ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2020. Т. LXXIII, N3.

УДК 621.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Т.Р. МЕЛКОНЯН, Г.С. СУКИАСЯН

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ХУДШЕГО ОТРЕЗКА

Предложен алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерной непрерывной функции с переменной сеткой. Алгоритм минимизирует погрешность аппроксимации при заданном числе сеточных узлов. Развитый подход апробирован на модели двумерной параболической функции.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, переменная сетка, триангуляция Делоне.

Введение. При численном решении двумерных нелинейных задач математической физики часто применяют метод конечных элементов, который предполагает, что исследуемая область разделена на мелкие подобласти (элементы), внутри которых искомая функция полагается линейной. Таким образом, искомая функция аппроксимируется кусочно-линейной функцией, ее график состоит из треугольников, проекции которых на плоскость OXY составляют треугольную сетку.

В последние годы часто применяют сетки с переменным числом узлов (см. [1]), т.е. процесс последовательных приближений распространяется не только на аппроксимируемую функцию, но и на соответствующую сетку. При этом дополнительные узлы последовательно добавляются в участках исследуемой области, наихудших в смысле погрешности аппроксимации. Таким образом, сетка последовательно улучшается и минимизируется погрешность аппроксимации.

В [2] был предложен алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации с неравномерной решеткой для одномерной функции. Алгоритм минимизировал погрешность аппроксимации при заданном числе точек решетки и был основан на принципе деления наихудшего отрезка. В [3] одномерный алгоритм, предложенный в [2], был обобщен для двумерного случая. Однако алгоритм, предложенный в [3], не был рекурсивным.

Рекурсивные алгоритмы. Алгоритм называется рекурсивным, если каждый последующий шаг не приводит к изменениям параметров, полученных ранее. Рекурсивные алгоритмы удобны для приложений, так как они легко программируются с помощью операторов цикла.

В задаче построения сетки с переменным числом узлов алгоритм будет рекурсивным, если добавление каждого нового узла оставляет на месте старые узлы и связи между ними. Одномерную равномерную решетку невозможно построить с помощью рекурсивного алгоритма, так как при добавлении нового узла все старые узлы решетки смещаются. Алгоритм автоматизированного построения одномерной кусочно-линейной аппроксимации с неравномерной решеткой, предложенный в [2], является рекурсивным.

В настоящей работе предложен рекурсивный алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерной непрерывной функции методом деления худшего отрезка. Изучен также улучшенный (но не рекурсивный) алгоритм автоматизированного построения двумерной кусочно-линейной аппроксимации методом деления худшего отрезка, который можно назвать полурекурсивным, так как добавление каждого нового узла оставляет на месте все старые узлы и почти все старые связи между узлами.

Треугольные сетки. Напомним определение треугольной сетки и триангуляции Делоне (см. [4]). Пусть на плоскости задано конечное множество точек $M_k = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Множество треугольников $\{T_j\}$ называется треугольной сеткой с вершинами M_k, если выполнены следующие три условия:

1) внутренности треугольников попарно не пересекаются;

2) вершины всех треугольников принадлежат M_k;

3) объединение треугольников заполняет выпуклую оболочку точек M_k.

Если к тому же выполнено следующее условие, а именно:

4) для каждого T_j внутри описанного круга нет ни одной точки из M_k, то такая треугольная сетка называется триангуляцией Делоне с узлами M_k.

Сетку Делоне с системой узлов M_k обозначим через $D(M_k)$. В [4] доказано, что для любого конечного множества точек M_k можно построить сетку $D(M_k)$ (иногда не единственным образом).

Метод деления худшего отрезка. Пусть на плоскости задана двумерная непрерывная функция $F(x,y)$, областью определения которой является прямоугольник $[a,b]x[c,d]$. Наша цель - построить рекурсивный алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейного приближения к функции $F(x,y)$. Вначале рассмотрим следующий рекурсивный алгоритм построения последовательности узлов $M_k = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ и соответствующей сетки S_k.

На прямоугольнике $[a,b]x[c,d]$ рассмотрим первичное множество узлов M_4, состоящее из 4-ех вершин: $P_1=(a,c)$, $P_2=(b,c)$, $P_3=(b,d)$, $P_4=(a,d)$, и первичную сетку S_4, состоящую из двух треугольников: $\Delta P_1P_2P_4$ и $\Delta P_2P_3P_4$ (см. рис. 1).

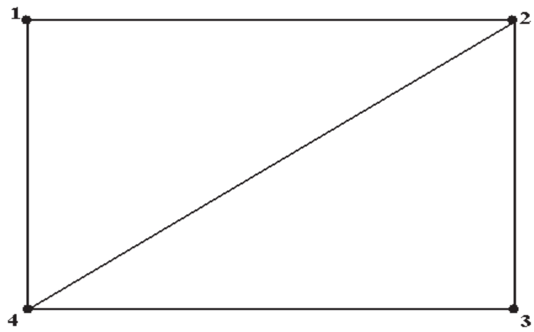


Рис. 1. Первичная сетка S_4

Отметим, что сетка S_4 является сеткой Делоне с четырьмя узлами $P_1,\ldots, P_4$, т.е. $S_4 = D(M_4)$.

Предположим, что множество узлов $M_{k-1} = \{P_1, P_2,\ldots, P_{k-1}\}$ и соответствующая сетка треугольников S_{k-1} уже построены. Построим очередную точку P_k следующим образом.

Два узла P_i и P_j называем соседними и обозначаем $P_i \sim P_j$, если они являются концами стороны какого-нибудь треугольника сетки. У первичной сетки S_4 все пары узлов являются соседними, кроме пары P_1 и P_3.

Пары соседних узлов сетки называем ребрами сетки. Обозначим через $R(S_{k-1})$ множество всех ребер сетки S_{k-1}, т.е.

$$R(S_{k-1}) = \{(P_i , P_j) : P_i \sim P_j \}.$$

Для каждого ребра из $R(S_{k-1})$ с вершинами P_i, P_j вычисляются значения разностей $|z_i - z_j|$, где $z_i = F(x_i,y_i)$, $z_j = F(x_j,y_j)$, а (x_i,y_i), (x_j,y_j) – декартовы координаты вершин P_i и P_j соответственно.

Назовем наихудшим то ребро r_k из $R(S_{k-1})$, которое дает максимальную разность значений $|z_i - z_j|$. В середине этого ребра добавим новый узел - это и есть искомый узел P_k.

Определим, какие новые ребра появятся у сетки S_k при добавлении новой вершины P_k. Обозначим через conv (M_k) выпуклую оболочку точек M_k. Возможны два случая:

1) новый узел P_k принадлежит внутренности оболочки conv (M_k). Такой узел называем внутренним, а ребро r_k – диагональным. В этом случае при добавлении новой вершины возникают два новых ребра (см. рис. 2);

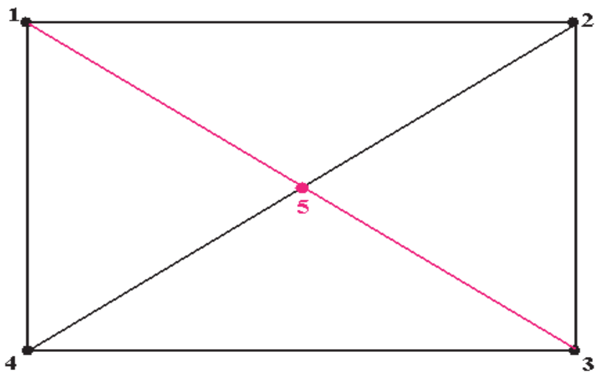


Рис. 2. Случай внутреннего нового узла, худший отрезок - P_2P_4

2) новый узел P_k лежит на границе оболочки conv (M_k). Такой узел называем краевым, а ребро r_k – граничным. В этом случае при добавлении новой вершины возникает одно новое ребро (см. рис. 3).

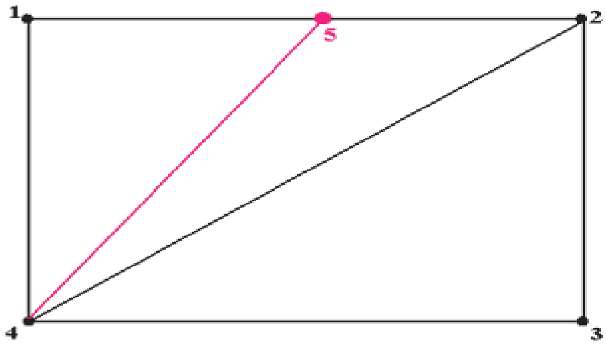


Рис. 3. Случай краевого нового узла, худший отрезок - P_1P_2

Будем продолжать добавлять узлы делением пополам ребра P_i, P_j, соответствующего наибольшему из значений разностей $|z_i – z_j|$, до тех пор, пока количество узлов не достигнет заданного значения n.

Отметим, что сетка, получающаяся в результате применения предложенного рекурсивного алгоритма, необязательно будет триангуляцией Делоне - это зависит от вида приближаемой функции F(x,y). Так, сетка на рис. 2 является триангуляцией Делоне, в то время как сетка на рис. 3 - не является триангуляцией Делоне.

Имея треугольную сетку S_n, построим приближение $F_n(x,y)$ к функции F(x,y) следующим образом. Приближение $F_n(x,y)$ является кусочно-линейной функцией, ее график состоит из плоских треугольников, проекции которых на плоскость OXY составляют треугольную сетку S_n с системой узлов M_n. Заметим, что число узлов этой сетки равно фиксированному числу n.

Обозначим через E_n погрешность аппроксимации F_n:

$$E_n = \max_{\{a<x<b,\ c<y<d\}} |F(x,y)-F_n(x,y)|.$$

Погрешность E_n можно оценить при помощи наибольшей разности E_{Sn} значений функции F(x,y) в узлах сетки S_n :

$$E_{Sn} = \max_{\{Pi \sim Pj\}} |z_i - z_j|,$$

где $z_i = F(x_i,y_i)$, а максимум берется по всем парам соседних узлов сетки S_n .

Разумеется, погрешность E_n зависит не только от вида функции F(x,y), но и от выбора точечного множества M_n. Наша цель – построить для данной функции F(x,y) и заданного числа узлов n точечное множество M_n так, чтобы погрешность E_n была как можно меньше.

Легко видеть, что для предложенного алгоритма последовательность E_{Sn} монотонно убывает с ростом числа узлов n. Так как для гладких функций F(x,y) при достаточно больших n имеем $E \sim E_{Sv}$, то предложенный алгоритм приводит к погрешности аппроксимации E_n, стремящейся к нулю.

Полурекурсивный алгоритм. Теперь видоизменим предложенный рекурсивный алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерной непрерывной функции методом деления худшего отрезка, разрешив операцию “флип”, если она применима.

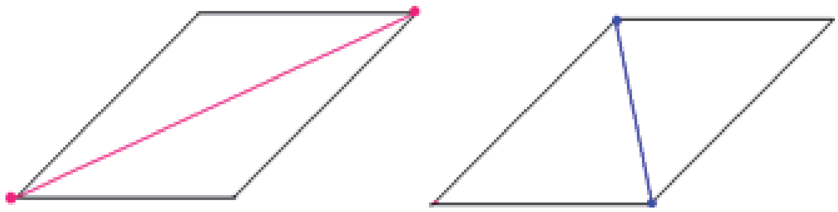


Рис. 4. Операция “флип”: длинная диагональ заменяется на более короткую

Замена в четырехугольнике более длинной диагонали на более короткую называется операцией “флип” (рис. 4). В сетке на рис. 2 нет четверки узлов, для которых применима операция “флип”, в то время как в сетке на рис. 3 есть одна такая четверка узлов – это узлы $P_2P_3P_4P_5$. Применив к этой четверке узлов операцию “флип”, получим триангуляцию, показанную на рис. 5. Здесь старое ребро P_2P_4 заменено на более короткое P_3P_5.

Видоизмененный алгоритм автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерной функции методом деления худшего отрезка с добавлением операции “флип” можно назвать полурекурсивным, так как добавление каждого нового узла оставляет на месте все старые узлы и почти все старые ребра, кроме, может быть, одного.

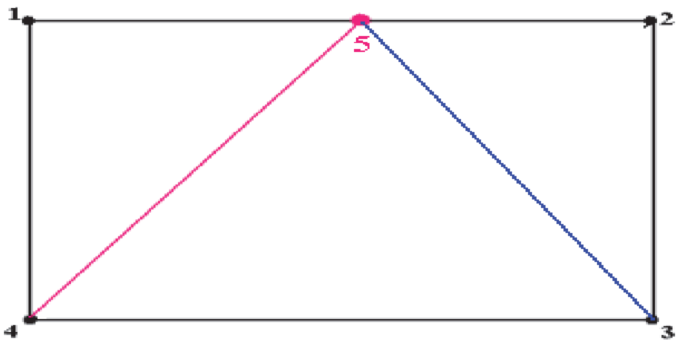


Рис. 5. Сетка из рис. 3 после применения операции “флип”

Легко видеть, что у сетки, получающейся в результате работы полурекурсивного алгоритма с добавлением операции “флип”, длина наибольшего ребра меньше, чем у такой же сетки, получающейся в результате работы рекурсивного алгоритма без операции “флип”. Так как для гладких функций F(x,y) погрешность аппроксимации E_n уменьшается с уменьшением длины наибольшего ребра, то получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Погрешность аппроксимации E_n, получающаяся в результате работы полурекурсивного алгоритма автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерной функции методом деления худшего отрезка с добавлением операции “флип”, с возрастанием числа узлов n стремится к нулю быстрее, чем погрешность, получающаяся в результате работы рекурсивного алгоритма без операции “флип”.

В [5] показано, что операция “флип” уменьшает сумму котангенсов внутренних углов треугольной сетки. Также доказано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов внутренних углов сетки. Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любой аппроксимируемой функции F(x,y) и любого числа вершин n сетка, получающаяся в результате работы полурекурсивного алгоритма построения кусочно-линейной аппроксимации методом деления худшего отрезка с добавлением операции “флип”, является триангуляцией Делоне.

Численные результаты. На рис. 6 представлен пример работы рекурсивного алгоритма (без операции “флип”) построения кусочно-линейной аппроксимации методом деления худшего отрезка для параболической функции $F(x,y)= 0,457x^2 +0.382y^2$ на прямоугольнике [a,b]x[c,d], причем a=0, b=6, c=0, d=6. Число узлов n равно 100.

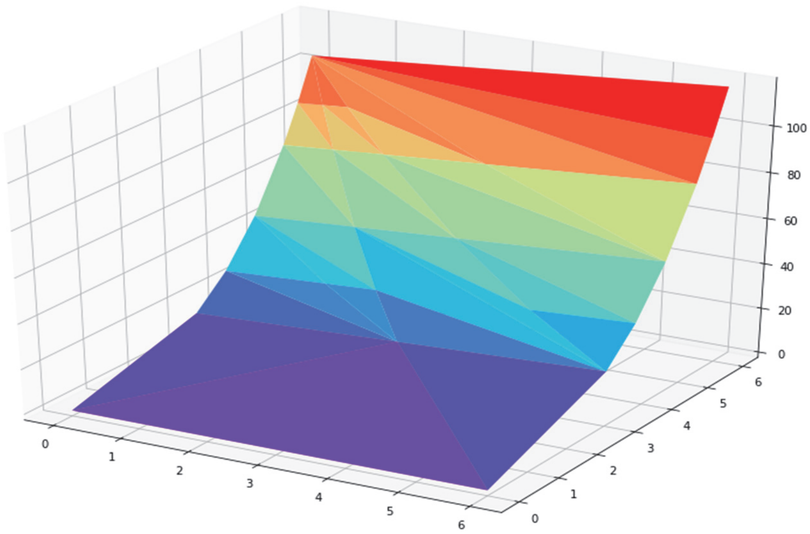


Рис. 6. Пример кусочно-линейной аппроксимации рекурсивным алгоритмом

На рис. 7 представлен пример работы уже полурекурсивного алгоритма построения кусочно-линейной аппроксимации методом деления худшего отрезка для той же параболической функции тем же методом, но уже с операцией “флип”.

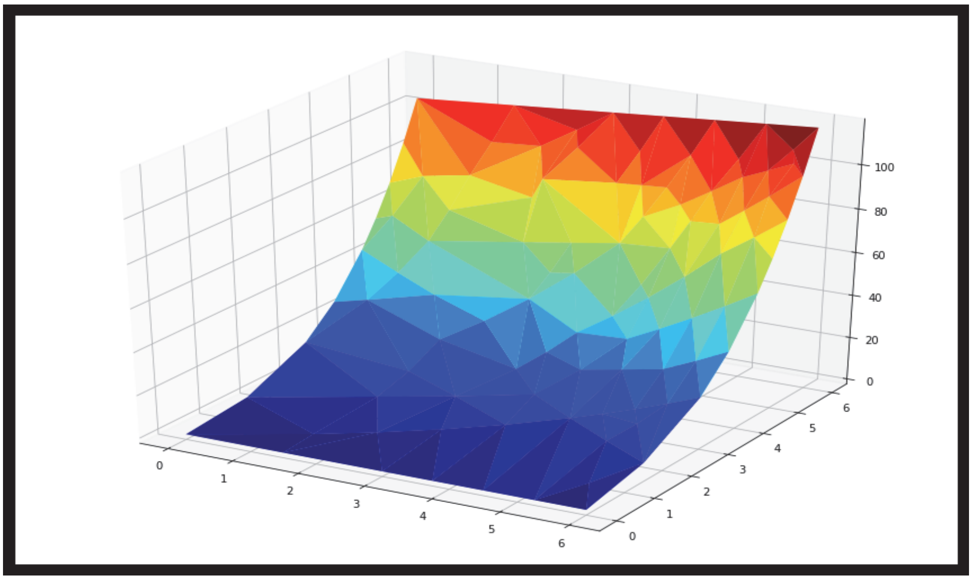
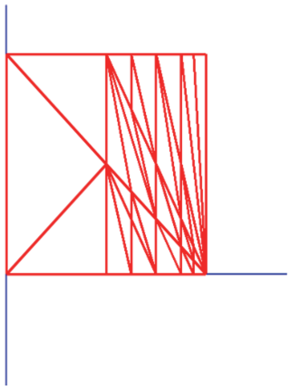


Рис. 7. Пример кусочно-линейной аппроксимации полурекурсивным алгоритмом

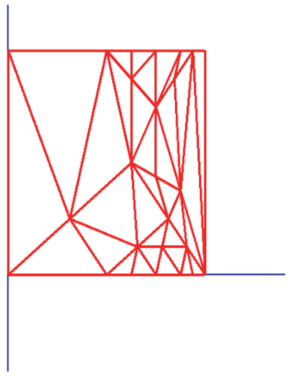
На рис. 8а представлена треугольная сетка, получающаяся предложенным рекурсивным алгоритмом (без операции “флип”) при автоматизированном построении кусочно-линейной аппроксимации указанной двумерной непрерывной функции методом деления худшего отрезка.

На рис. 8б представлена треугольная сетка, получающаяся в результате работы предложенного полурекурсивного алгоритма с операцией “флип” для той же параболической функции и тем же методом деления худшего отрезка.

Наглядно видно, что интенсивность сеточных узлов в разных участках двумерной сетки существенно разная. Четко соблюдается условие: густота сеточных узлов тем больше, чем сильнее меняется функция.



а)



б)

Рис. 8. Соответствующие треугольные сетки, полученные в результате работы предложенного алгоритма: а- без операции “флип”, б- с операцией “флип”

Хорошо видно, что на левой стороне сетки, где функция F(x,y) медленно меняется, густота сеточных узлов относительно невелика. А на правой стороне сетки, где наблюдается быстрое изменение функции, интенсивность сеточных узлов возрастает, и треугольники становятся мелкими.

Визуально видно, что треугольники на рис. 8б удовлетворяют условию Делоне и распределены более равномерно, чем треугольники на рис. 8а.

Заключение. Развиты и реализованы рекурсивные и полурекурсивные алгоритмы автоматизированного построения кусочно-линейной аппроксимации двумерных функций методом деления худшего отрезка. Показано, что сетка, получающаяся в результате работы полурекурсивного алгоритма, всегда является триангуляцией Делоне.

Развитый подход реализован на модельной задаче аппроксимации двумерной параболической функции.

Работа выполнена в базовой научно-исследовательской лаборатории “Автоматизированные системы и моделирование” Национального политехнического университета Армении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 2. - С. 332-339.
2. **Енокян К.Р., Алаеи М.Е., Сукиасян Г.С.** Об автоматическом построении кусочно-линейной аппроксимации с нерегулярной решеткой // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2017.- Т. 70, № 4.- С. 409-414.
3. **Мелконян Т.Р., Сукиасян Г.С.** О кусочно-линейной аппроксимации двумерной функции с нерегулярной сеткой // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. -2018.- Т. 71, № 1.- С. 80-85.
4. **Делоне Б.Н.** О пустоте сферы // Известия АН СССР. - 1934.- Т. 4. - С. 793-800.
5. **Sukiasyan H.S.** On Extremal Property of the Sum of Cotangents and Its Applications in Mathematical Physics// Lobachevskii Journal of Mathematics. -2019. - Vol. 40, No. 8. – P. 1137–1140.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 10.01.2020.

Տ.Ռ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Հ.Ս.ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԵՐԿՉԱՓ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԿՏՈՐ-ԳԾԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ՝ ՎԱՏԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏՎԱԾԻ ԿԻՍՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Առաջարկվել է ոչ կանոնավոր ցանցով երկչափ անընդհատ ֆունկցիայի կտոր-գծային մոտարկման ավտոմատ կառուցման ալգորիթմ: Ալգորիթմը նվազեցնում է մոտարկման սխալանքը ցանցային հանգույցների տրված քանակի դեպքում: Զարգացված մոտեցումը կիրառվել է երկչափ պարաբոլային ֆունկցիայի մոդելի վրա:

Առանցքային բառեր. կտոր-գծային մոտարկում, փոփոխվող ցանց, Դելոնեի եռանկյունապատում:

T.R. MELKONYAN, H.S. SUKIASYAN

PIECE-WISE LINEAR APPROXIMATION OF THE TWO-DIMENSIONAL FUNCTION BY THE METHOD OF DIVIDING THE WORST SEGMENT

An algorithm for automatic construction of a piece-wise linear approximation of a two-dimensional continuous function with an irregular mesh is proposed. The algorithm minimizes the approximation error for a given number of mesh nodes. The developed approach is tested on the model of a two-dimensional parabolic function.

Keywords: piece-wise linear approximation, variable grid, Delaunay triangulation.