

УДК: 524.68—4

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛОГИ
S-ЭЛЛИПСОИДОВ РИМАНА С ГАЛО

М. Г. АБРАМЯН

Поступила 15 октября 1985

Принята к печати 20 мая 1986

Сфероидальное гало обеспечивает равновесие бесстолкновительных аналогов S-эллипсоидов Римана с осцилляциями частиц по направлению их вращения. Последовательности бесстолкновительных трехосных эллипсоидов начинаются и кончаются динамически устойчивыми членами бесстолкновительных вложенных сфероидов. Как жидкие, так и бесстолкновительные S-эллипсоиды Римана со слабым гало обладают свойствами, напоминающими бары SB-галактик.

1. *Введение.* В наиболее общей постановке классическая теория эллипсоидальных фигур равновесия однородной гравитирующей массы была развита Риманом (см. [1]). Его S-эллипсоиды и эллипсоиды типов I, II, III охватывают всевозможные фигуры одиночной массы, имеющие во вращающейся системе отсчета внутренние течения постоянной завихренности.

С точки зрения астрофизических приложений фигуры равновесия одиночных масс не представляют большого интереса. Наблюдаемые астрономические объекты гетерогенны и представляют систему из взаимнопроникающих подсистем с разными динамическими и кинематическими характеристиками. Поэтому при исследовании динамики той или иной подсистемы необходим учет гравитации других подсистем. Таким образом возникла теория вложенных фигур равновесия, учитывающая гравитационное действие большой подсистемы на фигуры равновесия заключенной в нее вращающейся гравитирующей или легкой подсистемы [2—5]. В работе [6] были обобщены S-эллипсоиды Римана с учетом гравитации сфероидального гало и систематизированы последовательности вложенных эллипсоидов в зависимости от свойств гало. Один из важных результатов учета гало заключался в возникновении новой ветви сильно сплюснутых эллипсоидов с циркулирующей частиц по направлению их вращения.

Известно, что звездные системы типа галактик характеризуются чрезвычайно большими длинами свободного пробега звезд, т. е. являются бесстолкновительными. Поэтому в последние годы стала бурно развиваться теория фигур равновесия бесстолкновительных гравитирующих систем, где

широко применяются методы из сходно поставленных задач теории холодной плазмы. Успехи и трудности этой теории изложены в монографии [7]. Полученные пока точные эллипсоидальные модели одиночных однородных масс [8, 9] резко отличаются от классических эллипсоидов Маклорена и Якоби.

Построенная в работе [10] бесстолкновительная модель эллипсоидов с наклонным вращением обобщает модель Фримана [8] и по некоторым свойствам напоминает жидкие эллипсоиды Римана типов I—III.

Модель бесстолкновительных трехосных эллипсоидов, полученная в работе [11] с учетом приливного действия спутника, является бесстолкновительным аналогом жидких эллипсоидов Роша—Римана [1].

Попытка построения одиночных бесстолкновительных аналогов S-эллипсоидов Римана дала отрицательный результат [7]. В работе [12] было показано, что сфероидальное гало обеспечивает равновесие эллипсоидов, частицы которых во вращающейся с эллипсоидом системе отсчета в плоскости вращения движутся по подобным к граничному эллипсу траекториям (как у S-эллипсоидов Римана), а по оси вращения совершают гармонические колебания. Подробное исследование свойств этих бесстолкновительных эллипсоидов и их систематизация в настоящей работе показывают на их глубокую аналогию с S-эллипсоидами Римана с положительными внутренними осцилляциями жидкости.

Как жидкие, так и бесстолкновительные S-эллипсоиды Римана со слабым гало обладают свойствами, напоминающими бары SB-галактик.

2. Основные уравнения задачи и фазовая модель эллипсоидов. Равновесие бесстолкновительных эллипсоидов с гало определяется системой уравнений (по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \left\{ [\vec{\Omega} [\vec{\Omega} \vec{x}]]_i + 2 [\vec{v} \vec{\Omega}]_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (V + V_*) \right\} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 V = -4\pi G \int f(\vec{x}, \vec{v}) d\vec{v} = -4\pi G \rho \theta \left(1 - \frac{x_i^2}{a_i^2} \right), \quad (2)$$

где $\theta(z)$ — единичная функция Хэвисайда, $V(\vec{x})$ и $V_*(\vec{x})$ — внутренние гравитационные потенциалы вложенного эллипсоида и сфероидального гало соответственно,

$$V(\vec{x}) = -\pi G \rho A_i x_i^2; \quad V_*(\vec{x}) = -\pi G \rho_* [A_* (x_1^2 + x_2^2) + C_* x_3^2], \quad (3)$$

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s) \Delta(s)}; \quad \Delta^2(s) = (a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s).$$

$$A_* = 1 - C_*/2 = \frac{c}{1-c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \arcsin \sqrt{1-c^2-c} \right), \quad (4)$$

где ρ, ρ_* — однородные плотности масс эллипсоида и гало соответственно, a_i ($i = 1; 2; 3$) — полуоси эллипсоида, c — отношение полуосей сфероида гало ($c \leq 1$).

Система уравнений (1)–(3) допускает существование трехосных эллипсоидов, частицы в которых совершают гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{2A_* + 2cC_*}$ по оси вращения x_3 и движутся по эллиптическим орбитам, подобным и концентрическим граничным эллипсам в плоскости вращения:

$$x_1 = \varepsilon a_1 e^{i\omega t}; \quad x_2 = -i\varepsilon a_2 e^{i\omega t}; \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (5)$$

Им соответствует функция распределения [7, 12]

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{\rho}{\pi \omega a_3} \frac{\delta\left(v_1 + \lambda \Omega \frac{a_1}{a_2} x_2\right) \delta\left(v_2 - \lambda \Omega \frac{a_2}{a_1} x_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{v_3^2}{\omega^2 a_3^2}}} \theta\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{v_3^2}{\omega^2 a_3^2}\right), \quad (6)$$

где параметр λ представляет частоту осцилляций звезд по эллиптическим орбитам в единицах угловой скорости вращения фигуры: $\nu = \lambda \Omega$. Более общая функция распределения типа (6) была получена в работе [11] с учетом приливного потенциала компаньона.

Скорость усредненного движения частиц во вращающейся системе отсчета, связанной с главными осями эллипсоида

$$\vec{u} = \int \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}) d\vec{v} = \left(-\nu \frac{a_1}{a_2} x_2; \nu \frac{a_2}{a_1} x_1; 0 \right), \quad (7)$$

точно совпадает со скоростью внутренних движений жидкости в S-эллипсоиде Римана. Поэтому эллипсоиды (6) можно считать бесстолкновительными аналогами S-эллипсоидов Римана.

С помощью (6) и (1) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Omega^2 \left(1 + \lambda^2 + 2\lambda \frac{a_2}{a_1} \right) &= 2A_1 + 2cA_*; \\ \Omega^2 \left(1 + \lambda^2 + 2\lambda \frac{a_1}{a_2} \right) &= 2A_2 + 2cA_*, \end{aligned} \quad (8)$$

которые, аналогично формулам (5) работы [6], дают физические и геометрические свойства вложенных бесстолкновительных эллипсоидов:

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{B_{12} + \kappa A_*}{a_1 a_2 A_{12}} + 1 = 0; \quad \Omega^2 = \frac{a_1 a_2 A_{12}}{\lambda} \quad (9)$$

где время измеряется в единицах $(\pi G \rho)^{-1/2}$, κ — отношение плотностей масс гало и вложенного эллипсоида: $\kappa = \rho/\rho_*$; A_{ik} , B_{ik} — положительные величины,

$$A_{ik} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s)(a_k^2 + s)\Delta}; \quad B_{ik} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{s ds}{(a_i^2 + s)(a_k^2 + s)\Delta} \quad (10)$$

Формулы (9) можно получить из формул (6) и (7) работы [6] формальной подстановкой $a_3 = 0$. Этот переход имеет важную физическую основу, но не геометрическую, так как ниже будет видно, что бесстолкновительные эллипсоиды с гало могут иметь отличные от нуля значения a_3 (вплоть до бесконечности). Физическое отличие жидких и бесстолкновительных моделей обусловлено разностью их функций распределения. Жидкие модели характеризуются изотропными функциями распределения, в то время как модель (6) является холодной в плоскости вращения и имеет отличную от нуля дисперсию скоростей вдоль оси вращения x_3 :

$$\langle v_3^2 \rangle = \frac{1}{\rho} \int v_3^2 f(\vec{x}, \vec{v}) d\vec{v} = \frac{1}{2} \omega^2 a_3^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} \right).$$

Устремляя в жидкой модели a_3 к нулю (заменяя $\rho \rightarrow \frac{\text{const}}{a_3}$), мы обращаем в нуль давление. Поэтому полученная плоская фигура с поверхностной плотностью

$$\sigma(x_1, x_2) = \text{const} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}, \quad i = 1, 2$$

является полностью холодной. Такие двумерные холодные модели широко обсуждаются в литературе [13—16]. Тот факт, что модель (6) является трехмерной ($a_3 > 0$), обусловлен отличной от нуля дисперсией скоростей вдоль оси x_3 .

Как в жидкой модели (см. уравнение (7) работы [6]), первое уравнение (9) инвариантно относительно преобразования $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$, т. е. теорема Дедекнда справедлива и для бесстолкновительных эллипсоидов: если существует эллипсоид, вращающийся с угловой скоростью Ω и имеющий внутренние осцилляции частиц с частотой ν , то этот эллипсоид является фигурой равновесия, если Ω и ν меняются ролями [1]. Эти эллипсоиды называются сопряженными.

В жидкой модели S-эллипсоидов Римана возможны эллипсоиды как с отрицательной внутренней циркуляцией жидкости ($\lambda < 0$), так и с положительной циркуляцией ($\lambda > 0$). Бесстолкновительные эллипсоиды характеризуются лишь положительными значениями λ , т. е. движения частиц по эллиптическим орбитам происходят только по направлению вращения фигуры. Поэтому характерные для эллипсоидов Фримана противотоки в инерциальной системе отсчета в модели (6) отсутствуют.

Из (9) также следует отсутствие эллипсоидов с $\lambda = 0$ (бесстолкновительные аналоги эллипсоидов Якоби и Дедекинда).

Условие действительности угловой скорости вращения

$$xA_* \geq a_1 a_2 A_{12} - B_{12}, \quad (11)$$

аналогичное условию (9) работы [6], дает возможную геометрию вложенных бесстолкновительных эллипсоидов. Для одиночных фигур ($x = 0$) условие (11) удовлетворяется в трех случаях: $a_1 = a_2$ — сфероид; $a_3 = \infty$ — вращающийся с $\Omega^2 = 2a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)$ эллиптический цилиндр; $a_3 = \infty$ — покоящийся эллиптический цилиндр. Все они подробно рассмотрены в работах [17—19].

Условие (11) не допускает существования одиночных трехосных бесстолкновительных эллипсоидов [7]. В работе [12] было показано, что сфероидальное гало обеспечивает равновесие трехосных эллипсоидов с галекториями (5). Поэтому бесстолкновительные аналоги S-эллипсоидов Римана существуют только при наличии сфероидального гало.

3. Вложенные бесстолкновительные сфероиды ($a_1 = a_2 \equiv 1$). В работе [12] был исследован вопрос устойчивости вложенных бесстолкновительных сфероидов по отношению к тороидальным формам колебаний и был получен критерий их динамической устойчивости (формула (14) работы [12] при $m = 2$), который можно представить в виде

$$xA_* \geq A_{11} - B_{11} \equiv F_c(a_3). \quad (12)$$

На графике рис. 1 сплошная кривая выражает зависимость F_c от a_3 в интервале $0 \leq a_3 \leq 2$. При $a_3 \rightarrow \infty$ имеем $F_c \rightarrow 0$, поэтому одиночные ($x = 0$) сфероиды Фримана динамически неустойчивы, за исключением плоского диска $a_3 = 0$ и кругового цилиндра ($a_3 = \infty$). Гало стабилизирует сфероиды. Геометрия устойчивых вложенных сфероидов сильно зависит от значения xA_* гало. Существует критическое значение $(xA_*)_{кр} = 0.1420$, такое, что при $xA_* < 0.1420$ условию динамической устойчивости (32) удовлетворяют сфероиды с $a_3 \leq a_3^{(2)}(xA_*)$ и $a_3 \geq a_3^{(1)}(xA_*)$. Гало с $xA_* \geq 0.1420$ стабилизирует вложенные бесстолкновительные сфероиды всех геометрий: $0 < a_3 < \infty$.

Условие существования вложенных бесстолкновительных эллипсоидов (11) в рассматриваемом случае совпадает с критерием динамической устойчивости (12).

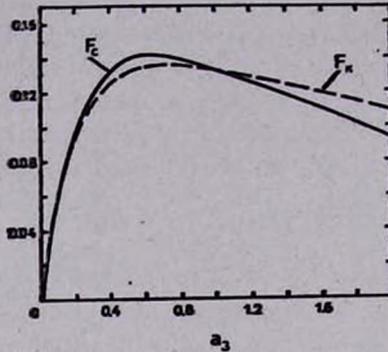


Рис. 1. Зависимости функций F_c и F_k от a_2 . При больших значениях a_2 обе функции стремятся к нулю.

Как было отмечено, имеется глубокая аналогия между свойствами вложенных бесстолкновительных сфероидов и вложенных жидких сфероидов Римана с $\lambda > 0$. Здесь тоже динамически устойчивые вложенные сфероиды являются первыми членами последовательностей вложенных трехосных эллипсоидов. Это имеет место в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{A_{11}/\lambda}$, где λ определяется через (9) с учетом $a_1 = a_2$.

В табл. 1 представлены указанные свойства вложенных сфероидов. Заметим, что в отличие от жидких аналогов бесстолкновительные сфероиды могут быть вытянутыми вдоль оси вращения.

4. *Кувыркающиеся сфероиды* ($a_2 = a_3 \cong a_1 \equiv 1$). Условие (11): $\chi A_* \geq a_2 A_{12} - B_{12} \equiv F_k$ в рассматриваемом случае допускает существование как вытянутых ($a_2 < 1$), так и сплюснутых ($a_2 > 1$) в плоскости вращения сфероидов. Свойства бесстолкновительных кувыркающихся сфероидов больше похожи на свойства вложенных сфероидов, рассмотренных в предыдущем разделе, чем их жидких аналогов (раздел 4 работы [6]). Здесь тоже имеется критическое значение $(\chi A_*)^{\text{кр}} = 0.136387$, при котором, если $\chi A_* \geq 0.136387$, то возможны кувыркающиеся сфероиды всех геометрий. Слабое гало ($\chi A_* < 0.136387$) обеспечивает существование сильно вытянутых и сильно сплюснутых фигур. На рис. 1 прерывистая кривая представляет зависимость функции F_k от $a_2 (= a_3)$. Свойства кувыркающихся сфероидов приведены в табл. 2.

5. Трехосные бесстолкновительные эллипсоиды с гало. Трехосные бесстолкновительные эллипсоиды по своим основным свойствам качественно не отличаются от свойств своих жидких аналогов с $\lambda > 0$. Так что изложенные в разделе 6 работы [6] свойства эллипсоидов с $\lambda > 0$ справедли-

Таблица 1
ВЛОЖЕННЫЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СФЕРОИДЫ

a_3	$\kappa A_0 = 0.067$			$\kappa A_0 = 0.12$			$\kappa A_0 = 0.14204$		
	λ	Ω	ν	λ	Ω	ν	λ	Ω	ν
0.02	0.16	0.381	0.060	0.09	0.504	0.045	0.08	0.546	0.042
0.06	42	392	164	24	521	123	20	564	114
0.10	73	371	271	36	531	189	30	576	174
0.1110*	1.00	331	331						
0.15	—	—	—	49	535	261	41	585	239
0.20	—	—	—	61	533	327	50	590	295
0.25	—	—	—	76	523	390	58	592	344
0.2960*	—	—	—	1.00	477	477			
0.30	—	—	—	—	—	—	65	594	387
0.50	—	—	—	—	—	—	88	590	518
0.6395*							1.00	585	585
0.70	—	—	—	—	—	—	0.96	609	582
1.00	—	—	—	—	—	—	81	701	570
1.20	—	—	—	—	—	—	75	746	562
1.3225*				1.00	655	655			
1.40	—	—	—	0.88	700	620	71	781	556
1.80	—	—	—	75	778	582	65	832	545
2.20	—	—	—	69	822	566	62	868	536
2.60	—	—	—	65	852	555	59	894	530
2.9965*	1.00	692	692						
3.00	0.98	698	686	63	875	548	57	913	525
5.00	71	830	592	57	931	528	53	965	509
10.00	64	883	563	53	970	513	50	1.000	497
50.00	60	911	549	51	992	504	48	1.021	490
∞	60	913	548	51	993	503	48	1.022	489

Примечание. Звездочками отмечены самосопряженные эллипсоиды, черточки указывают на отсутствие данных эллипсоидов.

вы и для их бесстолкновительных аналогов. Отличия имеют скорее количественный характер. Существенным отличием этих моделей является возможность вытягивания (до бесконечности) бесстолкновительных эллипсоидов вдоль оси вращения.

На графике рис. 2 в плоскости (a_2, a_3) представлены последовательности самосопряженных бесстолкновительных эллипсоидов внутри гало с различными значениями χA_* . Как и у жидких аналогов, эти кривые ограничивают область возможных геометрий вложенных эллипсоидов (например, область возможных геометрий эллипсоидов внутри гало с $\chi A_* = 0.067$ заштрихована). Внутри гало с $\chi A_* \geq 0.1420$ возможны эллипсоиды всех геометрий.

Таблица 2

ВЛОЖЕННЫЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ КУВЫРКАЮЩИЕСЯ
СФЕРОИДЫ

a_3	$\chi A_* = 0.067$			$\chi A_* = 0.12$			$\chi A_* = 0.13639$		
	λ	Ω	ν	λ	Ω	ν	λ	Ω	ν
0.02	0.15	0.368	0.054	0.082	0.493	0.040	0.07	0.525	0.038
0.06	43	371	158	23	506	116	20	539	109
0.10	78	348	272	35	518	183	31	553	172
0.1068*	1.00	317	317	-	-	-	-	-	-
0.15	—	—	—	48	531	257	42	568	240
0.20	—	—	—	60	539	322	51	581	299
0.30	—	—	—	82	537	439	66	599	393
0.3375*	-	-	-	1.00	505	505	-	-	-
0.40	—	—	—	—	—	—	76	609	465
0.60	—	—	—	—	—	—	92	613	566
0.7282*	-	-	-	-	-	-	1.00	610	610
0.80	—	—	—	—	—	—	0.96	630	607
1.00	—	—	—	—	—	—	88	675	593
1.50	—	—	—	—	—	—	76	729	556
1.5517*	-	-	-	1.00	636	636	-	-	-
2.00	—	—	—	0.79	702	552	69	751	516
4.00	—	—	—	58	717	413	53	749	396
4.6541*	1.00	522	522	-	-	-	-	-	-
7.00	0.67	560	373	45	682	306	41	711	293
10.00	55	541	296	38	653	245	34	681	235
100.00	12	402	049	07	519	038	07	550	036

6. *Обсуждение результатов.* Существование бесстолкновительных эллипсоидальных фигур с гало — аналогов S-эллипсоидов Римана помимо чисто теоретического интереса имеет важное практическое значение.

Последние систематические наблюдения SB-галактик дали обширную информацию о динамике и кинематике звезд в различных их компонентах.

В частности, бары у них трехосные и плоские (сильно сплюснутые по оси вращения).

Некруговые движения, детектированные в баре NGC 936 [20], указывают на то, что бары SB-галактик являются скорее всего материальными образованиями, чем волнами плотности. В среднем, звездные орбиты параллельны бару и во вращающейся системе отсчета осциллируют по направлению вращения. Противотоки, указанные авторами работы [21] в галактике NGC 4027, в NGC 936 не наблюдались. NGC 4027 является галактикой типа SBdm с весьма иррегулярной морфологией и не может служить прототипом SB-галактик.

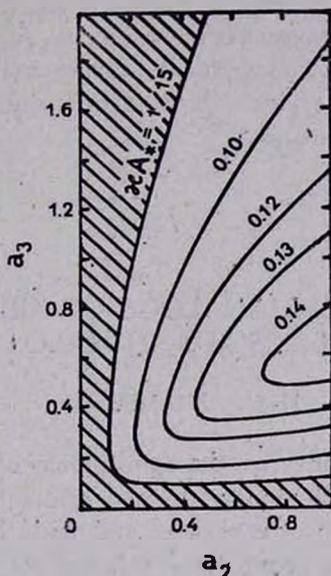


Рис. 2. Области возможных геометрий вложенных бесстолкновительных эллипсоидов при различных значениях λA_0 гало. Область, соответствующая эллипсоидам с гало $\lambda A_0 = 1/15$, заштрихована. Кривые представляют последовательности самосопряженных эллипсоидов ($\lambda = 1$), ограничивающих области возможных геометрий вложенных эллипсоидов.

N-частичные численные модели [22, 23] SB-галактик имеют серьезные недостатки: бары у них не столь плоски и не столь вытянуты, как у реальных прототипов. Они не имеют четких границ, которыми обладают реальные бары. В численных моделях бары очень неустойчивы и существуют в течение 2—3 оборотов. Это вызвано однокомпонентностью моделей — учет гравитации системы диск+гало мог бы обеспечить наблюдаемую форму баров и их длительное существование. Поэтому построение реальных моделей галактик (в том числе SB-галактик) полезнее начать

с грубых многокомпонентных моделей, так как таким путем относительно легко выяснить роль той или иной подсистемы в динамике другой [24].

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что как жидкие, так и бесстолкновительные эллипсоиды с гало при малых значениях κ обладают основными наблюдаемыми свойствами реальных баров. Тот факт, что SB-галактики имеют слабое гало [25], означает, что κA_* для них действительно мало (≤ 0.1). Следовательно, плоский характер баров объясняется слабостью гало у SB-галактик и сильной сплюснутостью их дисков ($A_* \ll 1$).

Тот факт, что усредненные движения звезд параллельны барам [20], указывает, что звезды в плоскости вращения бара, по-видимому, движутся по подобным к бару эллиптическим траекториям. А то, что звезды осциллируют по направлению вращения бара, является основным свойством ветви сильно сплюснутых вложенных жидких эллипсоидов и вложенных бесстолкновительных эллипсоидов.

Ереванский государственный
университет

COLLISIONLESS ANALOGS OF RIEMANN'S S-ELLIPSOIDS IN HALO

M. G. ABRAMIAN

The spheroidal halo insures the equilibrium of collisionless analogs Riemann's S-ellipsoids with inner forward circulation of particles. The sequence of imbedded ellipsoids arises and ends by dynamically stable collisionless spheroids. The properties both the collisionless and "liquid" Riemann's S-ellipsoids with halo resemble the bars of SB-galaxies.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
2. М. Г. Абрамян, С. А. Каплан, *Астрофизика*, 10, 565, 1974; 11, 121, 1975.
3. М. Г. Абрамян, С. А. Каплан, Р. С. Оганесян, *Астрофизика*, 13, 263, 1977.
4. М. Г. Абрамян, *Астрофизика*, 11, 487, 1975.
5. М. Г. Абрамян, Int. conf. GR-9, v. 2, Жена, 1980, p. 306.
6. М. Г. Абрамян, *Астрофизика*, 25, 173, 1986.
7. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, М., 1976; *Physics of Gravitating Systems*. I, II. Springer-Verlag, 1984.
8. К. С. Freeman, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 134, 1, 1966.
9. Г. С. Бисноватый-Козан, Я. Б. Зельдович, *Астрофизика*, 5, 425, 1969.
10. Б. П. Кондратьев, *Астрофизика*, 21, 499, 1984.

11. *G. S. Bisnovatyi-Kogan*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 174, 203, 1976.
12. *М. Г. Абрамян*, Уч. зап. ЕГУ, № 1 (137), 60, 1978.
13. *К. С. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 15, 1966.
14. *S. D. Tremaine*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 175, 557, 1976.
15. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Астрофизика, 19, 65, 1983; 20, 547, 1984.
16. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, в кн. «Динамика и эволюция звездных систем», ред. К. Ф. Огородников, ВАГО, М.—Л., 1975.
17. *К. С. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 133, 47, 1966.
18. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 6, 387, 1975.
19. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Астрофизика, 7, 121, 1971.
20. *J. Kormendy*, Astrophys. J., 257, 75, 1982; 275, 529, 1983; 286, 132, 1984.
21. *G. de Vaucouleurs, К. С. Freeman*, Vistas Astron., 17, 163, 1972.
22. *F. Hohl, T. A. Zang*, Astron. J., 84, 585, 1979.
23. *R. H. Miller, B. F. Smith*, Astrophys. J., 227, 785, 1979.
24. *М. Г. Абрамян*, Письма в Астрон. ж., 11, 583, 1985.
25. *S. T. Gottesman, J. H. Hunter*, Astrophys. J., 260, 65, 1982.