշ.} = \frac{\text{Ծոց}}{\text{Ծոցակ.}}$$

Նոյնպէս՝

$$\text{ԷԸ} : \text{ԸԳ} = \text{ԲԶ} : \text{ԶԳ}\ (91)$$

կամ՝

$$\text{Իմշ.} : 1 = \text{Ծոցակ} : \text{Ծոց}$$

ուստի

$$\text{Ե)}\quad \text{Իմշ.} = \frac{\text{Ծոցակ.}}{\text{Ծոց}}$$

211. Երկու ԱԳԵ ու ԸԷԳ (85) երեքանկիւններուն նմանութենէն կը գտնուի նաեւ որ՝

$$\text{ԱԵ} : \text{ԱԳ} = \text{ԸԳ} : \text{ԸԷ}$$

կամ՝

$$\text{Շօշ.} : 1 = 1 : \text{Իմշ.}$$

ուստի կը հետեւի որ՝

$$\text{Զ)}\quad \text{Շօշ.} = \frac{1}{\text{Իմշ.}} :$$

եւ

$$\text{Է)}\quad \text{Իմշ.} = \frac{1}{\text{Շօշ.}} :$$

212. Դարձեալ է.

$$\text{ԳԵ} : \text{ԳԱ} = \text{ԳԲ} : \text{ԳԴ}$$

կամ՝

$$\text{Հատ} : 1 = 1 : \text{Ծոցակ.}$$

եւ ըստ հետեւորդի՝

$$\text{Ը)}\quad \text{Հատ} = \frac{1}{\text{Ծոցակ.}} :$$

Նոյնպէս՝

$$\text{ԳԷ} : \text{ԳԸ} = \text{ԳԲ} : \text{ԳԶ}$$

կամ՝

$$\text{Իմնհատ} : 1 = 1 : \text{Ծոց}$$

ուստի

$$\text{Թ)}\quad \text{Իմնհատ} = \frac{1}{\text{Ծոց}} :$$

213. Դարձեալ՝

$$\text{ԱԴ} = \text{ԱԳ} - \text{ԴԳ}$$

կամ՝

$$\text{Ժ)}\quad \text{Հծոց} = 1 - \text{Ծոցակ.}$$

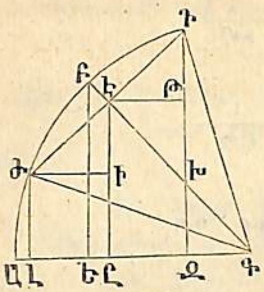
214. Եւ դարձեալ՝

$$\text{ԺԱ)}\quad \text{Ծոց}(\text{ա} + \text{բ}) = \text{ծոց ա. ծոցակ. բ} + \text{ծոցակ. ա. ծոց բ}$$

$$\text{ԺԲ)}\quad \text{Ծոց}(\text{ա} - \text{բ}) = \text{ծոց ա. ծոցակ. բ} - \text{ծոցակ. ա. ծոց բ}$$

$$\text{ԺԳ)}\quad \text{Ծոցակ}(\text{ա} + \text{բ}) = \text{ծոցակ. ա. ծոցակ. բ} - \text{ծոց. ա. ծոց բ}$$

$$\text{ԺԴ)}\quad \text{Ծոցակ}(\text{ա} - \text{բ}) = \text{ծոցակ. ա. ծոցակ. բ} + \text{ծոց. ա. ծոց բ}$$



Ձեւ 47.

Ցուցում 1. Դնենք որ (Ձեւ 47) ԴԳԲ = բ ու ԲԳԱ = ա ըլլայ, ան ատեն ԴԳԱ = ա + բ կ'ըլլայ, ու ԲԵ = ծոց ա, ԵԳ = ծոցակ. ա, ԴԷ = ծոց բ, ԷԳ = ծոցակ. բ, ԴՁ = ծոց (ա + բ), ՁԳ = ծոցակ. (ա + բ) կ'ըլլայ։

Պէտք է ԷԹ ԴՁին վրայ ուղղորդ քաշել։

Ուստի կը համեմատի՝

ԲԳ : ԲԵ = ԷԳ : ԷԸ

կամ՝

1 : ծոց ա = ծոցակ. բ : ԹՁ

ուրեմն՝

ԹՁ = ծոց ա. ծոցակ. բ

Դարձեալ ԷԹԴ ու ԲԳԵ երկու ուղղանկիւն եռանկիւններն իրարու նման են, ինչու որ ԷԴԽ անկիւնը ՁԳԽ անկեան հաւասար է, անոր համար ալ այսպէս կը համեմատի.

ԴԷ : ԴԹ = ԲԳ : ԵԳ

կամ՝

ծոց բ : ԴԹ = 1 : ծոցակ. ա

ուստի՝

ԴԹ = ծոցակ. ա. ծոց բ

Եւ որովհետեւ՝

ԴՁ = ԹՁ + ԹԴ

ապա ուրեմն նաեւ՝

ծոց (ա + բ) = ծոց ա. ծոցակ. բ + ծոցակ. ա. ծոց բ

2. Պէտք է ԲԳԺ անկիւնը = ԲԳԴ = բ դնել, ան ատեն ԺԳԱ = ա — բ կ'ըլլայ, ԺԼ = ծոց (ա — բ) եւ ԳԼ = ծոցակ (ա — բ) կ'ըլլայ։ Ուստի եթէ ԺԻ ուղիղ գիծը՝ ԷԸին վրայ ուղղորդ քաշելու ըլլանք, ան ատեն △ ԺԻԷ ≅ ԷԹԴ, ուրեմն ԷԻ = ԴԹ, եւ ըստ հետեւորդի որովհետեւ ԻԸ = ԸԷ — ԷԻ է,

ԺԼ = ԹՁ — ԴԹ

կամ՝

ծոց (ա — բ) = ծոց ա. ծոցակ. բ — ծոցակ. ա. ծոց բ։

3. Դարձեալ կը համեմատին՝

ԲԳ : ԷԳ = ԵԳ : ԸԳ

կամ՝

1 : ծոցակ. բ = ծոցակ. ա : ԸԳ

ուրեմն՝

ԸԳ = ծոցակ. ա. ծոցակ. բ

Եւ դարձեալ՝

ԴԷ : ԷԹ = ԲԳ : ԲԵ

կամ՝

ծոց բ : ԸՁ = 1 : ծոց ա

ուրեմն՝

ԸՁ = ծոց ա. ծոց բ

Եւ որովհետեւ՝

ՁԳ = ԸԳ — ԸՁ

ուրեմն նաեւ է՝

ծոցակ (ա + բ) = ծոցակ. ա. ծոցակ. բ — ծոց. ա. ծոց բ։

4. Եւ որովհետեւ ԼԸ = ԺԻ = ԷԹ = ԸՁ է նաեւ՝

ԼԳ = ԸԳ + ԸՁ

կամ՝

ծոցակ. (ա — բ) = ծոցակ. ա. ծոցակ. բ + ծոց ա. ծոց բ։

215. Եթէ ա = բ դնելու ըլլանք, ան ատեն ԺԱ էն յառաջ կու գայ.

ԺԵ) Ծոց. 2ա = 2. Ծոց ա. Ծոցակ. ա

իսկ ԺԳ էն ալ՝

ԺԶ) Ծոցակ. 2ա = Ծոցակ. ա^2 — Ծոց. ա^2:

Եւ որովհետեւ դարձեալ 209 էն կը հետեւի որ,

Ծոցակ ա^2 = 1 — Ծոց ա^2

ուրեմն նաեւ՝

Ծոցակ. 2ա = 1 — Ծոց ա^2 — Ծոց ա^2

ուստի կ'ըլլայ.

ԺԷ) Ծոցակ. 2ա = 1 — 2 Ծոց ա^2:

Եւ որովհետեւ դարձեալ 209 էն կը հետեւի որ՝

Ծոց ա^2 = 1 — Ծոցակ. ա^2

ուրեմն կ'ըլլայ.

Ծոցակ.2ա = 1 — 2(1 — Ծոցակ.ա^2) = 1 — 2 + 2Ծոցակ.ա^2

ուստի եւ՝

ԺԸ) Ծոցակ. 2ա = 2 Ծոցակ. ա^2 — 1:

Դարձեալ ԺԷ էն կը գտնուի՝

$$\text{ԺԹ) Ծոց ա} = \sqrt{\frac{1 - \text{Ծոցակ. 2ա}}{2}}$$

իսկ ԺԸ էն կը հետեւի.

$$\text{Ի) Ծոցակ. ա} = \sqrt{\frac{1 + \text{Ծոցակ. 2ա}}{2}}$$

Դարձեալ ԺԷ.էն ալ կը հետեւի.

2 Ծոց ա^2 = 1 — Ծոցակ. 2 ա

բայց որովհետեւ ըստ 213 համարին Ժ.

Շրծոց 2ա = 1 — Ծոցակ. 2ա

ուստի եւ՝

ԻԱ) Շրծոց 2ա = 2 Ծոց ա^2:

Ծանօթութիւն. Աս Համարիս ընդհանուր ձեւերը բաւական են գաղափար մը տալու, թէ ինչպէս երեքանկիւ-

նաչափական գծերը կրնան հաշուուիլ: Եթէ ա անկեան մը Ծոցակիցը գիտցուելու ըլլայ, (ինչպէս 198 Համարին մէջ Ծոցակ. 30°ը), ան ատեն Ի ընդհանուր ձեւոյն միջնորդութեամբը նաեւ $\frac{1}{2}$ա ին, անով ալ $\frac{1}{4}$ա ին, անով ալ $\frac{1}{8}$ա ին ու $\frac{1}{16}$ա ին եւ այլն Ծոցակիցները կրնան գտնուիլ: Եւ դարձեալ Ծոցակ. ա, Ծոցակ. $\frac{1}{2}$ա, Ծոցակ. $\frac{1}{4}$ա... ով ալ, ԺԹ ընդհանուր ձեւոյն միջնորդութեամբ, Ծոց $\frac{1}{2}$ա, Ծոց $\frac{1}{4}$ա ու Ծոց $\frac{1}{8}$ա... կրնայ հաշուուիլ: Աս հաշիւը կրնայ շարունակուիլ, մինչեւ որ անկիւնն այնչափ պզտիկնայ, որ իր Ծոցն աղեղէն ուզուածէն աւելի տասներորդական տեղեաց թուով մը չտարբերի: Եւ որովհետեւ ասանկ պզտիկ անկեանց համար մինչեւ որոշ տասներորդական տեղիք մը, Ծոցերն այնպէս իրարու կը համեմատին՝ ինչպէս իրենց աղեղները, անոր համար համեմատութեան դիւրին օրինակաւ մը, (բոլորակին շրջանակին աստիճաններու, մանրերկրորդի ու երկրորդական մանրերկրորդի բաժնուելուն համեմատ) Ծոց 1′ կամ Ծոց 1″ կը գտնուի: Ծոց 1′էն, ըստ Գ. ընդհանուր ձեւոյն (209), Ծոցակ 1′ը կը գտնուի, ասով ալ ըստ ԺԵ ընդհանուր ձեւոյն Ծոց 2′ը, ասով ալ ըստ ԺԱի Ծոց 3′ը կամ Ծոց (2′ + 1′)ը (214) եւայլն:

Երեքանկիւնաչափական գծերուն ուրացական զօրութիւնը:

216. Այն հաշիւներն՝ որոնք ընդհանուր յառաջ բերուած կանոններով կ'ըլլան, շատ անգամ ուրացական արդիւնքներ կու տան (տես Ա. 39. եւայլն): Եթէ երեքանկիւնաչափական ձեւերը գործածելու ատեն ուրացական գծեր պատահելու ըլլան, կը հարցուի որ աս ուրացական զօրութիւնն ինչ կը նշանակէ:

217. Եթէ (203 Բ) ընդհանուր ձեւին ցուցմանը մէջ Δ ԱԲԳ ին տեղ, որն որ այս տեղի (Ձեւ 48 -ին)

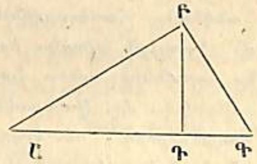
հետ նոյն է, աս △ ԱԲԳ (Ձեւ 48 բ.) առած ըլլայինք, ան ատեն կ'ըլլար․

$$\text{ԱԲ}^2 = \text{ԲԴ}^2 + (\text{ԱԳ} + \text{ԳԴ})^2$$
$$= \text{ԲԴ}^2 + \text{ԱԳ}^2 + 2\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԳԴ}$$

բայց որովհետեւ ԳԴ = ԲԳ․ Ծոցակ․ ԲԳԴ է․

$$\text{գ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 + 2\text{աբ}\cdot \text{Ծոցակ}\cdot \text{ԲԳԴ}\ \text{կ'ըլլար}\cdot$$

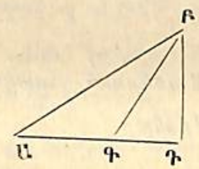
Ձեւ 48 ա.



ուր ԲԳԴ անկիւնը, ԱԲԳ △ մէջ Գ-ին կից անկիւնն է։

Ուրեմն թէ որ ԳԱ ու ԳԲ ծանօթ կողերուն շինած անկիւնը բութ անկիւն է, ան ատեն երրորդ ԱԲ կողը հաշուելու համար, կրնայ ան անկեան տեղն իրեն կից սուր անկիւնը հակառակ նշանով առնուիլ։

Ձեւ 48 բ.



Անկից աս առածը կը հետեւի․

Բութ անկեան մը ծոցակիցն՝ իր սուր կից անկեան ծոցակիցին հաւասար է, միայն թէ հակառակ նշանով. ուրեմն որոշական կ'ըլլայ՝ թէ որ ծոցակիցն ինչպէս նաեւ ամէն ուրիշ եռանկիւնաչափական գծերը, սուր անկեան մէջ հաստատական մտածելու ըլլանք։

218. Իսկ աստ հակառակ թէ որ ԲԳԱ անկիւնը ԱԲ ու ԲԳ կողերով եւ ԲԱԳ անկեամբ, ըստ Ա. ընդհանուր ձեւոյն (202) հաշուել ուզելու ըլլանք, ան ատեն կրնայ ըլլալ որ ԲԳԱ անկիւնը կամ սուր անկիւն մ'ըլլայ, ինչպէս է (Ձեւ 48 ա), եւ կամ աս սուր անկեան բութ կից անկիւնը՝ ինչպէս է (Ձեւ 48 բ)։

Ընդ հակառակն ԲԳԱ բութ անկիւնով (Ձեւ 48 բ) եւ մնացած յիշեալ երեք կտորներուն երկու մասերուն երրորդը հաշուելու համար, պէտք էր իր սուր կից անկեան ծոցը գործածել։

Նոյնպէս կը գտնուի ԱԲԳ եռանկեան մը երեւոյթ տարածութիւնը՝ որ իր խարսխին վրայ բութ անկիւն մ'ունի, թէ որ ԲԴ ուղղորդ գիծը (Ձեւ 48 բ) ԱԳ խարսխի գծին հետ բազմապատկուելու ըլլայ. նոյնպէս աս ԲԴ ուղղորդ գիծը հաշուելու համար կրնայ ԲԳԴ սուր կից անկեան ծոցը գործածուիլ (տես 206)։

Եւ առ հասարակ ամէն դէպքի մէջ՝ բութ անկեան մը ծոցին տեղ, իր սուր կից անկեան ծոցն անփոփոխ նշանով կրնայ հաշուի մէջ առնուիլ։

Անոր համար կ'ըսուի որ՝

Բութ անկեան ծոցը՝ իր սուր կից անկեան ծոցին հաւասար է, եւ անոր պէս հաստատական։

219. Իսկ թէ բութ անկիւնն ընդհանրապէս 90°+բով նշանակելու ըլլանք, ան ատեն նաեւ ԺԱ ու ԺԳ (214) ընդհանուր ձեւերուն գործածութիւնն ալ աստ հետ կատարեալ կը միաբանի, վասն զի ան ատեն կ'ըլլայ․

$$\text{Ծոցակ}\cdot(90^\circ + \text{բ}) = \text{Ծոցակ}\cdot 90^\circ\cdot\text{Ծոց}\cdot\text{բ} - \text{Ծոց}\ 90^\circ\cdot\text{Ծոց}\ \text{բ}$$
$$= -\text{Ծոց}\ \text{բ} = -\text{Ծոցակ}\cdot(90^\circ - \text{բ})$$

որովհետեւ Ծոցակ․ $90^\circ = 0$, իսկ Ծոց $90^\circ = 1$ է։ Իսկ

$90^0 - \text{ք}$ անկիւնը՝ $90^0 + \text{ք}$ անկեան սուր կից անկիւնն է։

Դարձեալ է՝

$$\text{Ծոց}(90^0+\text{ք})=\text{Ծոց}\,90^0.\text{Ծոցակ}.\text{ք}+\text{Ծոցակ}.90\,\text{Ծոց}\,\text{ք}$$
$$=\text{Ծոցակ}.\text{ք}=\text{Ծոց}\,(90^0-\text{ք})$$

220. Բազմանկիւններուն մէջ կրնայ ըլլալ՝ որ ներքին անկիւնը 180^0էն եւ նաեւ 270^0էն կամ 3 ուղիղ անկիւնէն մեծ ըլլայ։

Ուստի՝

$$\text{Ծոց}(180^0+\text{ք})=\text{Ծոց}\,180^0.\text{Ծոցակ}.\text{ք}+\text{Ծոցակ}.180^0.$$
$$\text{Ծոց}\,\text{ք}=-\text{Ծոց}\,\text{ք}$$

որովհետեւ $\text{Ծոց}\,180^0=0$, եւ $\text{Ծոցակ}.180^0=-1$ է,
եւ $\text{Ծոց}(270^0+\text{ք})=\text{Ծոց}\,270^0.\text{Ծոցակ}.\text{ք}+\text{Ծոցակ}.270^0$
$\text{Ծոց}\,\text{ք}=-\text{Ծոցակ}.\text{ք}=-\text{Ծոց}(90^0-\text{ք})$
ինչու որ $\text{Ծոց}\,270^0=-1$ $\text{Ծոցակ}.\,270^0=0$ է։

Ուրեմն այն անկիւններուն ծոցերն ուրացական են, որոնք 180^0էն մեծ եւ 360^0էն պզտիկ են։

221. Դարձեալ է՝

$$\text{Ծոցակ}.\,(180^0+\text{ք})=\text{Ծոցակ}.\,180^0.\,\text{Ծոցակ}.\,\text{ք}-$$
$$\text{Ծոց}\,180^0.\,\text{Ծոց}\,\text{ք}=-\text{Ծոցակ}.\,\text{ք}$$

եւ

$$\text{Ծոցակ}.\,(270^0+\text{ք})=\text{Ծոցակ}.\,270^0.\,\text{Ծոցակ}.\,\text{ք}-$$
$$\text{Ծոց}\,270^0\,\text{Ծոց}\,\text{ք}.=+\text{Ծոց}\,\text{ք}=\text{Ծոցակ}.(90^0-\text{ք})։$$

Ուրեմն այն ամէն անկիւններուն ծոցակիցները՝ որոնք 180^0ին եւ 270^0ին մէջ են, ուրացական են. իսկ անոնք՝ որ 270^0ին ու 360^0ին մէջ են հաստատական։

222. Եւ որովհետեւ $\text{Շօշ}.\,\frac{\text{Ծոց}}{\text{Ծոցակ}.}$ (210. Դ) ուրեմն ամէն սուր անկիւններուն շօշափողները հաստատական են. այն անկիւններունը՝ որոնք 90^0ին ու 180^0ին մէջ

են ուրացական են, ինչու որ ծոցը հաստատական՝ իսկ ծոցակիցն ուրացական կ'ըլլայ. իսկ այն անկիւններունը՝ որոնք 180^0ին ու 270^0ին մէջ են՝ հաստատական. ինչու որ թէ ծոցն ու թէ ծոցակիցն ուրացական կ'ըլլայ. իսկ այն ամէն անկիւններունը, որոնք 270^0ին ու 360^0ին մէջ են ուրացական են, վասն զի ծոցն ուրացական՝ իսկ ծոցակիցը հաստատական կ'ըլլայ (տես Ա. 42 Է)։

223. Եւ որովհետեւ $\text{Խմշօշ}.=\frac{1}{\text{Շօշ}}$, անոր համար ալ խմշօշափողներն այն դէպքերուն մէջ հաստատական կամ ուրացական կ'ըլլան, որ դէպքերուն մէջ շօշափողներն են։

224. Ալ $\text{Հատ}=\frac{1}{\text{Ծոցակ}.}$ հաւասարութենէն կը հետեւի՝ որ հատանողը ծոցակցին պէս հաստատական կամ ուրացական կ'ըլլայ։

225. Ալ $\text{Խմհատ}=\frac{1}{\text{Ծոց}}$ հաւասարութենէն ալ կը հետեւի, որ խմհատանողները ծոցին պէս հաստատական կամ ուրացական կ'ըլլան։

226. Կրնայ ըլլալ որ հաշուի մէջ նաեւ ուրացական անկիւն մ'ալ հանդիպի, ինչպէս որ ԺԲ ու ԺԴ ընդհանուր ձեւերուն գործածութեան մէջ կը պատահի, թէ որ ք > ա ըլլալու ըլլայ։ Ամ ատեն այսպիսի անկիւն մը թէ սուր ըլլայ թէ բութ, — ֆով կրնանք նշանակել, որով կ'ըլլայ՝

$$\text{Ծոց}\,(-\text{ֆ})=\text{Ծոց}\,(0-\text{ֆ})$$
$$=\text{Ծոց}\,0.\text{Ծոցակ}.\text{ֆ}-\text{Ծոցակ}.0.\text{Ծոց}\,\text{ֆ}$$
$$=-\text{Ծոց}\,\text{ֆ}=\text{Ծոց}\,(360^0-\text{ֆ})$$

$$\text{եւ Ծոցակ.}(-\text{ẗ}) = \text{Ծոցակ.}\,(0 - \text{ẗ})$$
$$= \text{Ծոցակ.}0.\text{Ծոցակ.ẗ} + \text{Ծոց.}0.\text{Ծոց.ẗ}$$
$$= \text{Ծոցակ.ẗ} = \text{Ծոցակ.}\,(360^{\circ} - \text{ẗ}):$$

Ալգեբրայական եւ Գերազանցական հաւասարութեանց տարբերութիւնը:

227. **Ալգեբրայական հաւասարութիւն** ըսելով կ'իմացուի այնպիսի հաւասարութիւն մը, որուն մէջէն անծանօթ քանակութիւնը միայն հասարակ թուաբանական վեց գործողութեամբ (որոնք են Գումար, Հանում, Բազմապատկութիւն, Բաժանում, Կարողութեան բարձրացընել ու Արմատ հանել) կրնայ գտնուիլ: Իսկ եթէ աս վեց գործողութիւնները հաւասարութիւնը լուծելու բաւական չեն, այն ատեն հաւասարութիւնը **Գերազանցական հաւասարութիւն** կը կոչուի:

Կրնայ ըլլալ որ մի եւ նոյն հաւասարութիւնը թէ ալգեբրայական թէ գերազանցական հաւասարութիւն ըլլայ: Ինչպէս է օրինակի համար ասի.

$$\text{ա. Ծոց ք} = \text{բ}$$

ալգեբրայական հաւասարութիւն մըն է, թէ որ միայն Ծոց ք. իբրեւ անծանօթ անգամ փնտռուելու ըլլայ: Ասիկայ բաժանումով կը գտնուի.

$$\text{Ծոց ք} = \frac{\text{բ}}{\text{ա}}$$

իսկ եթէ ասոր հակառակ + անկիւնն իբրեւ անծանօթ մտածելու ըլլանք, այն ատեն հաւասարութիւնը գերազանցական հաւասարութիւն կ'ըլլայ, վասն զի + անկիւնն աս վեց գործողութիւններէն եւ ոչ մէկով կրնայ

գտնուիլ: Իսկ այն՝ որ եթէ ա ու բը ծանօթ թուեր ըլլան, + անկիւնն ալ արդէն հաշուուած երրեքանկիւնաչափական տախտակներուն մէջ կրնայ գտնուիլ, հոս չ'արժեր:

228. Հաւասարութիւն մը՝ ինչպէս է.

$$\text{գ. Ծոց ք} = \text{դ. Ծոցակ. ք}$$

եթէ իբրեւ ալգեբրայական հաւասարութիւն մտածելու ըլլանք, երկու անծանօթ քանակութիւն կ'ունենայ, այսինքն Ծոց +, ու Ծոցակ. +. իսկ եթէ իբրեւ գերազանցական հաւասարութիւն մտածելու ըլլանք, միայն մէկ անծանօթ քանակութիւն կ'ունենայ որ է +. այնպէս որ +ին որոշեալ զօրութիւնը գտնելու համար երկրորդ հաւասարութեան մը հարկաւորութիւն չկայ (տես Ա. 133): Ուստի եւ ըստ ալգեբրայի է.

$$\frac{\text{Ծոց ք}}{\text{Ծոցակ.ք}} = \frac{\text{դ}}{\text{գ}}$$

եւ որովհետեւ $\frac{\text{Ծոց ք}}{\text{Ծոցակ.ք}} = \text{Շօշ. ք}$ է (210). Գ. ըստ երեքանկիւնաչափութեան.

$$\text{Շօշ ք} = \frac{\text{դ}}{\text{գ}}$$

229. Թէ աս կանոններուն եւ թէ միանգամայն վերն ըսուած երեքանկիւնաչափական ձեւոց գործածութեան համար հոս խնդիր մը դնենք, զորն որ աշակերտները լուծեն:

Խնդիր. Երեքանկեան մը խարսխովն ու բարձրութեամբն եւ իր գագաթան անկիւնովն, երեքանկիւնը գտնել:

Լուծում. (201 Համարին Ձեւը) Դնենք որ ԱԳ խարիսխը = ա ըլլայ, ԲԳ բարձրութիւնը = բ, իսկ ԱԳԲ անկիւնն ալ = +, ուստի եւ Δ ԲԳԴէն կը հետեւի.

$$\text{ԲԳ} : \text{ԲԴ} = 1 : \text{ծոց Գ}$$

կամ՝

$$\text{ԲԳ} : բ = 1 : \text{ծոց} ք$$

ուրեմն՝

$$\text{ԲԳ} = \frac{բ}{\text{ծոց} ք}$$

իսկ ԱԲԳ երեքանկիւնէն ալ կը հետեւի.

$$\text{ԲԳ} : \text{ԱԳ} = \text{ծոց Ա} : \text{ծոց Բ} \ (201)$$

կամ որովհետեւ ծոց Ա = ծոց $(180^0 - \text{Ա})$ = ծոց (Բ + ք) է, (218)

$$\text{ԲԳ} : խ = \text{ծոց} (\text{Բ} + ք) : \text{ծոց Բ}$$

ուրեմն՝

$$\text{ԲԳ} = \frac{խ \ \text{ծոց} (\text{Բ} + ք)}{\text{ծոց Բ}}$$

Եթէ ԲԳ-ին երկու զօրութիւններն իրարու հաւասար դնելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\frac{բ}{\text{ծոց} ք} = \frac{խ \cdot \text{ծոց} (\text{Բ} + ք)}{\text{ծոց Բ}}$$

կամ՝

$$բ \ \text{ծոց Բ} = խ \cdot \text{ծոց} ք \cdot \text{ծոց} (\text{Բ} + ք)$$

Աս հաւասարութիւնն իբրեւ ալգեբրայական մտածելով երկու անծանօթ քանակութիւն ունի, այսինքն ծոց ֆ եւ ծոց (Բ + ֆ), իսկ ասոր հակառակ իբրեւ երեքանկիւնաչափական մտածելով միայն մէկ անծանօթ ունի այսինքն ֆ անկիւնը: Երեքանկիւնաչափական ընդհանուր ձեւերուն միջնորդութեամբը, կրնանք աս երկու ծոց ֆ, եւ ծոց (Բ + ֆ) անծանօթ քանակութիւնները մէկ անծանօթ երեքանկիւնաչափական գծի փոխել: Թէ որ նախ 214 համարին ԺԱ ձեւը գործածելու ըլլանք կ'ըլլայ. բ· ծոց Բ =

խ· ծոց ք (ծոց Բ· ծոցակ· ք + ծոցակ· Բ· ծոց ֆ²)

Արդ թէ որ բ· ծոց Բը՝ բազմապատկելու ըլլանք ծոց

ֆ² + ծոցակ ֆ², որ = 1 է, ըստ 209 համարին, ան ատեն կ'ըլլայ.

$$բ \cdot \text{ծոց Բ} \cdot \text{ծոց ֆ}^2 + բ \cdot \text{ծոց Բ} \cdot \text{ծոցակ} \cdot \text{ֆ}^2$$
$$= խ \cdot \text{ծոց Բ} \cdot \text{ծոց ֆ} \cdot \text{ծոցակ} \cdot \text{ֆ} + խ \cdot \text{ծոցակ} \cdot \text{Բ} \cdot \text{ծոց ֆ}^2.$$

Թէ որ երկու կողմն ալ ծոց ֆ² վրայ բաժնելու ըլլանք կ'ըլլայ.

բ· ծոց Բ + բ· ծոց Բ· $\frac{\text{ծոցակ} \cdot \text{ֆ}^2}{\text{ծոց ֆ}^2}$ = խ· ծոց Բ $\frac{\text{ծոցակ ֆ}}{\text{ծոց ֆ}}$ + խ· ծոցակ Բ· եւ կամ որովհետեւ $\frac{\text{ծոցակ} \cdot \text{ֆ}^2}{\text{ծոց ֆ}^2}$ = իմշօշ· ֆ² (210) է՝

բ· ծոց Բ + բ· ծոց Բ· իմշօշ· ֆ² = խ· ծոց Բ· իմշօշ· ֆ + խ ծոցակ· Բ· եթէ ասոնք ալ ծոց Բին վրայ բաժնելու ըլլանք, որովհետեւ $\frac{\text{ծոցակ} \cdot \text{Բ}}{\text{ծոց} \cdot \text{Բ}}$ = իմշօշ· Բ է, կ'ըլլայ.

$$բ + բ \cdot \text{իմշօշ} \cdot \text{ֆ}^2 = խ \cdot \text{իմշօշ} \cdot \text{ֆ} + խ \cdot \text{իմշօշ} \cdot \text{Բ}$$

որ խառն չորեքկուսի հաւասարութիւն մըն է, եւ ըստ ալգեբրայի միայն մէկ իմշօշ· ֆ անծանօթ ունի, ուստի եւ ըստ կանոնաց ալգեբրայի կրնայ լուծուիլ: Լուծելով կը գտնուի.

$$\text{իմշօշ} \cdot \text{ֆ} = \frac{խ \pm \sqrt{(4\, խբ \cdot \text{իմշօշ} \cdot \text{Բ} + խ^2 - 4\, բ^2)}}{2\, բ}$$

Գնդական երեքանկիւնաչափութիւն:

230. Եթէ մարմնոյ անկիւն մը՝ երեք հարթ անկիւններէ կազմուած է, ան ատեն անով միանգամայն հարթ երեսներուն փոխադարձ ունեցած դիրքն որոշ է, որուն մէջ աս հարթ անկիւնները կեցած են:

Ընդհանրապէս երկ'երկու հարթ երեսներուն երեք հակման անկիւններն ու երեք հարթ անկիւնները, այնպէս իրարմէ կախում ունին, որ ինչպէս քիչ մը եաքը պիտ'որ տեսնենք, աս վեց կտորներուն երեքովը մնացեալ երեք կտորները հաշուով կրնան գտնուիլ:

231. Թէ որ մարմնոյ մը անկեան ծայրը, կամայական ճառագայթով գծագրուած գնդի մը կեդրոնը մտածենք, ան ատեն բոլորակի բաժանած մը կ'ելլէ, որուն վերին կոր երեսը **Գնդական Երեքանկիւն** կ'անուանուի:

Գնդական երեքանկիւնը փակող աղեղները գնդին մեծագոյն բոլորակներուն կը վերաբերին (190), ու երեք հարթ անկիւններուն չափն են: Աս աղեղներուն ան երկու շօշափողները, որոնք գնդական երեքանկեան երեք ծայրերը կը ձգուին, երկու հարթ երեսներուն հատման գծին վրայ ուղղորդ կը կենան, եւ ըստ հետեւորդի ան հարթ երեսներուն հակման անկիւնը կ'որոշեն (148):

Աս երեք աղեղներն անյատկապէս գնդական երեքանկեան **Կողերը** կ'անուանուին. իսկ ծայրերն եղող երեք անկիւններն ալ, անյատկապէս **Անկիւնները** կը կոչուին: Առաջիններն ուրիշ բան չեն, բայց եթէ մարմնոյ անկեան ծայրն եղող երեք հարթ անկիւնները, իսկ ասոնք ալ ուրիշ բան չեն, բայց եթէ աս անկեանց պատշաճող հարթ երեսներուն հակման անկիւնները:

232. **Գնդական Երեքանկիւնաչափութիւնն** ան երեք կտորներով, մնացած երեք կտորները հաշուով գտնել կը սորվեցնէ:

Ուրեմն գնդական երեքանկիւնաչափութիւնը՝ ուսողութեան ուրիշ մասերուն գործածուելէն զատ, ընդհանրապէս անկիւններն իրարու միջնորդութեամբ որոշելու կը պատաղի:

Գնդական երեքանկեան կողերն՝ երեքանկիւնաչափական հաշուի մէջ մտնելէն յառաջ, պէտք է աստիճանով, վայրկենով եւայլն նշանակուած ըլլան:

Բայց եւ այնպէս եթէ որոշեալ գնդի մը գնդական երեքանկեան կողն՝ երկայնութեան չափով նշանակուած ըլլայ, կրնայ ասիկայ դիւրաւ գնդին ծանօթ ճառագայթին միջնորդութեամբն աստիճաններով բացատրուիլ. ինչպէս նաեւ աստիճանով նշանակուած կողն ալ հաշուով կրնայ տանաչափի եւ այլն դարձուիլ (տես 137 դ):

233. Եւ որովհետեւ մարմնոյ անկիւն մը կազմող հարթ անկիւններուն գումարը, միշտ 4 ուղիղ անկիւնէն պզտիկ է (155), ուրեմն նաեւ գնդական երեքանկիւններուն կողերն ալ 4 ուղիղ անկիւնէն պզտիկ պիտ'որ ըլլան: Իրենց գումարը կրնայ 0°ի եւ 360°ի մէջ ըլլալ:

Ամէն մէկ կող առանձինն 0°ի ու 180°ի մէջ է:

234. Եւ որովհետեւ երեք հակման անկիւններէն մէկը կրնայ ուղիղ անկիւն ըլլալ, անոր համար ուղղանկիւն գնդական երեքանկիւններ ալ կան:

235. Եւ որովհետեւ դարձեալ երեք հակման անկիւններէն երկուքը կրնան ուղիղ անկիւն ըլլալ, անոր համար երկու ուղիղ անկիւնով գնդական երեքանկիւններ ալ կան: Աս դէպքիս մէջ՝ երկու հարթ երեսներն ուրիշ երրորդ հարթ երեսի մը վրայ ուղղորդ կը կենան: Եւ ըստ հետեւորդի երկու հարթ երեսներուն հատման գիծն ալ երրորդ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ (152): Ուստի աս հատման գիծը՝ ամէն մէկ ուղիղ գծին հետ, որն որ գնդին կեդրոնէն երրորդ հարթ երեսին վրայ քաշուած է, ուղիղ անկիւն մը կը շինէ (143): Ուրեմն գնդական երեքանկեան ծայրերէն մէկը, երրորդ հարթ երեսին վերաբերած աղեղան ամէն մէկ կէտէն բոլորակի քառորդով մը հեռու է:

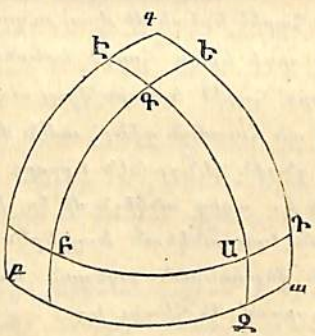
Եւ ան ատեն աս ծայրը՝ թէ աղեղան եւ թէ ամբողջ մեծ բոլորակին՝ որուն աս աղեղը մէկ մասն է, Բեւեռը կը կոչուի։

236. Ուրեմն երկու ուղիղ անկիւնով գնդական երեքանկիւն մը, միշտ երկու բոլորակի քառորդ իբրեւ կող ունի։ Եւ ասոր հակառակ թէ որ գնդական երեքանկիւն մը երկու բոլորակի քառորդ իբրեւ կող ունենալու ըլլայ, ան երեքանկիւնն երկու ուղիղ անկիւն ալ կ'ունենայ, եւ աս երկու քառորդներուն իրար կտրած կէտը, երրորդ կողին բեւեռն է։ Երրորդ կողը՝ հակակայ բեւեռին անկեան չափն է։

237. Վերջապէս երեք ուղիղ անկիւնով գնդական երեքանկիւններ ալ կան. այսպիսի երեքանկիւն մը երեք բոլորակի քառորդ կողերով սահմանաւորեալ է, եւ ամբողջ գնդի մը վերին երեսին ութերորդ մասին կը հաւասարի։

238. Գտնենք որ Ա, Բ, Գ՝ բգ, ագ, բա մեծ բոլորակներուն բեւեռներն ըլլան, ան ատեն աս երեք բոլորակները, ա, բ, գ կէտերուն վրայ իրար կը կտրեն. որոնք նոյնպէս ԲԳ, ԱԳ, ԱԲ կողերուն բեւեռներն են։

Ձեւ 49.



Ցուցում. Որովհետեւ (Ձեւ 49) Բը ագին բեւեռն է, ուրեմն ա բոլորակի քառորդով մը Բէն հեռու է. եւ դարձեալ որովհետեւ Գ՝ բային բեւեռն է, ուրեմն ա բոլորակի քառորդով մը նաեւ Գէն հեռու է։ Արդ եթէ մտածենք որ մեծագոյն բոլորակներն ա ու Բին, եւ ա ու Գին վրայէն քաշուած ըլլան, ան ատեն աԲԳ այնպիսի գնդական երեքանկիւն մըն է, որ երկու բոլորակի քառորդ իբրեւ կող, եւ ըստ հետեւորդի երկու ալ ուղիղ անկիւններ ունի (236), անոր համար ալ ա՝ ԲԳին բեւեռն է։

Աս եղանակաւ կրնայ ցուցուիլ նաեւ որ բ՝ ԱԳին, եւ գ՝ ԱԲին բեւեռն է։

239. Եւ որովհետեւ $\text{ագ} + \text{ԴԵ} = \text{աԵ} + \text{Դգ} = 180^\circ$ է (238), եւ դարձեալ ԴԵ՝ Բ անկեան չափն է (236). ասկէ աս կանոնը կը հետեւի.

աբգ գնդական երեքանկեան կողերը, ԱԲԳ գնդական երեքանկեան հակակայ անկիւնները 180°ի կը լրացընեն։

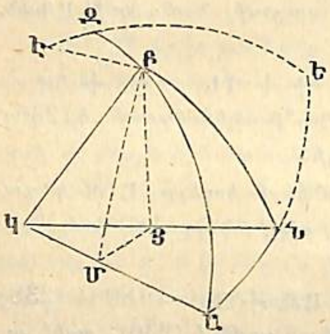
240. $\text{ԱԳ} + \text{ԶԷ} = \text{ԱԶ} + \text{ԳԷ} = 180^\circ$ է (238)։ Եւ որովհետեւ ԶԷ՝ բ անկեան չափն է (236), ասկէ այս կանոնը յառաջ կու գայ.

աբգ գնդական երեքանկեան անկիւնները, ԱԲԳ ծանօթ երեքանկեան յանդիմանակաց կողերը 180°ի կը լրացընեն։

241. Եւ որովհետեւ $\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ} = 3 \cdot 180^\circ - (\text{բգ} + \text{գա} + \text{աբ})$ է (239), բայց $\text{գբ} + \text{գա} + \text{աբ}$ միշտ $< 2 \cdot 180^\circ$ է (233). ուրեմն ամէն գնդական երեքանկեան մէջ $\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ} > 3 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$. այսինքն՝ $> 180^\circ$ է. ասոր հակառակ $< 3 \cdot 180^\circ$ է։ Ուրեմն գնդական երեքանկեան մը անկիւններուն գումարը՝ միշտ 180° ու 540°ի մէջ կ'իյնայ։

242. Ասկէ ետքը, ինչպէս հարթ երեքանկիւններուն մէջ, գնդական երեքանկեան երեքանկիւններն Ա, Բ, Գ ով, իսկ անոնց յանդիմանակաց կողերն ա, բ, գ ով պիտի նշանակենք: Միայն մէկ ուղիղ անկիւն ունեցող գնդական երեքանկիւններուն մէջ, զորոնք ի մասնաւորի Ուղղանկիւն գնդական երեքանկիւն կը կոչենք, ներքնաձիգը ն ով, իսկ անոր յանդիմանակաց ուղիղ անկիւնը Ն ով պիտի նշանակենք:

Ձեւ 50.



243. Դնենք որ (Ձեւ 50) ԱՆԲ ուղղանկիւն գնդական երեքանկիւն մ’ըլլայ, որուն Ն ուղիղ անկիւնն ըլլայ, իսկ Կ ալ անոր վերաբերած գնդին կենդրոնը:

Պէտք է ԿՆ ին վրայ Բէն ԲՑ ուղղորդ գիծը ձգել. նոյնպէս ԿԱ ին վրայ ալ Ցէն ՄՑ ուղղորդ գիծը քաշել եւ ԲՄ ալ քաշելու է. ան ատեն որովհետեւ Ն անկիւնն եւ ըստ հետեւորդի ԲԿՆ ու ՆԿԱ երկու հարթ երեսներուն հակման անկիւնն ալ ուղիղ անկիւն է (231), պէտք է որ աս երկու հարթ երեսներն ալ իրարու վրայ ուղղորդ կեցած ըլլան (149), եւ ԲՑն ալ բոլոր ՆԿԱ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կեցած ըլլայ (151). ուրեմն նաեւ ԲՄՑ հարթ երեսը, ՆԿԱ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ (150), եւ ԲՄՑ ուղղանկիւն երեքանկիւն մըն է (143):

Եւ որովհետեւ դարձեալ ԿՄը ՑՄ ին, եւ ԿՄՑ ու ՄՑԲ հարթ երեսներն իրարու վրայ ուղղորդ են, ուրեմն

նաեւ ԿՄն ալ բոլոր ԲՄՑ հարթ երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ (151). ուրեմն նաեւ ԲՄ ին վրայ ուղղորդ կեցած է (143), եւ որովհետեւ ԲՄՑ անկիւնը, աս երկու ԲԿԱ ու ՆԿԱ հարթ երեսներուն հակման անկիւնն է (148), ուրեմն նաեւ Ա անկեան հաւասար է:

Արդ է՝

ԿԲ : ԲՑ = 1 : Ծոց ա

եւ ՄԲ . ԿԲ = Ծոց ն : 1

ուրեմն՝ ՄԲ : ԲՑ = Ծոց ն : Ծոց. ա:

Բայց որովհետեւ նաեւ՝

ՄԲ : ԲՑ = 1 : Ծոց Ա

ըստ հետեւորդի՝

Ա) 1 : Ծոց Ա = Ծոց ն : Ծոց ա

244. Դարձեալ է՝

ՄՑ : ԲՑ = 1 : Շօշ. Ա

եւ ԲՑ : ԿՑ = Շօշ. ա : 1

ուրեմն՝ ՄՑ : ԿՑ = Շօշ. ա : Շօշ. Ա

բայց որովհետեւ նաեւ՝

ՄՑ : ԿՑ = Ծոց. բ : 1

եւ ըստ հետեւորդի՝

Բ) 1 . Ծոց բ = Շօշ. Ա : Շօշ. ա

245. Պէտք է ԱՆ ու ԱԲ դէպ ի Ե ու Զ երկնցընել, այնպէս որ ԱԵ ու ԱԶ մէյմէկ բոլորակի քառորդ ըլլան. ԵԶ բոլորակի աղեղն ալ քաշելու է, որուն բեւեռն Ա է, ուստի եւ ասանկով Եին ու Զին քովը մէյմէկ ուղիղ անկիւններ կը կազմուին (236): Պէտք է նաեւ ՆԲն ալ երկնցընել մինչեւ որ Էին վրայ ԵԶին երկնցածին հանդիպի, ան ատեն Է՝ ՆԵին բեւեռը կ’ըլլայ, ինչու որ Ն եւ Ե ուղիղ անկիւններ են (235), ուրեմն նաեւ ՆԷն ալ քառորդ բոլորակի է:

Ուղղանկիւն ԲԶԷ գնդական երեքանկեան մէջ ըստ Աին (243) է.

1 : Ծոց Է = Ծոց ԲԷ : Ծոց ԲԶ

ուրեմն △ ԱՆԲին մէջ ալ որովհետեւ Ծոց Է = Ծոց ՆԵ = Ծոցակ. ԱՆ, Ծոց ԲԷ = Ծոցակ. ԲՆ, ու Ծոց ԲԶ = Ծոցակ ԱԲ է,

Գ) 1 : Ծոցակ. բ = Ծոցակ. ա : Ծոցակ. ն

246. Նոյնպէս ալ ըստ Աին (243).

1 : Ծոց Բ = Ծոց ԲԷ : Ծոց ԶԷ

ուստի եւ ըստ հետեւորդի՝

Դ) 1 : Ծոց. Բ = Ծոցակ. ա : Ծոցակ. Ա

247. Նոյ դարձեալ ըստ Բին (244)

1 : Ծոց ԶԷ = Շօշ. Է : Շօշ. ԲԶ

ուստի եւ՝

1 : Ծոցակ. Ա = Խմշօշ. բ : Խմշօշ. ն

եւ կամ

Ե) 1 : Ծոցակ. Ա = Շօշ. ն : Շօշ. բ (211 Է)

248. Նոյնպէս դարձեալ ըստ Բին (244).

1 : Ծոց ԲԶ = Շօշ. Բ : Շօշ. ԶԷ

ուստի՝

Զ) 1 : Ծոցակ. ն = Շօշ. Բ : Խմշօշ. Ա։

249. **Գնդական ուղղանկիւն երեքանկեան մէջ՝** բաց ի ուղիղ անկիւնէն, պէտք է որ միշտ ուրիշ երկու կտոր ալ ծանօթ ըլլայ, որպէս զի անով երրորդ կտորը գտնուի։ Եթէ վերի վեց ընդհանուր ձեւերն իբրեւ վեց հաւասարութիւն մտածուելու ըլլան, որոնց մէջի երեք կտորին մէկն անծանօթ ու մէկալ երկուքը ծանօթ դնելու ըլլանք. ան ատեն ասոնց օգնութեամբն **ամէն կարելի դէպքերը կրնան լուծուիլ, որոնք ուղղանկիւն գնդական երեքանկիւններուն մէջ կը պատահին։** Այս երեք կտորները կրնան ըլլալ.

1. Ներքնաձիգն ու երկու էջքերը։ Լուծ. ըստ Գին։

2. Ներքնաձիգն, էջքերէն մէկն եւ ասոնցմէ փակուած անկիւնը։ Լուծ. ըստ Եին։

3. Ներքնաձիգն, էջքերէն մէկը, եւ անոր յանդիմանակաց անկիւնը։ Լուծ. ըստ Աին։

4. Ներքնաձիգն եւ անոր յարակից անկիւնները. ըստ Զին։

5. Երկու էջքերը եւ մէկ անկիւն մը. ըստ Բին։

6. Էջքերէն մէկն ու երկու անկիւն. ըստ Դին։

Օրինակ. 1։ Մէկ էջքով եւ անոր հակակայ անկեամբ միւս էջքը գտնել։

Հոս երեք կտորներն են, երկու էջքերն ու մէկ անկիւնը (Թիւ 5)։ Ուստի եւ ըստ Բին,

1 : Ծոց. բ = Շօշ. Ա : Շօշ. ա

ուրեմն՝

$$\text{Ծոց. բ} = \frac{\text{Շօշ. ա}}{\text{Շօշ. Ա}}$$

Օրինակ. 2. Թէ որ էջքերը ծանօթ են, ներքնաձիգը գտնել։

Հոս երեք կտորներն են՝ ներքնաձիգն ու երկու էջքերը (Թիւ 1)։ Ուստի եւ ըստ Գին՝

1 : Ծոցակ բ = Ծոցակ ա : Ծոցակ. ն

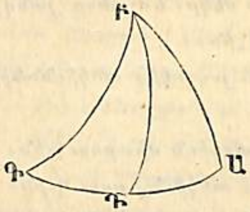
ուրեմն՝

Ծոցակ. ն = Ծոցակ. ա . Ծոցակ. բ

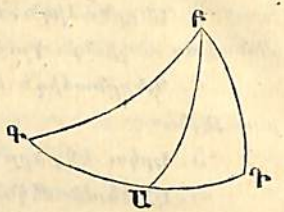
250. **Ուղղանկիւն գնդական երեքանկիւնները** հաշուելն ըստ մասին դիւրութեամբ կ'ըլլայ, Թէ որ երեքանկեան սուր ծայրերուն մէկէն, մեծ բոլորակի աղեղ մը յանդիմանակաց կողին վրայ ուղղորդ ձգելու ըլլանք, եւ անկէ ետքն ուղղանկիւն գնդական երեքանկեան կանոնները հետզհետէ շատ անգամ գործածենք։ Իսկ ուրիշ դէպքերու համար ընդհանուր ձեւեր պէտք է գտնել, որպէս

զի ասոնց ձեւքով անընդմիջապէս խնդրեալ կտորները կարենան հաշուուիլ։

Ձեւ 51 ա.



Ձեւ 51 բ.



251. Գտնենք որ ԱԲԳը՝ ծռանկիւն գնդական եռանկիւն մ'ըլլայ. ուստի Բ ծայրէն ձգուած ԲԴ ուղղորդը կամ նոյն իսկ ԱԳ կողէն վրայ կ'իյնայ, ինչպէս է (Ձեւ 51 ա), եւ կամ անոր երկընցած մասին վրայ, ինչպէս է (Ձեւ 51 բ)։

Թէ որ ԲԴ բոլորակի քառորդ մ'ըլլար, կամ Բը՝ ԱԳին բեւեռը, ան ատեն ԲԳ ու ԱԲն բոլորակի քառորդ իսկ Ա ու Գ ուղիղ անկիւններ կ'ըլլային (235 ու 236)։ Ան ատեն Բէն ձգուած ամէն մեծ բոլորակներն՝ ԱԳին վրայ ուղղորդ կ'ըլլային։

Թէ որ այնպէս մտածենք որ (Ձեւ 51, ա, բ) Բ ծայրը 90° էն նուազ Գ էն հեռու ըլլայ, ան ատեն ԲԳԴ ու ԲԱԴ անկիւններուն երկուքն ալ 90° էն պզտիկ կ'ըլլային։ Իսկ ասոր հակառակ թէ որ ԲԴ > 90° ըլլալու ըլլայ, ան ատեն նաեւ ԲԳԴ ու ԲԱԴ անկիւններն > 90° կ'ըլլային։

Ձեւ բին մէջ չէ թէ ԲԱԴ՝ այլ իրեն ԲԱԳ կից անկիւնը գնդական ԲԱԳ երեքանկեան մէջ կը գտնուի։ Ուրեմն ԲԱԳ բութ կ'ըլլայ, եթէ ԲԳԱը սուր ըլլալու ըլլայ. իսկ եթէ ԲԳԱը բութ ըլլայ, ան ատեն ԲԱԳը սուր կ'ըլլայ։

Ուստի եւ ասկից կը հետեւի աս կանոնը, որուն պէտք է միտ դնել 253ին ընդհանուր ձեւը գործածելու ատեն. Թէ որ խարսխին վրայ եղող երկու անկիւնները նոյնատեսակ ըլլալու ըլլան, այսինքն երկուքն ալ կամ սուր կամ բութ, ան ատեն ծայրէն ձգուած ուղղորդ գիծը երեքանկեան մէջ կ'իյնայ։ Իսկ թէ որ ասոր հակառակ երկու անկիւնները նոյնատեսակ չըլլան, ան ատեն երեքանկիւնէն դուրս կ'իյնայ։

252. Աս ընդհանուր ձեւէն՝

1 : Ծոց ն = Ծոց Ա : Ծոց ա (243 Ա.) միայն Ա ու ա գրերը Բ ու բի փոխելով յառաջ կու գայ.

1 : Ծոց ն = Ծոց Բ : Ծոց բ

ասկէ ալ՝

Է) Ծոց Ա : Ծոց ա = Ծոց Բ : Ծոց բ

այսինքն անկիւններուն ծոցերն այնպէս կը համեմատին, ինչպէս իրենց յանդիմանակաց կողերուն ծոցերը։

253. Ըստ 244 Բին է (տես 250ին Ձեւը).

1 : Ծոց ԳԴ = Ճօշ. Գ : Ճօշ. ԲԴ

եւ 1 : Ծոց ԱԴ = Ճօշ. Ա : Ճօշ. ԲԴ

ուստի եւ ասկից ալ յառաջ կու գայ.

Ծոց. ԳԴ × Ճօշ. Գ = Ծոց. ԱԴ × Ճօշ. Ա

եւ ըստ հետեւորդի՝

Ը) Ճօշ. Ա : Ճօշ. Գ = Ծոց. ԳԴ : Ծոց. ԱԴ (Ա. 89)

254. Ըստ 245 Գին է.

1 : Ծոցակ. ԲԴ = Ծոցակ. ԳԴ : Ծոցակ. ԲԳ

եւ 1 : Ծոցակ. ԲԴ = Ծոցակ ԱԴ : Ծոցակ. ԱԲ

ուստի եւ ասկից ալ յառաջ կու գայ.

Թ) Ծոցակ. ԳԴ : Ծոցակ. ԳԲ = Ծոց ԱԴ : Ծոց ԱԲ

255. Ըստ 245 համարին Դ է.

1 : Ծոց ԳԲԴ = Ծոցակ. ԲԴ : Ծոցակ. Գ

եւ 1 : Ծոց ԱԲԴ = Ծոցակ. ԲԴ : Ծոցակ. Ա

ուստի եւ անկից ալ կը հետեւի.

Ժ) Ծոց. ԳԲԴ : Ծոց. ԱԲԴ = Ծոցակ. Գ : Ծոցակ. Ա

256. Ըստ 247ը Եին է.

1 : Ծոցակ. ԳԲԴ = Շօշ. ԲԴ : Շօշ. ԲԳ

եւ 1 : Ծոցակ. ԱԲԴ = Շօշ. ԲԱ : Շօշ. ԲԴ

ուստի՝

ԺԱ) Շօշ. ԲԳ : Շօշ. ԲԱ = Ծոցակ. ԱԲԴ : Ծոցակ. ԳԲԴ։

257. Դժուարձեալ է.

$$\text{ԺԲ) Ծոցակ. Գ} = \frac{\text{Ծոցակ. գ} - \text{Ծոցակ. ա Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոց. ա. Ծոց բ}}$$

Ցուցում. Ըստ 254 համարին Թ. է.

Ծոցակ. ԳԴ : Ծոցակ. ա = Ծոցակ. ԱԴ : Ծոցակ. գ

ուստի՝

$$\text{Ծոցակ. ԱԴ} = \frac{\text{Ծոցակ. ԳԴ. Ծոցակ. գ}}{\text{Ծոցակ ա}}$$

բայց որովհետեւ դարձեալ է.

Ծոցակ. ԱԴ = Ծոցակ. (բ − ԳԴ) (Չեւ 1.)

= Ծոցակ. բ. Ծոցակ. ԳԴ + Ծոց բ. Ծոց. ԳԴ (214 ԺԴ)

եւ որովհետեւ Ծոցակ. ԱԴին երկու զօրութիւնն ալ կրնանք իրարու հաւասար դնել, անոր համար ասկէ ալ կը հետեւի.

$$\text{Ծոց բ. Ծոց ԳԴ} = \frac{\text{Ծոցակ. ԳԴ. Ծոցակ. գ}}{\text{Ծոցակ. ա}} - \text{Ծց. բ. Ծց. ԳԴ}$$

Եթէ երկու կողմն ալ Ծոցակ. ԳԴի վրայ բաժնելու ըլլանք կ'ելլէ.

$$\text{Ծոց բ. Շօշ. ԳԴ} = \frac{\text{Ծոցակ գ}}{\text{Ծոցակ ա}} - \text{Ծոցակ. բ} =$$

$$\frac{\text{Ծոցակ գ} - \text{Ծոցակ ա Ծոցակ բ}}{\text{Ծոցակ ա}}\ (210\ \text{Դ})$$

ապա ուրեմն՝

$$\text{Շօշ. ԳԴ} = \frac{\text{Ծոցակ. գ} - \text{Ծոցակ. ա Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոցակ ա. Ծոց բ}}$$

Բայց որովհետեւ դարձեալ ըստ 247 Եին է.

1 : Ծոցակ. Գ = Շօշ. ա : Շօշ. ԳԴ

ուրեմն՝

$$\text{Շօշ. ԳԴ} = \text{Ծոցակ. Գ. Շօշ. ա} = \frac{\text{Ծոցակ. Գ. Ծոց ա}}{\text{Ծոցակ ա}}$$

ասկից ալ յառաջ կու գայ.

$$\frac{\text{Ծոցակ. Գ. Ծոց ա}}{\text{Ծոցակ. ա}} = \frac{\text{Ծոցակ. գ} - \text{Ծոցակ. ա. Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոցակ. ա. Ծոց. բ}}$$

եւ ըստ հետեւորդի՝

$$\text{Ծոցակ. Գ} = \frac{\text{Ծոցակ. գ} - \text{Ծոցակ. ա. Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոց ա. Ծոց բ}}$$

Ծանօթութիւն. Ըստ (51 Չեւոյն Բ) կ'ըլլար Ծոցակ. ԱԴ = Ծոցակ. (ԳԴ − բ) = Ծոցակ. բ. Ծոցակ. ԳԴ + Ծոց բ. Ծոց ԳԴ. ուրեմն ըստ ամենայնի Չեւ 51 ային պէս պիտ'որ ըլլար։

258. Աս ընդհանուր ձեւէս կը հետեւի նաեւ (213 Ժ).

$$\text{Շրջծոց Գ} = 1 - \text{Ծոցակ. Գ}$$

$$= \frac{\text{Ծոց ա. Ծոց բ} + \text{Ծոցակ. ա. Ծոցակ. բ} - \text{Ծոցակ. գ}}{\text{Ծոց ա. Ծոց բ}} =$$

$$= \frac{\text{Ծոցակ. (ա} - \text{բ)} - \text{Ծոցակ. գ}}{\text{Ծոց ա. Ծոց բ}}\ (214\ \text{ԺԴ})$$

Եթէ որ ա − բ = α − β, եւ գ = α + β դնելու ըլլանք, ան ատեն՝

Ծոցակ. (ա − բ) − Ծոցակ. գ = Ծոցակ. (α − β) − Ծոցակ. (α + β) կ'ըլլայ. բայց որովհետեւ

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ծոցակ. }(\alpha - \beta) \\ \quad = \text{Ծոցակ. }\alpha\text{. Ծոցակ. }\beta + \text{Ծոց }\alpha\text{. Ծոց }\beta \\ \text{եւ Ծոցակ. }(\alpha + \beta) \\ \quad = \text{Ծոցակ. }\alpha\text{. Ծոցակ. }\beta - \text{Ծոց }\alpha\text{. Ծոց }\beta\end{array}\right\}\ 214$$

ուրեմն Ծոցակ. (α − β) − Ծոցակ. (α + β) = 2. Ծոց α. Ծոց β.

ուրեմն՝

$$\text{Շրջծոց Գ} = \frac{\text{2 Ծոց ս. Ծոց ֆ}}{\text{Ծոց ա. Ծոց գ}}$$

Բայց որովհետեւ աս ս — ֆ = ա — բ ու ս + ֆ = գ երկու հաւասարութիւններէն ս = $\frac{\text{գ} + (\text{ա} - \text{բ})}{2}$ ու ֆ = $\frac{\text{գ} - (\text{ա} - \text{բ})}{2}$ կ'ելլէ, ուրեմն՝

$$\text{Շրջծոց. Գ} = \frac{2\ \text{Ծոց}\ \frac{\text{գ} + (\text{ա} - \text{բ})}{2} \cdot \text{Ծոց}\ \frac{\text{գ} - (\text{ա} - \text{բ})}{2}}{\text{Ծոց ա. Ծոց բ}}$$

եւ կամ որովհետեւ Շրջծոց. Գ = 2 Ծոց $^1/_2$ Գ^2 (215 ԻԱ) է

$$\text{ԺԳ)}\ (\text{Ծոց.}\ ^1/_2\ \text{Գ})^2 = \frac{2\ \text{Ծոց}\ \frac{\text{գ} + (\text{ա} - \text{բ})}{2}\ \text{Ծոց}\ \frac{\text{գ} - (\text{ա} - \text{բ})}{2}}{\text{Ծոց ա. Ծոց բ.}}$$

259. Դարձեալ 257էն յառաջ կու գայ.

ԺԴ) Ծոցակ. գ = Ծոցակ. Գ. Ծոց ա. Ծոց բ + Ծոցակ. ա. Ծոցակ. բ

260. Ըստ 252 Էին է.

$$\text{Ծոց Ա : Ծոց ա = Ծոց Գ : Ծոց գ}$$

ուրեմն՝

$$\text{Ծոց ա} = \frac{\text{Ծոց Ա. Ծոց գ}}{\text{Ծոց Գ}}$$

Եթէ աստ զօրութիւնը ԺԴին մէջի ծոց ա զօրութեան տեղ դնելու ըլլանք կ'ըլլայ.

$$\text{Ծոցակ. Գ.}\ \frac{\text{Ծոց. Ա. Ծոց. գ}}{\text{Ծոց. Գ.}} \cdot \text{Ծոց բ = Ծոցակ. գ — Ծոցակ. ա. Ծոցակ. բ:}$$

եւ կամ

Խմշօշ. Գ. Ծոց Ա. Ծոց գ. Ծոց բ = Ծոցակ. գ — Ծոցակ. բ. Ծոց ա

= Ծոցակ. գ — Ծոցակ. բ (Ծոցակ. Ա. Ծոց բ. Ծոց գ + Ծոցակ. բ Ծոցակ. գ) (259 ԺԴ)

= Ծոցակ. գ — Ծոցակ. գ Ծոցակ. բ^2 — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ. Ծոց. գ. Ծոց բ.

= Ծոցակ. գ (1 — Ծոցակ. բ^2) — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ. Ծոց գ. Ծոց բ.

= Ծոցակ. գ. Ծոց բ^2 — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ. Ծոց գ. Ծոց բ.

Թէ որ ասի ընդհանրապէս Ծոց գ. Ծոց բ ի վրայ բաժնելու ըլլանք կ'ելլէ.

ԺԵ) Խմշօշ. Գ. Ծոց Ա = Խմշօշ. գ. Ծոց բ — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ

261. Դարձեալ է.

$$\text{ԺԶ)}\ \text{Ծոցակ. գ} = \frac{\text{Ծոցակ. Գ + Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. Բ}}{\text{Ծոց Ա. Ծոց Բ.}}$$

Ցուցում. Ըստ 257 ԺԲին կը գտնուի (Ձեւ 49)

$$\text{Ծոցակ. է} = \frac{\text{Ծոցակ. սֆ — Ծոցակ. ֆէ Ծոցակ. սէ}}{\text{Ծոց ֆէ. Ծոց սէ}}$$

ապա ուրեմն, որովհետեւ Ծոցակ. է = — Ծոցակ. ԱԲ (240 եւ 217) = — Ծոցակ. գ, Ծոցակ. սֆ = — Ծոցակ. Գ (239), Ծոցակ. ֆէ = — Ծոցակ. Ա, Ծոցակ. սէ = — Ծոցակ. Բ, Ծոց ֆէ = Ծոց Ա (218), Ծոց սէ = Ծոց Բ, է

$$\text{— Ծոցակ. գ} = \frac{\text{— Ծոցակ. Գ — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. Բ}}{\text{Ծոց Ա. Ծոց Բ}}$$

եւ կամ

$$\text{Ծոցակ. գ} = \frac{\text{Ծոցակ. Գ + Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. Բ}}{\text{Ծոց Ա. Ծոց Բ}}$$

262: Ասկից կը հետեւի

ԺԷ) Ծոցակ. Գ = Ծոցակ. գ. Ծոց Ա. Ծոց Բ — Ծոցակ. Ա Ծոցակ. Բ:

263. Ըստ 258 ԺԳին կը գտնուի (Ձեւ 49).

$$\left(\text{Ծոց}\ \frac{1}{2}\ \text{է}\right)^2 = \frac{\text{Ծոց}\ \frac{\text{սֆ + ֆէ — սէ}}{2}\ \text{Ծոց}\ \frac{\text{սֆ — ֆէ + սէ}}{2}}{\text{Ծոց ֆէ. Ծոց սէ.}}$$

Բայց որովհետեւ $\text{Ծոց}\ \frac{1}{2}\ \text{է} = \text{Ծոց}\ \frac{1}{2}\,(180^0 - \text{ԱԲ})$ $= \text{Ծոց}\ (90^0 - \frac{1}{2}\ \text{ԱԲ}) = \text{Ծոցակ.}\ \frac{1}{2}\ \text{գ}$ է, եւ դարձեալ՝

$$\frac{\text{աբ} + \text{բէ} - \text{աէ}}{2} = \frac{180^0 - \text{Գ} + 180^0 - \text{Ա} - 180^0 + \text{Բ}}{2}$$

$$= 90^0 - \frac{\text{Գ} + \text{Ա} - \text{Բ}}{2}$$

ապա ուրեմն՝

$$\text{Ծոց}\ \frac{\text{աբ} + \text{բէ} - \text{աէ}}{2} = \text{Ծոցակ.}\ \frac{\text{Գ} + \text{Ա} - \text{Բ}}{2}$$

Նոյնպէս ալ՝

$$\text{Ծոց}\ \frac{\text{աբ} - \text{բէ} + \text{աէ}}{2} = \frac{180^0 - \text{Գ} - 180^0 + \text{Ա} + 180^0 - \text{Բ}}{2}$$

$$= 90^0 - \frac{\text{Գ} - (\text{Ա} - \text{Բ})}{2}$$

ապա ուրեմն՝

$$\text{Ծոց}\ \frac{\text{աբ} - \text{բէ} + \text{աէ}}{2} = \text{Ծոցակ.}\ \frac{\text{Գ} - (\text{Ա} - \text{Բ})}{2}$$

ուստի եւ

$$\text{ԺԸ)}\ (\text{Ծոցակ.}\ {}^1/_2\,\text{գ})^2 = \frac{\text{Ծոց}\ \frac{\text{Գ}+(\text{Ա}-\text{Բ})}{2}\ \text{Ծոց}\ \frac{\text{Գ}-(\text{Ա}-\text{Բ})}{2}}{\text{Ծոց Ա.}\ \text{Ծոց Բ}}$$

264. Այս վերի ընդհանուր ձեւերուն մէջ ան ամէն խնդիրներուն լուծումը կը գտնուի, որ ծռանկիւն գնդական եռանկիւններուն մէջ կը պատահին: Հոս պէտք է միշտ երեքանկեան չորս կտորը հաւասարութեան մէջ դնել, որպէս զի անոր երեք կտորներովը միւս չորրորդ անծանօթը գտնուի:

1. Երեք կող եւ մէկ անկիւնը (257 ԺԲ):

2. Երկու կող եւ անոնց յանդիմանակաց երկու անկիւնները (252 Է):

3. Երկու կող եւ անոնցմէ փակուած անկիւնը, մէյ մ'ալ անոնց յարակից անկիւններէն մէկը (260 ԺԵ):

4. Մէկ կողը, ու երեք անկիւնները (261 ԺԶ):

Անոնց ամէն մէկ առանձին կարելի դէպքերը, եաեւի տասուերկուքն են, որոնք 265—276 համարներուն մէջ իբրեւ տասուերկու խնդիր կարգաւ կը պարունակուին:

Ծանօթ. Անծանօթ.

Ա. Երեք կող . . . մէկ անկիւն. խնդ. 1.

Բ. Երկու կող ու մէկ անկիւն:

ա) փակուած անկիւնը
- երրորդ կողը. խնդ. 2
- միացեալ անկիւնները. խնդ. 3

բ) չփակուած անկիւնը
- երրորդ կողը. խնդ. 4
- փակուած անկիւնը. խնդ. 5
- միւս չփակուած անկիւնը. խընդիր 6.

Գ. Մէկ կող եւ 2 անկիւն.

ա) փակուած կողը
- մէկ կողը. խնդ. 7
- երրորդ անկիւնը. խնդ. 8

բ) չփակուած կողը
- փակուած կողը. խնդ. 9
- միւս չփակուած կողերը. խնդ. 10
- երրորդ անկիւնը. խնդ. 11:

Դ. Երեք անկիւնը եւ մէկ կող. խնդ. 12.

265. Խնդիր 1. Երեք կողերով՝ անկիւնները գտնել:

Լուծ. Ըստ 257 ԺԲին է.

$$\text{Ծոցակ.}\ \text{Գ} = \frac{\text{Ծոցակ.}\ \text{գ} - \text{Ծոցակ.}\ \text{ա.}\ \text{Ծոցակ.}\ \text{բ}}{\text{Ծոց ա.}\ \text{Ծոց բ}}$$

Լոգարիթմսով աւելի դիւրին կ'ըլլայ ըստ 258 ԺԳին:

$$(\text{Ծոց}\ \tfrac{1}{2}\,\text{Գ})^2 = \frac{\text{Ծոց}\ \frac{1}{2}\,(\text{գ} + \text{ա} - \text{բ}).\ \text{Ծոց}\ \frac{1}{2}\,(\text{գ} - \text{ա} + \text{բ})}{\text{Ծոց ա.}\ \text{Ծոց բ.}}$$

266. Խնդիր 2. ա, բ ու Գով, գը գտնել:

Լուծ. Ըստ 259 ԺԴին է.

$$\text{Ծոցակ.}\ \text{գ} = \text{Ծոցակ.}\ \text{Գ.}\ \text{Ծոց ա.}\ \text{Ծոց բ} + \text{Ծոցակ.}\ \text{ա.}\ \text{Ծոցակ.}\ \text{բ}$$

267. Խնդիր 3. բ, գ ու Աով, Գը գտնել:

Լուծ. Ըստ 260 ԺԵին է.

$$\text{Խմշօշ Գ} = \frac{\text{Խմշօշ. գ. Ծոց բ} - \text{Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոց Ա}}$$

268. Խնդիր 4. ա, գ ու Գով, բը գտնել.

Լուծ. 257 ԺԲին ընդհանուր ձեւը՝ Ծոց բին համար չորեքկուսի հաւասարութիւն մը կու տայ:

Լուծ. 2. ըստ 247 Եին է (Ձեւ 51).

1 : Ծոցակ. Գ = Շօշ. ա : Շօշ. ԳԴ

առով ԳԴ կը գտնուի:

Դարձեալ ըստ 254 Թին է՝

Ծոցակ. ԳԴ : Ծոցակ. ա = Ծոցակ. ԱԴ : Ծոցակ. բ

առով ալ ԱԴ կը գտնուի:

Ուստի եւ հիմայ բ = ԳԴ ± ԱԴ (251):

269. Խնդիր 5. ա, գ ու Գով Բը գտնել:

Լուծ. 1. Աս ընդհանուր ձեւս.

Խմշօշ. Գ. Ծոց Բ = Խմշօշ գ. Ծոց. ա — Ծոցակ. Բ. Ծոցակ. ա, որն որ ԺԵին հետ նոյն է (260), եթէ կողերուն եւ անկեանց գրերուն տեղ իրենց պատշաճ նշանակութիւնը դրուելու ըլլայ, Ծոց Բին համար չորեքկուսի հաւասարութիւն մը կու տայ:

Լուծ. 2. Ըստ 248 Զին է:

1 : Ծոցակ ա = Շօշ. Գ : Խմշօշ. ԳԲԴ

առով ԳԲԴ անկիւնը կը գտնուի:

Դարձեալ ըստ 256 ԺԱին է.

Շօշ. ա : Շօշ. գ = Ծոցակ. ԱԲԴ : Ծոցակ. ԳԲԴ. առով ալ ԱԲԴ անկիւնը կը գտնուի:

Ուստի Բ = ԳԲԴ ± ԱԲԴ (151):

270. Խնդիր 6. ա, բ ու Աով, Բը գտնել:

Լուծ. Ըստ 252 Էին է.

$$\text{Ծոց Բ} = \frac{\text{Ծոց բ. Ծոց Ա}}{\text{Ծոց ա.}}$$

271. Խնդիր 7. բ, Ա ու Գ ով, Գը գտնել:

Լուծ. Ըստ 260 ԺԵին է.

$$\text{Խմշօշ. գ} = \frac{\text{Խմշօշ. Գ. Ծոց Ա} + \text{Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. բ}}{\text{Ծոց բ}}$$

272. Խնդիր. 8. գ, Ա ու Բով, Գը գտնել:

Լուծ. Ըստ 262 Համարին ԺԷին է.

Ծոցակ. Գ = Ծոցակ. գ. Ծոց Ա. Ծոց Բ — Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. Բ:

273. Խնդիր 9. գ, Ա ու Գով, բը գտնել:

Լուծ. 1. Ըստ 260 Համարին ԺԵին Ծոց. բին զօրութիւնը չորեքկուսի հաւասարութեամբ մը կը գտնուի:

Լուծ. 2. Ըստ 247 Համարին Եին է.

1 : Ծոցակ. Ա = Շօշ. գ : Շօշ. ԱԴ

առով ԱԴ կը գտնուի:

Դարձեալ ըստ 253 Ըին է.

Շօշ. Ա : Շօշ. Գ = Ծոց ԳԴ : Ծոց ԱԴ

առով ալ ԳԴ կը գտնուի.

ուստի եւ բ = ԳԴ ± ԱԴ է:

274. Խնդիր 10. Ա. Բ ու աով, բը գտնել:

Լուծ. Ըստ 252 Էին է.

$$\text{Ծոց բ} = \frac{\text{Ծոց Բ. Ծոց ա}}{\text{Ծոց Ա}}$$

275. Խնդիր 11. Ա, Գ ու գով, Բը գտնել:

Լուծ. Ըստ 262 ԺԷին, Ծոց Բը չորեքկուսի հաւասարութեամբ մը կը գտնուի:

Լուծ. 2. Ըստ 248 Զին է.

1 : Ծոցակ գ = Շօշ. Ա : Խմշօշ. ԱԲԴ

առով ԱԲԴ անկիւնը կը գտնուի:

Դարձեալ ըստ 255 Ժին է.

Ծոց ԳԲԴ : Ծոց = ԱԲԴ Ծոցակ. Գ : Ծոցակ. Ա. ասով ալ ԳԲԴ անկիւնը կը գտնուի.

ուստի եւ   բ = ԳԲԴ ± ԱԲԴ։

276. **Խնդիր** 12. Երեք անկիւններով կողերը գտնել։

Լուծ. Ըստ 261 ԺԶին է,

$$\text{Ծոցակ. գ} = \frac{\text{Ծոցակ. Գ + Ծոցակ. Ա. Ծոցակ. Բ}}{\text{Ծոց. Ա. Ծոց. Բ}}$$

Ղոգարիթմասով ըստ 263 ԺԸին աւելի դիւրին կ'ըլլայ։

$$(\text{Ծոցակ.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{գ}) = \frac{\text{Ծոցակ}\tfrac{1}{2}(\text{Գ}+\text{Ա}-\text{Բ})\,\text{Ծոցակ}\tfrac{1}{2}(\text{Գ}-\text{Ա}+\text{Բ})}{\text{Ծոց. Ա. Ծոց. Բ}}$$

Գ. ՀԱՏԱԾ ԿՈՆԻ

1. *Կոնագիծ։*

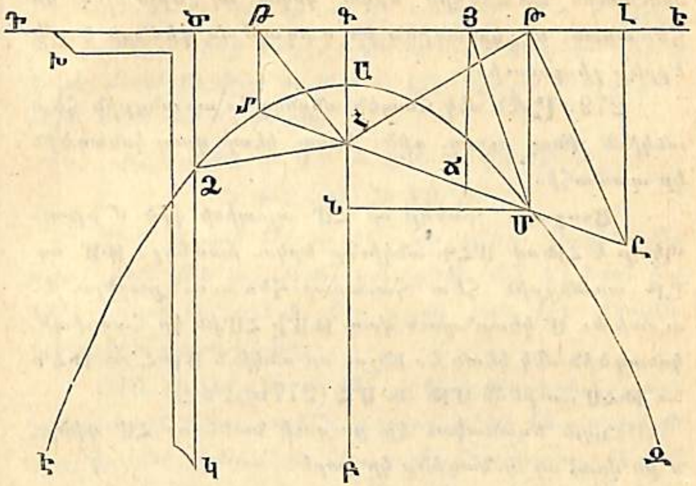
277. Այն գիծը՝ որուն ամէն մէկ կէտն ուրիշ որոշեալ կէտէ մը այնչափ հեռու է, որչափ որոշեալ ուղիղ գծէ մը, **Կոնագիծ** կը կոչուի. զորօրինակ (Ձեւ 52) ՋԱԷ գիծը, որուն ամէն մէկ Մ կէտը՝ Հէն այնչափ հեռու է, որչափ ԴԵ ուղիղ գծէն կամ թէ ըսեմ ՄՀ = է ուղղորդ ՄԹ գծին։

Այն Հ կէտը **Հնոց** կը կոչուի, ԴԵ ուղիղ գիծը՝ **Ուղղիչ** կ'ըսուի, իսկ ՀՄ գիծն ալ՝ **Բռնալի ճառագայթ** կամ **Ծրագրէն ճառագայթ**։

ԱԲ ուղիղ գիծը՝ որն որ Հէն անցնելով, ԴԵ գծին վրայ ուղղորդ կեցած է, **Առանցք** կ'անուանուի. իսկ Ա կոնագծին **Գագաթը** կը կոչուի։

Առանցքին վրայ ուղղորդ կեցող ՄՆ գիծը **Կարգած**

Ձեւ 52.



կը կոչուի. իսկ ԱՆ ալ անոր պատշաճեալ **Յապաւածը** կ'անուանուի.

Ուղղիչէն գագաթան ԱԳ հեռաւորութեան չորեքպատիկը, **Աղընթերալը** կը կոչուի։

Ծանօթութիւն. Իրական կոնագիծ մը գծելու համար, պէտք է ուղղանկիւն ԽԾԿ կանոն մը եւ աս կանոնին ԾԿ երկայնութեամբը դերձան մը առնուլ։ Դերձանին մէկ ծայրը կանոնին Կ ծայրը, իսկ միւս ծայրն ալ՝ Հին վրայ հաստատելու է։ ԴԵին վրայ ալ կրնայ շիտակ կանոն մը դրուիլ։ Արդ եթէ ԽԾԿ կանոնը՝ ԴԵին շտկութեամբը յառաջ շարժելու ըլլանք եւ գրչով մ'ալ կէտին վրայ դերձանին ՁԾ մասը պրկուելու ըլլայ, գրիչը կոնագիծ մը կը գծէ։

278. Կոնագծին մեկնութենէն (ինչպէս նաեւ կոնագծին իրական կազմութենէն) անընդմիջապէս կ'իմա-

ցուի, որ կոնագիծն իր առանցքին երկու կողմն երկու պատշաճական սրուններ ունի, եւ միանգամայն աս երկու սրուններն առանցքին երկու կողմն ալ երթալով կը հեռանան, եւ կոնագիծն իր գագաթան դիմացի կողմն երբեք չի գոցուիր։

279. Ամէն մէկ հնոցէն անցնող եւ առանցքին հետ անկիւն շինող ուղիղ գիծ, երկու կէտի վրայ կոնագծին կը պատահի։

Ցուցում. Դնենք որ ՀՄ այսպիսի գիծ մ'ըլլայ։ Պէտք է ՀԹով ՄՀԳ անկիւնը երկու բաժնել. ԹՄ ալ ԱԲ առանցքին հետ հաւասար հեռաւոր քաշելու է. ուստի եւ Մ կէտը՝ որուն վրայ ԹՄը ՀՄին կը հանդիպի, կոնագծին մէկ կէտն է։ Ինչու որ անկիւն ՄԹՀ = ԹՀԳ = ԹՀՄ, ուրեմն ՄԹ = ՄՀ (277)։

Նոյն եղանակաւ կը ցուցուի նաեւ որ ՀՄ գիծը, Մ'ին վրայ ալ կոնագիծը կը կտրէ։

280. ԱՀ = ԱԳ, ուրեմն ԳՀ = 2. ԱԳ = է առընթերաչափին կէսին։ (278)

281. Հնոցին վրայ կեցող կարգածը՝ առընթերաչափին կէսին հաւասար է։

282. Կոնագծին մէջ եղող ամէն մէկ կէտը՝ հնոցին աւելի մօտ է, քան թէ ուղղիչին։

Ցուցում. Դնենք որ Ճ այսպիսի կէտ մ'ըլլայ. պէտք է Ճին վրայէն ՀՄ բառնալի ճառագայթը, եւ ուղղիչին վրայ ալ ՃՑ ու ՄԹ ուղղորդ գծերը քաշել. ուստի եւ ան ատեն կ'ըլլայ.

ՀՄ = ՄԹ (277) < ՄՑ (52) < ՃՑ + ՃՄ (53)

եւ կամ՝

ՀՃ + ՃՄ < ՃՑ + ՃՄ

ուրեմն (առած)

ՀՃ < ՃՑ։

283. Իսկ ասոր հակառակ՝ կոնագծէն դուրս եղող ամէն մէկ կէտ, ուղղիչին աւելի մօտ է քան թէ հնոցին։

Ցուցում. Դնենք որ Ը այսպիսի կէտ մ'ըլլայ։ Պէտք է ԸՀ գիծը քաշել, որն որ Մին վրայ կոնագիծը կտրէ, ուղղիչին վրայ ալ ՄԹ ու ԼԸ ուղղորդ գծերը քաշելու է. ուստի եւ կ'ըլլայ՝

ԸՀ = ՄՀ + ՄԸ = ՄԹ + ՄԸ (277)
> ԹԸ (53) > ԼԸ (52)

284. Ուստի թէ որ կէտ մը աւելի հնոցին մօտ ըլլայ քան թէ ուղղիչին, կոնագծին մէջ կ'իյնայ. իսկ եթէ ուղղիչին աւելի մօտ ըլլայ քան թէ հնոցին, կոնագծէն դուրս կ'իյնայ։

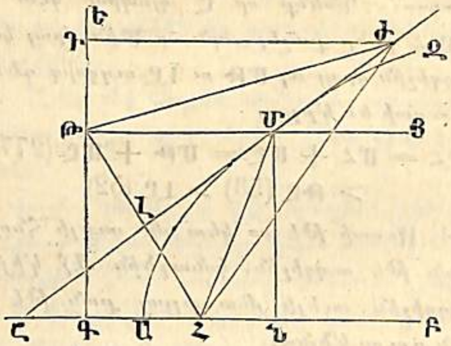
285. Ուղիղ գիծ մը՝ թէ որ կիսէ ան անկիւնը, զորն որ բառնալի ճառագայթն ուղղորդ գծին հետ ուղղիչին վրայ կը շինէ, կոնագծին հետ ուրիշ հասարակաց կէտ մը չունի, կամ թէ ըսեմ ան գիծը կոնագծին Շօշափողն է։

Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 53) Մ ըլլայ կոնագծին մէկ կէտը. ԹՄՀ ալ անկիւն մը, զորն որ ուղղիչին վրայ ԹՄ ուղղորդը ՀՄ ծրագրիչ ճառագայթին հետ կը շինէ, ուստի աս ՄՇ ուղիղ գիծը՝ որն որ անկիւնը կը կիսէ, կոնագծին հետ Մէն զատ հասարակաց կէտ մը չունի։

Ինչու որ Δ ԹՄԼ ≅ ՀՄԼ ըլլալով (39), ՄՇ ուղղորդ կ'անցնի ԹՀ գծէն։ Ուրեմն ՄՇին ուրիշ ամէն մէկ կէտը, զորօրինակ Ժ, այնչափ Թէն հեռու է, որչափ Հէն (47), ուստի եւ ՀԺ աւելի մեծ է քան թէ ուղղիչին վրայի ԺԴ ուղղորդ գիծը (52), եւ ըստ հետեւորդի Ժ կէտը կոնագծէն դուրս է։

286. Կոնագծին մէջ ուղիղ գիծ մը, որն որ շօշափման կէտէն անցնելով առանցքին հետ ալ հաւասար

(Ձեւ 53)



հեռաւոր ըլլայ, շօշափողին հետ ան անկիւնը կը շինէ, զորն որ ծրագրիչը շօշափողին հետ կը գծէ։

Ցուցում. Գիտենք որ ՄՑ ∥ ԱԲ ըլլայ, ուստի եւ Ա· ՀՄՂ = ԹՄՂ (285) եւ Ա· ԹՄՂ = ՑՄԺ (14). ուրեմն ՑՄԺ = ՀՄՂ է։

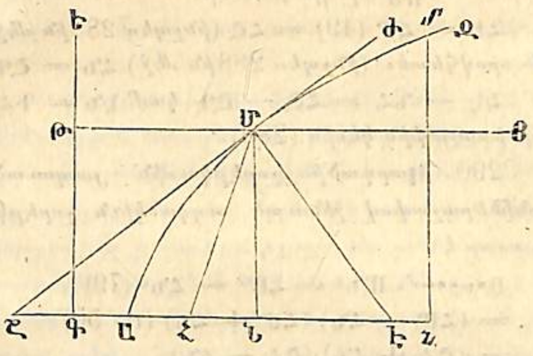
287. Շօշափողին շօշափման կէտին վրայ ձգուած ուղղորդ գծին մինչեւ առանցքը երկընցած մասը, զոր օրինակ ՄԻ, Կշռայէջ կը կոչուի։

Առանցքին ԻՆ մասը՝ ու հատման կէտէն սկսեալ մինչեւ կարգածը, Ընդկշռայէջ կ'անուանուի։

Իսկ առանցքին ՆՂ մասը, այսինքն կարգածէն (Ձեւ 54) սկսեալ մինչեւ շօշափողին ու առանցքին երկայնութեան հատման կէտը, Ընդշօշափող կ'անուանուի։

288. Կոնագծին ընդշօշափողը՝ միշտ յապաւածին կրկինին հաւասար է։

(Ձեւ 54)



Ցուցում. Որովհետեւ Ա · ՄՂՀ = ԺՄՑ (16) = ՂՄՀ (286) է, ուրեմն

ՂՀ = ՀՄ (49) = ՄԹ (277) = ՆԳ.

անկից ալ կը հետեւի որ՝

ՂՀ — ՀԳ = ՆԳ — ՀԳ կամ ՂԳ = ՀՆ.

եւ ըստ հետեւորդի՝

ՂԳ + ԱԳ = ՀՆ + ԱՀ. կամ ՂԱ = ԱՆ.

ասով ալ կ'ըլլայ՝

ՂՆ = 2 ԱՆ։

289. Կոնագծին ընդկշռաձիգը՝ միշտ առընթերաչափին կէսին հաւասար է։

Ցուցում. Որովհետեւ ՂԺին վրայ ՄԻ ուղղորդ է, եւ Ա·ՑՄԺ = ՀՄՂ (286) է, ուրեմն նաեւ՝

Ա·ԻՄԺ — ՑՄԺ = ԻՄՂ — ՀՄՂ

եւ կամ՝

Ա·ԻՄՑ = ԻՄՀ

բայց որովհետեւ նաեւ Ա·ԷՄՑ = ՄԷՀ (17), ուրեմն

Ա·ԷՄՀ = ՄԷՀ

ուստի եւ անկից ալ կը հետեւի.

ՀԷ = ՀՄ (49) = ՀՇ (ինչպէս 288ին մէջ). ուրեմն որովհետեւ (ինչպէս 288ին մէջ) ՀՆ = ՇԳ է,

ՀԷ — ՆՀ = ՀՇ — ՇԳ կամ ԷՆ = ԳՀ = առընթերաչափին կէսին (280)։

290. Կարգածին չորեքկուսին՝ յապաւածով ու առընթերաչափով շինուած ուղղանկիւն չորեքկուսոյն հաւասար է։

Ցուցում. ՄՆ^2 = ՀՄ^2 — ՀՆ^2 (79)
= (ՀՄ — ՀՆ) (ՀՄ + ՀՆ) (Ա· 50)
= (ՇՀ + ՀՆ) (ՇՀ — ՀՆ)
= (ԳՀ + ՀՆ + ՀՆ) (ԳՀ + ՀՆ — ՀՆ)
= (2·ԱՀ + 2·ՀՆ)· 2ԱՀ
= 2·ԱՆ·2·ԱՀ = 4·ԱՀ·ԱՆ

ուր ԱՆ յապաւածն է. իսկ 4·ԱՀ առընթերաչափը, ուրեմն 4 ԱՀ·ԱՆ՝ առընթերաչափով ու յապաւածով շինուած ուղղանկիւն չորեքկուսին կը բացայայտէ։

Ծանօթութիւն. Եթէ յապաւածը քով, կարգածը յով, իսկ առընթերաչափն ալ թով նշանակելու ըլլանք կ՚ըլլայ.

յ^2 = թք։

291. Կոնագծին մէջ կարգածներուն չորեքկուսիները յապաւածներուն պէս կը համեմատին։

Ցուցում. ՄՆ^2 = 4·ԱՀ·ԱՆ (290)

նոյնպէս՝

Մ՛Ն՛^{2} = 4·ԱՀ·ԱՆ՛

ուրեմն ՄՆ^2 : Մ՛Ն՛^{2} = 4·ԱՀ·ԱՆ : 4·ԱՀ·ԱՆ՛ = ԱՆ : ԱՆ՛։

292. Այս հակառակ ան գիծը՝ որուն մէջ կարգածներուն չորեքկուսին յապաւածներուն պէս իրարու հետ կը համեմատին, կոնագիծ է։

293. Առընթերաչափը՝ կարգածի մը եւ անոր վերաբերած յապաւածին երրորդ երկրաչափական համեմատական գիծն է։

Ցուցում. Որովհետեւ ՆՄ^2 = 4· ԱՀ · ԱՆ է, ուրեմն

ԱՆ : ՆՄ = ՆՄ : 4·ԱՀ (Ա· 89)

294. Եթէ կոնագծի մը Ա գագաթէն սկսեալ, առանցքին վրայ առընթերաչափին հաւասար ԱԲ գիծ մը առնուելու ըլլայ, եւ անի իբրեւ երկակտուր սեպելով վրան բոլորակ մը քաշուելու ըլլայ, ան ատեն աս բոլորակը բոլորովին կոնագծին մէջ կ՚իյնայ, եւ ուրիշ որ եւ իցէ բոլորակ որն որ առանցքին աւելի պզտիկ կտորն իրեն երկակտուր ունի, առաւել եւս բոլորովին կոնագծին մէջ կ՚իյնայ։ Իսկ ասոր հակառակ ան ամէն բոլորակ՝ որ առանցքին ԱԳ մասը, որն որ ԱԲէն մեծ է, իրեն երկակտուր ունի, երկու կէտի վրայ կոնագիծը կը կտրէ, եւ իր Ա գագաթէն անցնող աղեղը կոնագծէն դուրս կ՚իյնայ։

Ցուցում. 1. Դնենք որ ՆՄ կոնագծին մէջ կարգած մ՚ըլլայ (Ձեւ 55), որն որ ԱԲ երկակտորով բոլորակը Ցին վրայ կտրէ, ուրեմն կ՚ըլլայ.

ՆՄ^2 = ԱԲ·ԱՆ (290).

եւ

ՑՆ^2 = ԲՆ·ԱՆ (116)։

Բայց որովհետեւ քանի որ Ն կէտը, Աին ու Բին մէջ կ՚իյնայ, միշտ ԱԲը ՆԲէն մեծ կ՚ըլլայ, ապա ուրեմն նաեւ՝

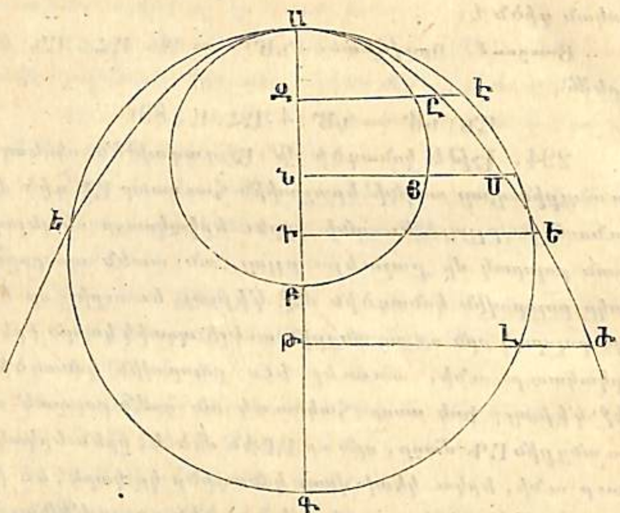
ԱԲ·ԱՆ > ՆԲ·ԱՆ

եւ ըստ հետեւորդի՝

ՆՄ^2 > ՆՑ^2, եւ ՆՄ > ՆՑ։

Ուրեմն կոնագծին կարգածը, իրեն վերաբերած

(Ձեւ 55)



բոլորակին մէջի ուղղորդէն միշտ մեծ է, եւ ըստ հետեւորդի ԱԲին բոլորտիքն եղող բոլորակը կոնագծին մէջ կ՚իյնայ:

2. Եւ որովհետեւ առանցքին ԱԲ մասէն պզտիկ կորին վրայ քաշուած բոլորակը, բոլորովին ԱԲ երկակորով բոլորակին մէջ կ՚իյնայ (123), ուրեմն եւս առաւել աս պզտիկ բոլորակը կոնագծին մէջ պիտ՚որ իյնայ:

3. Պէտք է ԱԴ = ԲԳ ընել, եւ Դին վրայ ալ ԴԵ ուղղորդը քաշել, որն որ Եին վրայ կոնագծին պատահի. ուստի աս Ե կէտը միանգամայն ԱԳ երկակորով բոլորակին կէտն է.

Ինչու որ՝

$\text{ԴԳ} = \text{ԱԳ} - \text{ԱԴ} = \text{ԱԳ} - \text{ԲԳ} = \text{ԱԲ}$

ուրեմն նաեւ՝

$\text{ԴԵ}^2 = \text{ԱԲ}\cdot\text{ԱԴ}$ (290) $= \text{ԴԳ}\cdot\text{ԱԴ}$ է.

եւ ըստ հետեւորդի ԴԵ ը՝ նաեւ բոլորակին մէջ կարգած մըն է (116):

Ուրեմն կոնագիծն ու ԳԱ երկակորով բոլորակը, իրարու հետ առանցքին երկու կողմն ալ Ա գագաթէն զատ ուրիշ կէտ մ՚ալ հասարակաց ունին:

4. Պէտք է Ա ու Դին մէջ ԶԸ կարգածը քաշել, որն որ ԱԳին բոլորտիքն եղող բոլորակը՝ Է կէտին վրայ կտրէ. ուստի եւ է՝

$\text{ԶԸ}^2 = \text{ԱԲ}\cdot\text{ԱԶ}$ (290) եւ $\text{ԶԷ}^2 = \text{ԶԳ}\cdot\text{ԱԶ}$(116).

բայց որովհետեւ $\text{ԱԲ} = \text{ԴԳ} < \text{ԶԳ}$, ըստ հետեւորդի $\text{ԱԲ}\cdot\text{ԱԶ} < \text{ԶԳ}\cdot\text{ԱԶ}$, եւ ասով ալ $\text{ԶԸ} < \text{ԶԷ}$ կ՚ըլլայ: Ուրեմն աս Է կէտը՝ կոնագծէն դուրս կ՚իյնայ:

Աս ցուցումը բոլորակին Ա ու Ե ին մէջ եղած ամէն կէտերուն համար ալ կ՚արժէ:

Ուրեմն աս բոլորակին աղեղը՝ որն որ Ա գագաթէն կ՚անցնի, կոնագծէն դուրս կ՚իյնայ:

5. Պէտք է Գին ու Դին մէջ ԹԺ կարգածը քաշել, որն որ Լ կէտին վրայ ԱԳ երկակորով բոլորակին դպչի. ուստի եւ՝

$\text{ԹԺ}^2 = \text{ԱԲ}\cdot\text{ԱԹ}$ (290), եւ $\text{ԼԹ}^2 = \text{ԹԳ}\cdot\text{ԱԹ}$.

բայց որովհետեւ $\text{ԹԳ} < \text{ԴԳ}$ կամ $< \text{ԱԲ}$ է, ուրեմն նաեւ $\text{ԹԼ} < \text{ԺԹ}$. ուստի բոլորակին մնացորդ մասը որն որ գագաթան ու Ե կէտին մէջ պարունակուած չէ, բոլորովին կոնագծին մէջ կ՚իյնայ:

Ուրեմն Եը՝ ԱԳ երկակորով բոլորակին ու կոնագծին իրար կտրելու կէտն է:

295. Չի կրնար ըլլալ ուրեմն որ կոնագծին գագաթէն բոլորակ մը քաշուի, որն որ թէ աս կէտերը շօ-

չափէ, եւ թէ կոնագծին ու ԱԲ երկակորով բոլորակին մէջտեղէն անցնի։ Անոր համար աս ԱԲ երկակորով բոլորակը, կոնագծին **գագաթան կորութեան բոլորակը** կ'անուանուի. այսինքն ան բոլորակը՝ որուն կորութիւնն ուրիշ ամէն կարելի եղած բոլորակներէն աւելի, կոնագծին Ային վրայ ունեցած կորութեանը կը մօտենայ։

Անոր երկակուրը՝ Ա **գագաթան կորութեան երկակորը** կ'անուանուի։

296. Ուրեմն կոնագծի մը իր գագաթին կորութեան կէս երկակուրը, կէս առընթերաչափին հաւասար է։

297. Երեսաց տարածութիւնը կոնագծի մը մասին որն որ յապաւածով ու անոր վերաբերեալ կարգածով կտրուած է, $\frac{2}{3}$ է ուղղանկիւն չորեքանկեան՝ որն որ յապաւածով ու կարգածով շինուած է։

Ցուցում. Գնենք որ ԱՄՆ կոնագծին երեսաց մէկ կտորն ըլլայ, եւ ԱՅՆՄ յապաւածով ու կարգածով (Ձեւ 56) շինուած ուղղանկիւն չորեքանկիւնը։ Պէտք է ՄՀ շօշափողը քաշել. գնենք որ մ, Մին մօտ կէտ մ'ըլլայ. բմն ∥ ՄՆ, ու սմյ ∥ ԱՆ ըլլայ։

Որչափ որ մ ը՝ Մին մօտ կ'առնուի, այնչափ նբՄՆ ուղղանկեան չորեքկուսին՝ կոնագծին ներսի կողմը կ'իյնայ, իսկ յմՄՅ ուղղանկիւնն ալ այնչափ աւելի կոնագծէն դուրս կ'իյնայ։

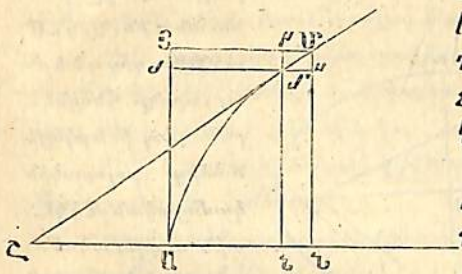
Բայց նբՄՆ ուղղանկիւնը՝ յմՄՅ ուղղանկիւնէն երկու անգամ մեծ է. ինչու որ՝

$$մս : սՄ = ՀՆ : ՆՄ \quad (91)$$

ուրեմն՝

$$մս \cdot ՆՄ = սՄ \cdot ՀՆ = սՄ \cdot 2\, ԱՆ \quad (288)$$
$$= 2\, սՄ \cdot ՄՅ.$$

(Ձեւ 56)



ուր մս · ՄՆ, ուղղանկիւն նբՄՆ չորեքանկիւնն է, իսկ 2 սՄ · ՄՅ, ուղղանկիւն յմՄՅ չորեքանկեան կրկինն է (75)։

Եւ որովհետեւ այսպէս մի եւ նոյն եղանակաւ, կոնագծէն դուրս եւ կոնագծէն ներս եղող եւ իրարու պատշաճող ամէն ուղղանկիւն չորեքանկիւններուն համար ալ կրնանք ցուցընել, ուրեմն ան կոնագծէն ներս եղողներուն գումարը կամ ԱՄՆ՝ միշտ կոնագծէն դուրս եղողներուն գումարէն կամ ԱՄՅ էն երկու անգամ մեծ է։

Արդ որովհետեւ՝

$$ԱՄՆ + ԱՄՅ = ԱՆՄՅ$$

ուրեմն՝

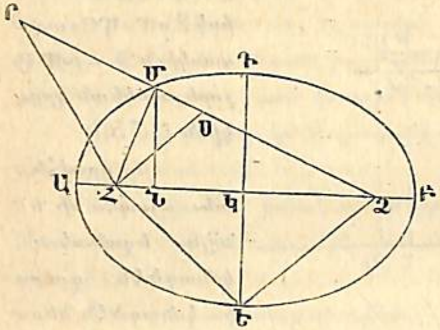
$$ԱՄՆ = \tfrac{2}{3}\, ԱՆՄՅ։$$

---

2. Երկայնաձիգ բոլորակ։

298. Գիծ մը՝ որուն ամէն մէկ կէտին ուրիշ երկու որոշեալ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեան գումարը հաւասար մեծութիւն ունի, **Երկայնաձիգ բոլորակ** կ'անուանուի. ինչպէս է ԱՄԲՆ (Ձեւ 57)։

(Ձեւ 57)



Երկու կէտերն երկայնաձիգ բոլորակին **Հնոցը** կ'անուանուին: Իսկ ՀՄ ու ԶՄ ուղիղ գծերն ալ, որոնք հնոցներէն դէպ ի երկայնաձիգ բոլորակին կամայական մէկ կէտին ուղղուած են, **Բռնոլի ճառագայթ** կամ **Ծրագրիչ ճառագայթ** կ'անուանուին:

Ծանօթութիւն. Թէ որ դերձան մը առնուի, որուն երկայնութիւնն երկու հնոցներուն իրարմէ ունեցած ՀԶ հեռաւորութենէն աւելի ըլլայ, եւ այս դերձանին ծայրերն՝ Հ եւ Զ երկու հնոցներուն վրայ հաստատուելու եւ գրչով մ'ալ ՀՄԶ ուղղութեամբ պրկած կոր դարձուելու ըլլան, այն ատեն գրչին ծայրն երկայնաձիգ բոլորակը կը գծէ:

299. ԱԲ ուղիղ գիծ մը՝ որն որ երկու հնոցներէն կ'անցնի, **Մեծ առանցք** կ'անուանուի. երկու հնոցներուն Կ միջին կէտը, երկայնաձիգ բոլորակին **Կենդրոնը** կ'անուանուի. ԴԵ ուղիղ գիծը՝ որն որ երկայնաձիգ բոլորակին կենդրոնէն անցնելով մեծ առանցքին վրայ ալ ուղղորդ կ'իյնայ, **Պզտիկ առանցք** կ'անուանուի. իսկ Ա ու Բը, մեծ առանցքին, Դ ու Են ալ պզտիկ առանցքին **Գագաթները** կը կոչուին:

Մեծ առանցքին վրայ ինկած կամայական ՄՆ ուղ-

ղորդը՝ **Կորգծ**, իսկ ԱՆ ու ԲՆ կտորներն ալ անոր վերաբերեալ **Յապաւածները** կ'անուանուին:

300. Մեծ ու պզտիկ առանցքներուն երրորդ համեմատական գիծը, **Արմնիբրալ** կ'անուանուի:

301. Երկայնաձիգ բոլորակին կազմութենէն անմիջապէս կը հետեւի, որ երկայնաձիգ բոլորակը դարձեալ իրեն դարձող գիծ մըն է:

302. Ծրագրիչ ճառագայթներուն գումարը, միշտ մեծ առանցքին հաւասար է:

Երկայնաձիգ բոլորակին կենդրոնը՝ միանգամայն մեծ առանցքին ալ միջին կէտն է:

303. Թէ որ երկայնաձիգ բոլորակէ մը դուրս եղող կէտէ մը, երկու հնոցին ալ երկու ուղիղ գծեր քաշուելու ըլլան, այն ատեն անոնց գումարը մեծ առանցքէն մեծ կ'ըլլայ:

Ցուցում. Գիտենք որ Ր երկայնաձիգ բոլորակէն դուրս կէտ մ'ըլլայ: Պէտք է երկու ՀՐ ու ԶՐ գծերը հնոցներէն քաշել, որոնք երկու տեղէն երկայնաձիգ բոլորակը կտրեն: Գիտենք որ մէկուն հատման կէտը Մ ըլլայ, ուստի եւ այն ատեն կ'ըլլայ.

$$\text{ՀՐ} + \text{ՐՄ} > \text{ՀՄ} \ (53)$$

ուրեմն՝

$$\text{ՀՐ} + \text{ՐՄ} + \text{ՄԶ} > \text{ՀՄ} + \text{ՄԶ}$$

կամ՝

$$\text{ՀՐ} + \text{ՐԶ} > \text{ԱԲ}:$$

304. Բայց թէ որ երկայնաձիգ բոլորակին ներքին կէտէ մը դէպ ի հնոցները գծեր քաշուելու ըլլան, այն ատեն անոնց գումարը մեծ առանցքէն պզտիկ կ'ըլլայ:

Ցուցում. Գիտենք որ Ս երկայնաձիգ բոլորակին ներքին մէկ կէտն ըլլայ: Պէտք է Ս կէտէն՝ ԶՄ քաշել, որով կ'ըլլայ.

$$\text{ՀՍ} < \text{ՀՄ} + \text{ՄՍ} \ (53)$$

ուրեմն՝

$$\text{ՀՍ} + \text{ՍԶ} < \text{ՀՄ} + \text{ՄՍ} + \text{ՍԶ}$$

կամ՝ $$\text{ՀՍ} + \text{ՍԶ} < \text{ԱԲ}$$

305. Նոյր հակառակ թէ որ կէտ մը դէպ ի երկու հնոցները քաշուած գծերուն գումարը, մեծ առանցքէն մեծ կամ պզտիկ ըլլալու ըլլայ, ան ատեն առջի դէպքին մէջ կէտն երկայնաձիգ բոլորակէն դուրս՝ իսկ երկրորդ դէպքին մէջ ներս կ'իյնայ:

306. Պզտիկ առանցքին գագաթման՝ երկու հնոցներէն ունեցած հեռաւորութիւնը, մեծ առանցքին կէսին հաւասար է:

Ցուցում. Որովհետեւ $\text{ՀԵ} + \text{ԵԶ} = \text{ԱԲ}$, իսկ $\text{ՀԵ} = \text{ԵԶ}$, ուրեմն նաեւ $\text{ՀԵ} = \frac{1}{2}\text{ԱԲ} = \text{ԱԿ}$:

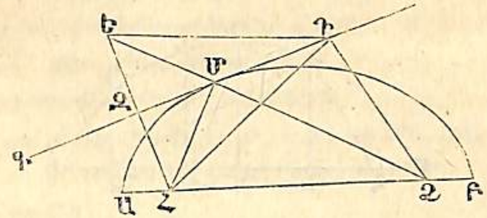
Ծանօթութիւն. Եթէ մեծ ու պզտիկ առանցքները ծանօթ ըլլան, ան ատեն աս կանոնիս միջնորդութեամբ երկու հնոցները կրնան գտնուիլ:

307. Ուղիղ գիծ մը՝ որ կը կիսէ ան անկիւնը, զորն որ բառնալի ճառագայթներէն մէկը մէկալ բառնալի ճառագայթին երկընցած մասովը՝ երկայնաձիգ բոլորակին մէկ կէտին վրայ կը շինէ, նոյն կէտին վրայ նաեւ երկայնաձիգ բոլորակը կը շօշափէ:

Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 58) ԴԳ ուղիղ գիծը, ՀՄԵ անկիւնն երկու բաժնէ, ուստի եւ աս գիծը երկայնաձիգ բոլորակին հետ Մ կէտէն ուրիշ հասարակաց կէտ չունենայ:

Ինչու որ եթէ $\text{ՄԵ} = \text{ՄՀ}$ ընելու ըլլանք, ան ատեն $\triangle\ \text{ԵՄՋ} \cong \text{ՀՄՋ}$ (39) կ'ըլլայ, ուրեմն ՋՄ՝ ՀԵին վրայ ուղղորդ ինկած կ'ըլլայ: Դնենք որ Դ կամայական

Ձեւ 58.



կէտ մ'ըլլայ ԳՄ ուղիղ գծին վրայ, ուստի եւ $\text{ԴԵ} = \text{ԴՀ}$ կ'ըլլայ (47): Բայց որովհետեւ դարձեալ է.

$$\text{ԴԵ} + \text{ԴԶ} > \text{ԵՄ} + \text{ՄԶ} \ (53)$$

եւ կամ $$\text{ՀԴ} + \text{ԴԶ} > \text{ՀՄ} + \text{ՄԶ} \text{ կամ } > \text{ԱԲ}$$

ուրեմն Դ՝ երկայնաձիգ բոլորակէն դուրս կէտ մըն է (305):

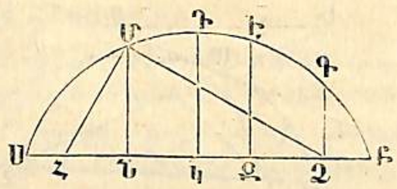
308. Ան անկիւնները՝ զորոնք շօշափողն երկու բառնալի ճառագայթներուն հետ շօշափման կէտին վրայ կը շինէ, իրարու հաւասար են:

Ցուցում. Որովհետեւ Ա. $\text{ԶՄԴ} = \text{ԵՄԳ}$ է (14) $= \text{ԳՄՀ}$ (307):

309. Կարգածին չորեքկուսին, իրեն վերաբերած յապաւածներով շինուած ուղղանկիւն չորեքկուսոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս որ պզտիկ առանցքին չորեքկուսին մեծ առանցքին չորեքկուսոյն կը համեմատի:

Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 59) կամայական ՄՆ կարգածը $=$ փ, $\text{ՆԿ} =$ ց ըլլայ. մեծ առանցքին կէսը $\text{ԱԿ} =$ ա, պզտիկ առանցքին կէսը $\text{ԴԿ} =$ բ, իսկ ՀԿ կամ հնոցին կենդրոնէն ունեցած հեռաւորութիւնը $=$ գ, ուստի եւ կ'ըլլայ.

Ձեւ 59.



$$ՀՄ^2 = ՄՆ^2 + ՀՆ^2 = փ^2 + (դ - ց)^2$$

ուրեմն $ՀՄ = \sqrt{[փ^2 + (դ - ց)^2]}$

իսկ $ՄԶ^2 = ՄՆ^2 + ՆԶ^2 = փ^2 + (դ + ց)^2$

ուրեմն $ՄԶ = \sqrt{[փ^2 + (դ + ց)^2]}$

եւ որովհետեւ՝

$$ՀՄ + ՄԶ = 2ա \text{ կամ } ՀՄ = 2ա - ՄԶ$$

ուրեմն նաեւ՝

$$\sqrt{[փ^2 + (դ - ց)^2]} = 2ա - \sqrt{[փ^2 + (դ + ց)^2]}$$

Իսկ թէ որ դ − ց, ու դ + ց արդեամբք չորեքկուսի ընելով, հաւասարութեան երկու կողմն ալ չորեքկուսի կարողութեան հանելու ըլլանք.

$$փ^2 + դ^2 - 2դց + ց^2 = 4ա^2 - 4ա\sqrt{[փ^2 + (դ + ց)^2]} + փ^2 + դ^2 + 2դց + ց^2$$

ուստի եւ՝

$$-4դց - 4ա^2 = -4ա\sqrt{[փ^2 + (դ + ց)^2]}$$

$$դց + ա^2 = ա\sqrt{[փ^2 + (դ + ց)^2]}$$

Դարձեալ նորէն չորեքկուսի ընելով կ'ըլլայ.

$$դ^2ց^2 + 2դցա^2 + ա^4 = ա^2[փ^2 + դ^2 + 2դց + ց^2]$$

ուստի եւ՝

$$ա^4 - ա^2ց^2 + դ^2ց^2 - դ^2ա^2 = ա^2փ^2$$

$$ա^4 - ա^2ց^2 - (դ^2ա^2 - դ^2ց^2) = ա^2փ^2$$

$$ա^2(ա^2 - ց^2) - դ^2(ա^2 - ց^2) = ա^2փ^2$$

$$(ա^2 - դ^2)(ա^2 - ց^2) = ա^2փ^2$$

ասկից ալ աս համեմատութիւնը կ'ելլէ.

$$փ^2 : ա^2 - ց^2 = ա^2 - դ^2 : ա^2$$

Արդ որովհետեւ $փ^2 = ՄՆ^2$ է,

$$ա^2 - ց^2 = (ա + ց)(ա - ց) = ԲՆ \cdot ՆԱ$$

$$ա^2 - դ^2 = ՀԴ^2 - ՀԿ^2\ (306) = ԴԿ^2.$$

$$ա^2 = ԱԿ^2$$

Եթէ աս զօրութիւնները վերի համեմատութեան մէջ փոխանակելու ըլլանք, կ'ըլլայ.

$$ՄՆ^2 : ԲՆ \cdot ՆԱ = ԴԿ^2 : ԱԿ^2$$

$$= 4ԴԿ^2 : 4ԱԿ^2\ (Ա.\ 92) = ԴԵ^2 : ԱԲ^2\ (298\text{ին Ձեւ}):$$

Ծանօթութիւն. Եթէ ԱԲ մեծ առանցքն ա ով, իսկ պզտիկ ԴԵ առանցքն ալ բ ով, ՄՆ կարգածն ալ փ ով, իսկ ԱՆ յապաւածը ք ով նշանակելու ըլլանք, ան ատեն ԲՆ յապաւածը կ'ըլլայ $= ԱԲ - ԱՆ = ա - ք$, իսկ ուղղանկիւն չորեքկուսին $ԲՆ \cdot ՆԱ = (ա - ք)ք = աք - ք^2$: Ուստի եւ վերի համեմատութենէն յառաջ կու գայ.

$$փ^2 : աք - ք^2 = բ^2 : ա^2$$

իսկ եթէ դարձեալ առընթերաչափը չ ով նշանակելու ըլլանք, ան ատեն (ըստ 300) կ'ըլլայ.

$$ա : բ = բ : չ, \text{ ուրեմն } բ^2 = աչ$$

ուստի եւ $փ^2 : աք - ք^2 = աչ : ա^2 = չ : ա$

$$ափ^2 = աչք - չք^2$$

եւ $փ^2 = չք - \frac{չք^2}{ա}$

310. Կարգածներուն չորեքկուսիներն իրարու հետ անոնց վերաբերած յապաւածներուն ուղղանկիւն չորեքանկիւններուն պէս կը համեմատին:

Ցուցում. Որովհետեւ՝

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{ԲՆ} \cdot \text{ՆԱ} = \text{ԴԵ}^2 : \text{ԱԲ}^2 \ (309)$$

եւ $\text{ԷԶ}^2 : \text{ԲԶ} \cdot \text{ԶԱ} = \text{ԴԵ}^2 : \text{ԱԲ}^2 \ (309)$

ուրեմն՝ $\text{ՄՆ}^2 : \text{ԲՆ} \cdot \text{ՆԱ} = \text{ԷԶ}^2 : \text{ԲԶ} \cdot \text{ԶԱ} \ (\text{Ա}.\ 104)$

311. Ասոր հակառակ եթէ գծի մը մէջ, կարգածներուն չորեքկուսիներն անոնց պատշաճեալ յապաւածներէն շինուած ուղղանկիւն չորեքկուսիներուն պէս իրարու համեմատելու ըլլան, այն գիծն երկայնաձիգ բոլորակ կ'ըլլայ:

Բոլորակն ալ երկայնաձեւ բոլորակ մը կրնայ մտածուիլ՝ որն որ հասարակ երկայնաձեւ բոլորակէն աս տարբերութիւնն ունի, որ իր կարգածներուն չորեքկուսին յապաւածներէն շինուած ուղղանկիւն չորեքկուսւոյն հաւասար է (116էն կը հետեւի): Ասոր մէջ երկու հնոցներն ալ մէկ կէտի այսինքն կենդրոնին վրայ կ'իյնան:

312. Հնոցին վրայի կարգածը, առընթերաչափին կէսին հաւասար է:

Ցուցում. $\text{ԳԶ}^2 : \text{ԱԶ} \cdot \text{ԶԲ} = \text{ԿԴ}^2 : \text{ԱԿ}^2 \ (309)$.
հիմայ հոս է՝

$$\text{ԱԶ} \cdot \text{ԶԲ} = (\text{ԱԿ} + \text{ԿԶ})\,(\text{ԱԿ} - \text{ԿԶ})$$
$$= \text{ԱԿ}^2 - \text{ԿԶ}^2 = \text{ԿԴ}^2 \ (306)$$

ուստի եւ՝

$$\text{ԳԶ}^2 : \text{ԿԴ}^2 = \text{ԿԴ}^2 : \text{ԱԿ}^2$$

եւ ըստ հետեւորդի նաեւ՝

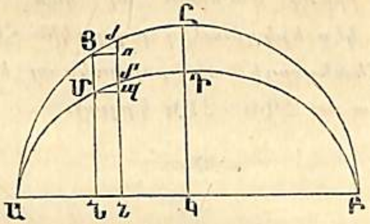
$$\text{ԳԶ} : \text{ԿԴ} = \text{ԿԴ} : \text{ԱԿ} \ (\text{Ա}.\ 98)$$

այսինքն ԳԶ մեծ առանցքին ու պզտիկ առանցքին կէսին երրորդ համեմատականն է, ուրեմն առընթերաչափին կէսին հաւասար է (300):

313. Եթէ երկայնաձիգ բոլորակին մեծ առանցքին վրայ՝ բոլորակ մը քաշուելու ըլլայ, այն ատեն երկայնաձիգ բոլորակին կարգածներն իրարու հետ այնպէս կը

համեմատին, ինչպէս անոնց վերաբերեալ հասարակ բոլորակին կարգածները:

Ձեւ 60.



Ցուցում. Որովհետեւ՝

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{մն}^2 = \text{ԱՆ} \cdot \text{ՆԲ} : \text{Ան} \cdot \text{նԲ} \ (310)$$

եւ դարձեալ՝

$$\text{ՅՆ}^2 : \text{յն}^2 = \text{ԱՆ} \cdot \text{ՆԲ} : \text{Ան} \cdot \text{նԲ} \ (311)$$

ուրեմն՝

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{մն}^2 = \text{ՅՆ}^2 : \text{յն}^2 \ (\text{Ա}.\ 104)$$

եւ ըստ հետեւորդի՝

$$\text{ՄՆ} : \text{մն} = \text{ՅՆ} : \text{յն} \ (\text{Ա}.\ 98):$$

314. Երկայնաձիգ բոլորակը՝ մեծ առանցքին վրայ եղած բոլորակին հետ այնպէս կը համեմատի, ինչպէս մեծ առանցքը պզտիկ առանցքին հետ:

Ցուցում. Որչափ որ յն՝ ՅՆին մօտ կ'ըլլայ, այնչափ ալ աւելի ՅոնՆ ու ՄպնՆ ուղղանկիւն չորեքկուսիները բոլորակին ՅյնՆ կտորին, եւ երկայնաձիգ բոլորակին ՄմնՆ կտորին հետ կը նոյնանան. եւ եւս առաւել կը համեմատի՝

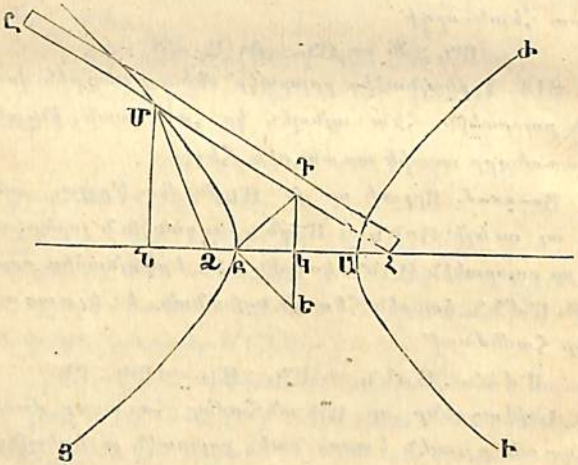
$$\text{ՄմնՆ} : \text{ՅյնՆ} = \text{ՄՆ} : \text{ՅՆ} = \text{ԴԿ} : \text{ԸԿ}$$

Ենթադրենք որ ԱԲ անհամար հաւասար մասեր բաժնուած ըլլալէն ետքը, նաեւ բոլորակն ու երկայնաձիգ բոլորակն ալ անհամար նեղ կտորներու բաժնուած ըլլայ. ուստի ան ատեն բոլորակին կտորն իրեն վերաբերած երկայնաձիգ բոլորակին կտորին հետ միշտ այնպէս կը համեմատի, ինչպէս ԴԿը՝ ԸԿին հետ կը համեմատի. ուրեմն իրենց գումարն ալ կամ թէ նաեւ կէս բոլորակը՝ կէս երկայնաձիգ բոլորակին հետ = ԴԿ : ԸԿ, եւ ըստ հետեւորդի նաեւ բոլորակն ալ երկայնաձիգ բոլորակին հետ = 2 ԴԿ : 2 ԸԿ կ'ըլլայ:

3. *Անեղի:*

315. Այն գիծը՝ որուն ամէն մէկ կէտերուն ուրիշ որոշեալ երկու կէտերէն ունեցած հեռաւորութեան տարբերութիւնը հաւասար է, **Անեղ** կը կոչուի:

Ձեւ 61.



Երկու Հ եւ Զ կէտերը՝ Հնոց կ'անուանուին. իսկ ՄՀ ու ՄԶ ուղիղ գծերն ալ՝ որոնք աւելոյն մէկ կէտէն դէպ ի երկու հնոցները քաշուած են, **Ծրագրիչ ճառագայթ** կը կոչուին:

Եւ որովհետեւ մի եւ նոյն ծրագրիչ ճառագայթներով կրնայ Մ կէտը կամ Զին եւ կամ Հին մօտ ըլլալ, անոր համար միշտ աւելոյն երկու պատշաճական ՄԲՅ ու ԺԱԻ մասեր կը պատշաճին:

Ծանօթութիւն. Իրօք աւելի մը քաշելու համար, ՀԸ կանոնի մը Ը ծայրին վրայ ԸՄԶ դերձան մը հաստատելու է, որն որ ՄՀ ու ՄԶ ծրագրիչ ճառագայթներուն տարբերութեան չափ կանոնէն կարճ ըլլայ: Կանոնին միւս ծայրն այնպէս մը Հ հնոցին վրայ դնելու է, որ կարենայ Հ կէտին բոլորտիքը դառնալ. իսկ դերձանին միւս ծայրն ալ Զ հնոցին վրայ հաստատելու է: Ուստի եթէ դերձանին ԸՄ մասը՝ Մ գրչով մը կանոնի կէտին վրայ պրկելով, կանոնը Հ կէտին բոլորտիքը դարձուելու ըլլայ, ան ատեն Մ գրիչը աւելոյն մէկ մասը կը գծէ: Իսկ աւելոյն միւս պատշաճական մասն ալ աս եղանակաւ կը գծուի, թէ որ կանոնին ծայրը Հ կէտին վրայէն վերցնելով, Զ կէտին վրայ հաստատուելու ըլլայ:

316. Եթէ երկու հնոցներն ալ իրարու հետ ուղիղ գծով մը կապուելու ըլլան, ան ատեն Ա ու Բ կէտերն աւելոյն **Գագաթը** կ'անուանուին: Իսկ երկու հնոցներուն միջին Կ կէտը՝ աւելոյն **Կեդրոնը** կը կոչուի, ԱԲը **Թափանցանց առանցքը** կամ **Խոտորնակ առանցքը** կ'ըսուի: Իսկ եթէ թափանցանց առանցքին Կ կէտին վրայ՝ ուղղորդ գիծ մը ձգելու ըլլանք, եւ ԲԴ = ԲԵ = ԿԶ ըլլալու ըլլայ, ան ատեն ԴԵ ալ **Զուգակից առանցքը** կ'ըսուի:

Թափանցանց առանցքին երկընցած մասին վրայ

ձգուած ՄՆ ուղղորդը, Կորֆոծ կ'անուանուի. իսկ ԲՆ ալ տարր վերաբերեալ Ցոցատոծն է:

317. Թափանցանց եւ զուգակից առանցքներուն երրորդ համեմատական գիծը, Արըններուէ կը կոչուի:

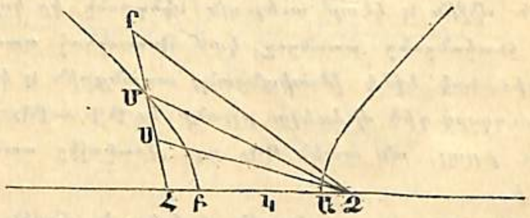
318. Աւելոյն մեկնութենէն (ինչպէս նաեւ անոր իրական կազմութեան եղանակէն) անընդմիջապէս կը հետեւի որ, աւելոյն սրունները երկընցած թափանցանց առանցքէն երթալով կը հեռանան; եւ ըստ հետեւորդի աւելոյն երկու մասերն ալ գագաթին հակառակ կողմը չեն կրնար իրարու գալ եւ միանալ:

319. Երկու ծրագրիչ ճառագայթներուն տարբերութիւնը՝ միշտ թափանցանց առանցքին հաւասար է:

Աւելոյն կենդրոնը՝ թափանցանց առանցքին ալ միջին կէտն է:

320. Եթէ աւելիէն դուրս եղող կէտէ մը՝ երկու հնոցներուն գծեր քաշուելու ըլլան, ան ատեն ասոնց տարբերութիւնը թափանցանց առանցքէն պզտիկ կ'ըլլայ:

Ձեւ 62.



Ցուցում. Որովհետեւ (Ձեւ 62) ԶՐ < ԶՄ + ՄՐ (53) է, ուրեմն՝

ԶՐ — ՐՀ < ԶՄ + ՄՐ — ՐՀ
ԶՐ — ՐՀ < ԶՄ + ՄՐ — ՄՐ — ՄՀ
ԶՐ — ՐՀ < ԶՄ — ՄՀ

եւ կամ՝

ԶՐ — ՐՀ < ԱԲ (319):

321. Իսկ տարր հակառակ աւելոյն ներսի կէտերէն քաշուած գծերուն տարբերութիւնը, թափանցանց առանցքէն մեծ է:

Ցուցում. Որովհետեւ ԶՍ + ՍՄ > ՄԶ (235) է, ուրեմն նաեւ՝

ԶՍ + ՍՄ — ՄՀ > ԶՄ — ՄՀ
ԶՍ + ՍՄ — ՍՄ — ՍՀ > ԶՄ — ՄՀ
ԶՍ — ՍՀ > ԶՄ — ՄՀ

եւ կամ՝

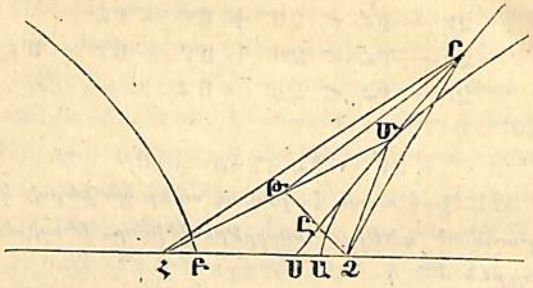
ԶՍ — ՍՀ > ԱԲ (319):

322. Նոր հակառակ եթէ կէտէ մը երկու հնոցներուն քաշուած գծերուն տարբերութիւնը՝ թափանցանց առանցքէն պզտիկ կամ մեծ ըլլալու ըլլայ, ան ատեն ան կէտն Աւելիէն կամ դուրս է կամ ներս. արդէն յայտնի է որ ետքի դէպքիս մէջ, կէտը կը գտնուի Աւելոյն ան մասին մէջ, որուն հնոցն իրեն աւելի մերձաւորագոյն է:

323. Ուղիղ գիծ մը, որ կիսէ ան անկիւնն որն որ երկու ծրագրիչ ճառագայթներն Աւելոյն մէկ կէտին վրայ կը շինեն, նոյն կէտին վրայ նաեւ Աւելին կը շօշափէ:

Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 63) ՄԸ ուղիղ գիծ մ'ըլլայ որ ԶՄՀ անկիւնը կիսէ. ուստի ՄԸ ուղիղ գծին վրայ, միակ Մ կէտն է որ Աւելոյնն է, ուրիշ որ եւ իցէ կէտ, ինչ-

Ձեւ. 63.



պէս ըսենք Ր կէտը Աւելւոյն չէ։ Ինչու որ եթէ ՄԹ = ՄՁ ընելու ըլլանք, ան ատեն ՐԹ = ՐՁ կ'ըլլայ. իսկ արդ որովհետեւ՝

$$\text{ՐՀ} < \text{ՐԹ} + \text{ԹՀ}\ (53)\ \text{է},$$

ուրեմն նաեւ՝

$$\text{ՐՀ} - \text{ՐՁ} < \text{ՐԹ} + \text{ԹՀ} - \text{ՐԹ}$$

կամ $\text{ՐՀ} - \text{ՐՁ} < \text{ԹՀ}$. այսինքն $< \text{ՀՄ} - \text{ՄԹ}$, այսինքն $< \text{ՀՄ} - \text{ՄՁ}$, որ է $< \text{ԱԲ}$ (319). ուրեմն Ր Աւելիէն դուրս կէտ մըն է (322)։

324. Կարգածին չորեքկուսին՝ յապաւածին ու յապաւածին չափ երկընցած թափանցանց առանցքին ուղղանկիւն չորեքկուսոյն հետ այնպէս կը համեմատի, ինչպէս զուգակից առանցքին չորեքկուսին՝ թափանցանց առանցքին չորեքկուսոյն հետ կը համեմատի։

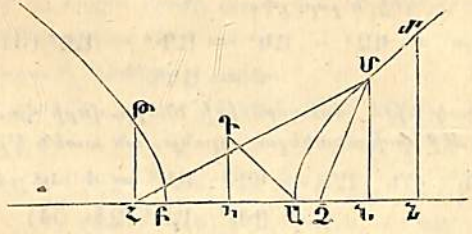
Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 64) $\text{ԱԿ} = ա$ ըլլայ, $\text{ԿԴ} = բ$, $\text{ԿՁ} = գ$, $\text{ՄՆ} = փ$, իսկ $\text{ԿՆ} = ց$, ուստի կ'ըլլայ.

$$\text{ՀՄ}^2 = \text{ՆՄ}^2 + \text{ՆՀ}^2 = փ^2 + (ց + գ)^2$$

ուրեմն՝

$$\text{ՀՄ} = \sqrt{[փ^2 + (ց + գ)^2]}$$

Ձեւ. 64.



դարձեալ՝

$$\text{ՁՄ}^2 = \text{ՆՄ}^2 + \text{ՆՁ}^2 = փ^2 + (ց - գ)^2$$

ուրեմն՝

$$\text{ՁՄ} = \sqrt{[փ^2 + (ց - գ)^2]}$$

Բայց որովհետեւ դարձեալ՝

$$\text{ՀՄ} - \text{ՁՄ} = \text{ԱԲ},\ \text{կամ}\ \text{ՀՄ} = \text{ԱԲ} + \text{ՁՄ}\ \text{է},$$

անոր համար ալ կ'ըլլայ.

$$\sqrt{[փ^2 + (ց + գ)^2]} = 2ա + \sqrt{[փ^2 + (ց - գ)^2]}$$

$$փ^2 + ց^2 + 2ցգ + գ^2 = 4ա^2 + 4ա\sqrt{[փ^2 + (ց - գ)^2]}$$
$$+ փ^2 + ց^2 - 2ցգ + գ^2$$

$$4գց - 4ա^2 = 4ա\sqrt{[փ^2 + (ց - գ)^2]}$$

$$գց - ա^2 = ա\sqrt{[փ^2 + (ց - գ)^2]}$$

$$գ^2ց^2 - 2գցա^2 + ա^4 = ա^2(փ^2 + ց^2 - 2ցգ + գ^2)$$

$$գ^2ց^2 - գ^2ա^2 + ա^4 - ա^2ց^2 = ա^2փ^2$$

$$գ^2(ց^2 - ա^2) - ա^2(ց^2 - ա^2) = ա^2փ^2$$

$$(գ^2 - ա^2)(ց^2 - ա^2) = ա^2փ^2$$

Ասկից ալ աս համեմատութիւնը յառաջ կու գայ.

$$փ^2 : ց^2 - ա^2 = գ^2 - ա^2 : ա^2$$

Ուստի եւ հոս է $փ^2 = \text{ՄՆ}^2$

$ց^2 - ա^2 = (ց - ա)(ց + ա) = ԱՆ \cdot ԲՆ$
= Յապաւածին ու յապաւածին չափ երկընցած թափանցանց առանցքին ուղղանկիւն չորեքկուսւոյն.

$գ^2 - ա^2 = ԿՁ^2 - ԱԿ^2 = ԱԴ^2 - ԱԿ^2\ (316) = ԿԴ^2$

եւ $ա^2 = ԱԿ^2$

Իսկ եթէ աս գործութիւնները վերի համեմատութեան մէջ փոխանակելու ըլլանք, ան ատեն կ՚ըլլայ.

$$ՄՆ^2 : ԲՆ \cdot ԱՆ = ԿԴ^2 : ԱԿ^2 = 4\,ԴԿ^2 : 4\,ԱԿ^2$$
$$= ԴԵ^2 : ԱԲ^2\ (Ձեւ\ 64)$$

Ծանօթութիւն. Եթէ ԱԲ թափանցանց առանցքն ա ով, ԴԵ զուգակից առանցքն ալ բ ով նշանակելու ըլլանք, իսկ ՆԱ կարգածն փ ով, եւ ԱՆ յապաւածն ալ ք ով, ան ատեն կ՚ըլլայ $ԲՆ = ա + ք$, իսկ ուղղանկեան չորեքկուսին $ԲՆ \cdot ԱՆ = (ա + ք)\,ք = աք + ք^2$ · ուստի եւ անկից ալ $փ^2 : աք + ք^2 = բ^2 : ա^2$
իսկ եթէ առընթերաչափն ալ չ ով նշանակելու ըլլանք ան ատեն (ըստ 317) կ՚ըլլայ.

$ա : բ = բ : չ$ · ուրեմն $բ^2 = աչ$

անկից ալ կը հետեւի $փ^2 : աք + ք^2 = աչ : ա^2 = չ : ա$

$$ափ^2 = աչք + չք^2$$

եւ $$փ^2 = չք + \frac{չք^2}{ա}$$

325. **Կ**արգածներուն չորեքկուսիները յապաւածին ու յապաւածին չափ երկընցած թափանցանց առանցքին ուղղանկիւն չորեքկուսիներուն պէս իրարու կը համեմատին:

Ցուցում. Գնենք որ ըլլայ՝

$ՄՆ^2 : ԲՆ \cdot ԱՆ = ԿԴ^2 : ԱԿ^2\ (324)$

եւ $մն^2 : Բն \cdot ան = ԿԴ^2 : ԱԿ^2\ (324)$

ուրեմն՝

$ՄՆ^2 : ԲՆ \cdot ԱՆ = մն^2 : Բն \cdot ան\ (Ա\ 104)$:

326. **Ա**սոր հակառակ եթէ գծի մը մէջ այսպիսի համեմատութիւն մը կրնայ տեղի ունենալ, ան ատեն ան գիծն Աւելի մըն է:

327. **Հ**նոյին վրայի կարգածն առընթերաչափին կէսին հաւասար է:

Ցուցում. Գնենք որ ըլլայ՝

$ՃԹ^2 : ԲՃ \cdot ՃԱ = ԿԴ^2 : ԱԿ^2\ (324)$

Հոս է՝

$ԲՃ \cdot ՃԱ = (ԿՃ - ԲԿ)(ԿՃ + ԲԿ)$
$= (ԿՁ - ԱԿ)(ԿՁ + ԱԿ) = ԿՁ^2 - ԱԿ^2$
$= ԱԴ^2 - ԱԿ^2 = ԿԴ^2$

ուստի անոր համար՝

$ՃԹ^2 : ԿԴ^2 = ԿԴ^2 : ԱԿ^2$

եւ ըստ հետեւորդի՝

$ՃԹ : ԿԴ = ԿԴ : ԱԿ\ (Ա\ 98)$

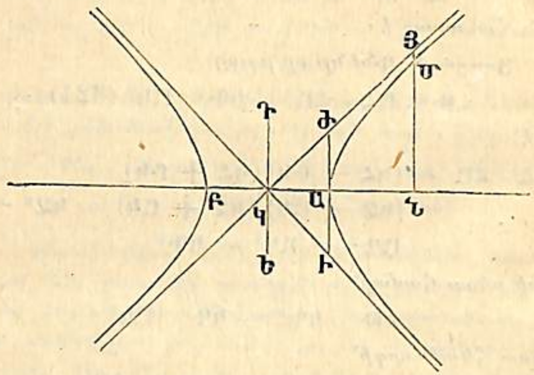
եւ կամ $2ՃԹ : 2ԿԴ = 2ԿԴ : 2ԱԿ$

այսինքն հնոյին վրայի կարգածին կրկնապատիկը, թափանցանց եւ զուգակից առանցքներուն երրորդ համեմատական գիծն է, որ է ըսել առընթերաչափին հաւասար է (317):

328. **Ե**թէ աւելույն գագաթն ուղղորդ գիծ մը ձգուելու ըլլայ, եւ աս ուղղորդն ալ զուգակից առանցքին կէսին հաւասար ըլլայ. դարձեալ եթէ աս ուղղորդին ծայրէ կէտն աւելույն կեդրոնին հետ ուղիղ գծով մը կապուելու ըլլայ, ան ատեն աս ուղիղ գիծն աւելույն երբեք չի հանդիպիր, բայց որչափ աս ուղիղ գիծն ու աւելին երկընցընելու ըլլանք, այնչափ ուղիղ գիծն աւելույն կը մերձենայ:

Ցուցում. 1. Պէտք է ԱԺԷՆ ∥ ՑՆ քաշել, որն որ աւելին Մ կէտին վրայ կորէ (Ձեւ 65). ուստի եւ կ՚ըլլայ.

Ձեւ 65.



$$\text{ՆՅ} : \text{ԿՆ} = \text{ԺԱ} : \text{ԱԿ}.\ (91) = \text{ԿԴ} : \text{ԱԿ}$$

ուրեմն՝

$$\text{ՆՅ}^2 : \text{ԿՆ}^2 = \text{ԿԴ}^2 : \text{ԱԿ}^2\ (\text{Ա}.\ 98)$$

եւ դարձեալ է.

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{ԱՆ} \cdot \text{ԲՆ} = \text{ԿԴ}^2 : \text{ԱԿ}^2\ (324)$$

անոր համար՝

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{ԱՆ} \cdot \text{ԲՆ} = \text{ՆՅ}^2 : \text{ԿՆ}^2\ (\text{Ա}.\ 104)$$

Որովհետեւ հոս՝

$$\text{ԱՆ} \cdot \text{ԲՆ} = (\text{ԿՆ} - \text{ԱԿ})\ (\text{ԿՆ} + \text{ԱԿ}) = \text{ԿՆ}^2 - \text{ԱԿ}^2\ \text{է},$$

Անոր համար ալ՝

$$\text{ՄՆ}^2 : \text{ՆՅ}^2 = \text{ԿՆ}^2 - \text{ԱԿ}^2 : \text{ԿՆ}^2$$

Բայց որովհետեւ հոս $\text{ԿՆ}^2 - \text{ԱԿ}^2$ միշտ ԿՆ^2էն աւելի պզտիկ է, անոր համար որչափ որ կ'ուզուի ԿՆ մեծ

առնուի, ի վերայ այսր ամենայնի միշտ $\text{ՆՄ}^2 < \text{ՆՅ}^2$, ուստի եւ ՆՄ < ՆՅ, ուրեմն ուղիղ գիծն երբեք աւելւոյն չի հանդիպիր:

2. $\text{ԿՆ}^2 - \text{ԱԿ}^2 : \text{ԿՆ}^2 = 1 - \frac{\text{ԱԿ}^2}{\text{ԿՆ}^2} : 1$ (Ա. 92):

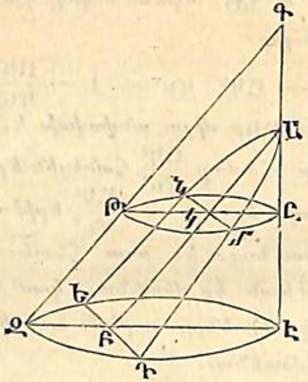
Եւ որովհետեւ ԱԿը միշտ անփոփոխ է, իսկ ԿՆ միշտ կը մեծնայ, անոր համար $\frac{\text{ԱԿ}^2}{\text{ԿՆ}^2}$ հանելին երթալով կը պզտիկնայ, ուստի եւ $1 - \frac{\text{ԱԿ}^2}{\text{ԿՆ}^2}$ երթալով 1ին զօրութեան կը մօտենայ, եւ ըստ հետեւորդի ՄՆ^2 միշտ ՆՅ^2ին զօրութեան կը մօտենայ, կամ ՄՆ միշտ ՆՅին զօրութեանը կը մօտենայ. ուրեմն աւելին երթալով ուղիղ գծին կը մօտենայ:

329. Ուղիղ գիծ մը՝ որ շարունակ կոր գծի մը կը մօտենայ եւ երբեք անոր չի հանդիպիր, ան կոր գծին Անհանդիպական գիծը կ'անուանուի:

330. Գտնենք որ ԶԴԷ ան երեքանկիւնն ըլլայ, որն որ կողին առանցքին վրայէն անցնելով մի եւ նոյն կողին ԶԴԷԵ խարսխի երեսին վրայ ուղղորդ կը կենայ. ԵԱԴ ալ կողին մէկ կտրուածն ըլլայ՝ որն որ ԶԴԷ երեքանկեան վրայ ուղղորդ կը կենայ. ուստի եթէ ԱԲ եւ ԶԴ իրարու հաւասար հեռաւոր ըլլալու ըլլան, ան ատեն ԵԱԴ ալ Կոնաձեւ մը կ'ըլլայ:

Ցուցում. Գտնենք որ (Ձեւ 66) ԹՆԸՄ կտրուած մ'ըլլայ եւ ԶԵԷԴ խարսխին հետ հաւասար հեռաւոր, ուստի ասի բոլորակ մըն է (176), որ ինչպէս դիւրաւ կը ցուցուի △ ԶԴԷ երեքանկեան վրայ ալ ուղղորդ կը կենայ: ԵԱԴ կտրուածքը՝ մն գծով աս բոլորակը կը կտրէ՝ եւ ԵԴ գծով ալ խարիսխը կը կտրէ. ուստի այսպէս կմ գիծը՝ ԱԲին, եւ ԹԸին, իսկ ԲԴ ալ՝ ԱԲին ու ԶԷին վրայ ուղղորդ կը կենան (152):

Ձեւ 66.



Արդ ԹՄԸ բոլորակին մէջ է

ԿՄ^2 = ԹԿ · ԿԸ (116)

իսկ ԶԴԷ բոլորակին մէջն ալ՝

ԲԴ^2 = ԶԲ · ԲԷ (116)

ուրեմն նաեւ՝

ԿՄ^2 : ԲԴ^2 = ԹԿ · ԿԸ : ԶԲ · ԲԷ:

Եւ որովհետեւ հոս ԹԸ ∥ ԶԷ, (147) իսկ ԱԲ ∥ ԶԴ է, անոր համար ալ ԹԿԲԶ հաւասար հեռաւոր ձեւ մըն է (25), ուրեմն ԹԿ = ԶԲ (56) ուստի եւ անկից յառաջ կու գայ՝

ԿՄ^2 : ԲԴ^2 = ԿԸ : ԲԷ (Ա. 92)

իսկ △ ԲԱԷին մէջն ալ է.

ԿԸ : ԲԷ = ԱԿ : ԱԲ (91)

եւ ըստ հետեւորդի՝

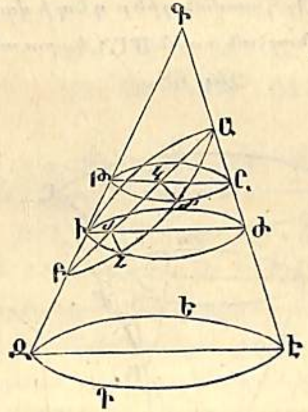
ԿՄ^2 : ԲԴ^2 = ԱԿ : ԱԲ (Ա. 104):

Հոս կրնան ԿՄ ու ԲԴ իբրեւ կարգածներ համարուիլ, որոնք ԱԿ ու ԱԲ յապաւածներուն պատշաճին: Եւ որով-

հետեւ հոս կարգածներուն չորեքկուսիները յապաւածներուն պէս իրարու հետ կը համեմատին, ուրեմն ԱՄԴ կոնագիծ մըն է (292):

331. Եթէ անկէ առջի համարին մէջ դրած ենթադրութեան համաձայն, կտրուածին ԱԲ գիծը կոնին մէկ կողին վրայ դէպ ի վար միտելու ըլլայ, ան ատեն ԱՄԲ կտրուածն Երկայնաձեւ Բոլորակ մը կ'ըլլայ:

Ձեւ 67.



Ցուցում. Գնենք որ (Ձեւ 67) ԹՄԸ ու ԻՆԺ խարիս-խի երեսին հետ հաւասար հեռաւոր կտրուածներ ըլլան. որոնք ԱՄԲ կտրուածը ԿՄ ու ՅՆին վրայ կտրեն, ուստի եւ ան ատեն կ'ըլլայ.

ԿՄ^2 = ԹԿ · ԿԸ · իսկ ՅՆ^2 = ԻՅ · ՅԺ (116)

Ուստի նաեւ՝

ԿՄ^2 : ՅՆ^2 = ԹԿ · ԿԸ : ԻՅ · ՅԺ

Բայց որովհետեւ նաեւ՝

ԹԿ : ԻՅ = ԿԲ : ՅԲ (91)

ԿԸ : ՅԺ = ԱԿ : ԱՅ (91)

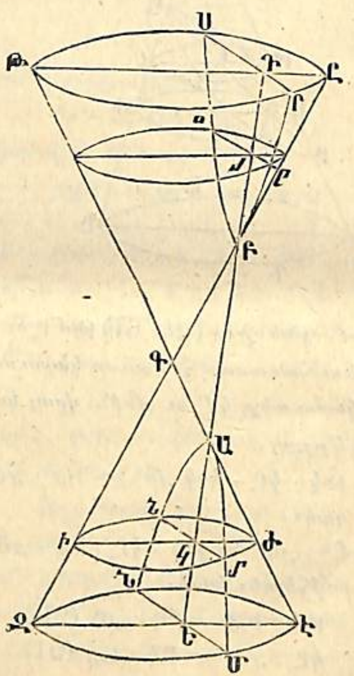
ուրեմն նաեւ $\text{Թկ} \cdot \text{կԸ} : \text{Իյ} \cdot \text{յԺ} = \text{Ակ} \cdot \text{կԲ} : \text{Այ} \cdot \text{յԲ}$ (Ա 96)
եւ ըստ հետեւորդի նաեւ՝

$$\text{կմ}^2 : \text{յն}^2 = \text{Ակ} \cdot \text{կԲ} : \text{Այ} \cdot \text{յԲ} \quad (\text{Ա } 104)$$

այսինքն ԱմԲ կորուածին մէջ կարգածներուն չորեքկուսիներն իրենց վերաբերած ԱԲ գծին հատածներով շինուած ուղղանկիւններուն պէս իրարու կը համեմատին։ Ուրեմն ԱմԲ երկայնաձեւ բոլորակ մըն է (311)։

332. Եթէ վերը 330 ու 331 համարներուն ենթադրութեանցը մէջ ԱԵ հատման գիծը դէպ ի վար կոնին երկու կողմերէն հեռանայ, ան ատեն ՄԱՆ կորուածը Աւելի է։

Ձեւ 68.



Ցուցում. Դնենք որ (Ձեւ 68) ԻԺՆ՝ ԶՄԵ խարսխի երեսին հետ հաւասար հեռաւոր ըլլայ, եւ ԵԱ-ին երկընցած մասը ԶԳ-ին երկընցած մասին Բ կէտին վրայ հանդիպի, ուստի կ'ըլլայ.

$$\text{Եմ}^2 = \text{ԶԵ} \cdot \text{ԵԷ} \quad (116)$$

եւ $$\text{մկ}^2 = \text{Իկ} \cdot \text{կԺ} \quad (116)$$

ուստի եւ՝

$$\text{ԵՄ}^2 : \text{մկ}^2 = \text{ԶԵ} \cdot \text{ԵԷ} : \text{Իկ} \cdot \text{կԺ}$$

բայց որովհետեւ՝

$$\text{ԶԵ} : \text{Իկ} = \text{ԵԲ} : \text{կԲ}$$

եւ $$\text{ԵԷ} : \text{կԺ} = \text{ԱԵ} : \text{Ակ},$$

ուրեմն նաեւ՝

$$\text{ԶԵ} \cdot \text{ԵԷ} : \text{Իկ} \cdot \text{կԺ} = \text{ԱԵ} \cdot \text{ԵԲ} : \text{Ակ} \cdot \text{կԲ} \quad (\text{Ա } 96)$$

եւ ըստ հետեւորդի.

$$\text{ԵՄ}^2 : \text{կմ}^2 = \text{ԱԵ} \cdot \text{ԵԲ} : \text{Ակ} \cdot \text{կԲ} \quad (\text{Ա } 104)$$

Ուրեմն ՄԱՆ կորուածն Աւելի մըն է, իսկ ԱԲ ալ անոր թափանցանց առանցքը։ — Եթէ ԶԳԷ կոնին կողերը Գ-էն վեր երկընցուելու ըլլան, եւ կորուածքին ալ հարթ երեսն Ա-էն դէպ ի վեր երթալու ըլլայ, ՐԲՍ կորուածք մը կ'ելլէ, որ ՄԱՆ-ին հետ պատշաճական է եւ անոր հետ մէկտեղ աւելին կ'ամբողջացընէ։

ՄԱՏԵԱՆՔ

ԱՐԱՄԵԱՆ ԸՆԿԵՐՈՒԹԵԱՆ

	Ֆ.	Ս.
Ա. Նկարագիր ուսմանց, որ է Օգուտ իւրաքանչիւր մասանց դրագիտութեան, ի Հ. Մատաթիա Վ. Գարագաշեան. 1845։	1	50
Բ. Գիտութիւն տէրութեանց կամ Վիճակագրութիւն Եւրոպայ, ի Հ. Ղեւոնդ Վ. Յովհաննեան. Հատ. Ա. 1847։	1	75
Գ. Գիտութիւն վաճառականութեան (աշխ.). ի Հ. Ղուկաս Վ. Տէրտէրեան, 1848։	2	50
Դ. Պատմութիւն Հայոց, Հայկազեանց տէրութեան սկսեալ մինչեւ մեր ժամանակը, ի Հ. Եփրեմ Վ. Չագըճեան. 1851։	3	25
Ե. Պատմութիւն քաղաքականութեան Եւրոպական տէրութեանց ընդհանրապէս, ի Հ. Ղեւոնդ Վ. Յովհաննեան. Հատ. Ա. 1856։	2	50
Զ. Պատմութիւն քաղաքականութեան Եւրոպական տէրութեանց ընդհանրապէս, ի Հ. Ղեւոնդ Վ. Յովհաննեան. Հատ. Բ. 1856։	2	50
Է. Գործնական Արուեստախօսութիւն, կամ Գլխաւոր արուեստներու եւ անոնց դիւրին կերպով գործադրութեան առաջնորդ, ի Հ. Եփրեմ. Վ. Չագըճեան. 1857։	1	50
Ը. Ատլաս կամ Աշխարհացոյց տախտակք ի պէտս Ազգային դպրոցաց, յօրինեալ եւ ծրագրեալ ի Հ. Աստուածատուր Վ. Աւագեան. 1857։	12	78
Թ. Պատմութիւն քաղաքականութեան Եւրոպական տէրութեանց ընդհանրապէս, ի Հ. Ղեւոնդ Վ. Յովհաննեան. Հատ. Գ. 1857։		
Ժ. Պատմութիւն քաղաքականութեան Եւրոպական տէրութեանց ընդհանրապէս, ի Հ. Ղեւոնդ Վ. Յովհաննեան. Հատ. Դ. 1860։	2	50
ԺԱ. Գործնական Վաճառագիտութիւն ի պէտս Վաճառականաց, Արուեստաւորաց, Դպրոցաց եւ Տանուտէրաց, ի Հ. Եւգինէոս Վ. Համբարեան. 1867։	3	—
ԺԲ. Լուդովիկոսի Թիլլի սկզբնական դասագիրք պարզ ուսողութեան թարգմանեց Հ. Պետրոս Վ. Պիւլպիւլճե[illegible]	2	50