

УДК: 52—64

ОТРАЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЫ ПРИ ОБЩИХ ЗАКОНАХ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ

Г. А. АРУТЮНЯН

Поступила 15 апреля 1985

Принята к печати 3 июля 1985

Рассматривается задача отражения от полубесконечной неоднородной атмосферы при общих законах некогерентного рассеяния. Исследованы вопросы определения как функции отражения от данной атмосферы, так и среднего числа рассеяний отраженных квантов. Применением принципа инвариантности Амбарцумяна получены уравнения для определения указанных величин. При этом для неоднородной среды обобщен подход, разработанный ранее для решения аналогичных задач в случае однородной атмосферы. В качестве иллюстрации в одном частном случае приводятся результаты численных расчетов.

1. *Введение.* Переход от однородной среды к неоднородным средам в теории переноса излучения связан со значительным математическим усложнением исследуемых задач. Затруднения возникают вследствие того, что некоторые величины, характеризующие фундаментальные свойства среды и являющиеся константами для однородной среды, в неоднородных средах могут зависеть от оптической глубины. Тем не менее к настоящему времени в этом направлении получено значительное количество научных результатов, причем особенно подробно исследовались атмосферы, в которых от оптической глубины зависит вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния или, так называемое, альbedo однократного рассеяния. При когерентном рассеянии и полном перераспределении излучения по частотам для данного случая разработаны аналитические и численные методы решения некоторых задач теории переноса (см., например, [1—5]).

С другой стороны, в ряде работ автора и Никогосяна [6—8] на основе применения принципа инвариантности Амбарцумяна для однородной среды предложены сравнительно простые методы решения задач теории многократного рассеяния при общих законах перераспределения излучения по частотам. В настоящей работе предлагается обобщение некоторой

11—890

части этих методов на случай неоднородных сред. Для простоты мы здесь ограничиваемся рассмотрением лишь одномерной задачи, однако все аналитические выкладки легко могут быть повторены и для трехмерной плоскопараллельной геометрии.

2. *Отражение от полубесконечной среды.* Рассмотрим полубесконечную плоскопараллельную среду, в которой вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния зависит от оптической глубины по некоторому закону $\lambda(\tau)$, где оптическая глубина τ рассчитана в центре линии. Пусть на поверхность этой среды падает квант безразмерной частоты x' , и нас интересует распределение вероятности отражения данного кванта по частотам. Как показывают исследования (см. [4]), здесь целесообразнее вместо одной атмосферы рассматривать сразу совокупность усеченных атмосфер, которые отличаются от исходной отбрасыванием верхнего слоя оптической толщины t . Очевидно, что для данной совокупности атмосфер вместо одной зависимости $\lambda(\tau)$ мы будем иметь дело с семейством функций $\lambda(t + \tau)$. Далее, обозначим через $\rho(t, x', x) dx$ вероятность того, что рассматриваемый квант, после рассеяний, выйдет из среды в интервале частот $(x; x + dx)$. Аналогичную вероятность для n -кратно рассеянного кванта обозначим через $\rho_n(t, x', x) dx$.

Заметим, что интегрирование функции отражения $\rho(t, x', x)$ по всем x' дает контур линии отражения $R_*(t, x)$, образуемой при освещении данной полубесконечной атмосферы излучением в непрерывном спектре единичной интенсивности. Нередко возникает необходимость вместе с этой величиной рассматривать также контуры линий, образованных n -кратно рассеянными квантами, которые мы обозначим через $R_n(t, x)$. Следует отметить, что введенные величины $R_*(t, x)$ и $R_n(t, x)$, с другой стороны, могут быть интерпретированы как вероятности отражения кванта частоты x от полубесконечной атмосферы в какой-либо области спектра.

Теперь введем в рассмотрение производящую функцию

$$R(t, x', x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(t, x', x) s^n,$$

где $|s| \leq 1$. Применением принципа инвариантности можно получить интегро-дифференциальные уравнения по отношению к величинам $\rho_n(t, x', x)$. Умножив полученные уравнения на соответствующие s^n и просуммировав их по n , после некоторых преобразований находим

$$\frac{2}{\lambda(t)s} \left\{ [v(x) + v(x')] R(t, x', x, s) - \frac{\partial R(t, x', x, s)}{\partial t} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= r(x', x) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') R(t, x'', x, s) dx'' + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} R(t, x', x'', s) r(x'', x) dx'' + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} R(t, x', x'', s) dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x''') R(t, x''', x, s) dx''', \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $v(x) = a(x) + \beta$, $a(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии, β — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии, $r(x', x)$ — функция перераспределения излучения по частотам.

Легко видеть, что $R(t, x', x, 1) = \rho(t, x', x)$, и при $s=1$, уравнение (1) переходит в следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 &[v(x) + v(x')] \rho(t, x', x) - \frac{\partial \rho(t, x', x)}{\partial t} = \\
 &= \frac{\lambda(t)}{2} \left\{ r(x', x) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') \rho(t, x'', x) dx'' + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x', x'') r(x'', x) dx'' + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x', x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x''') \rho(t, x''', x) dx''' \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Параллельно рассмотрим также величину $n(t, x', x) = \partial R(t, x', x, s) / \partial s|_{s=1}$, которая соотношением $N(t, x', x) = n(t, x', x) / \rho(t, x', x)$ связана со средним числом рассеяний кванта частоты x' , отраженного от атмосферы в интервале частот $(x; x + dx)$. Продифференцировав уравнение (1) по s и положив $s=1$, получим

$$[v(x) + v(x')] [n(t, x', x) - \rho(t, x', x)] - \frac{\partial}{\partial t} [n(t, x', x) - \rho(t, x', x)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda(t)}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') n(t, x'', x) dx'' + \int_{-\infty}^{\infty} n(t, x', x'') r(x'', x) dx'' + \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} n(t, x', x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x''') \rho(t, x''', x) dx''' + \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x', x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x''') n(t, x''', x) dx''' \right\}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Уравнения (2) и (3) отличаются от соответствующих уравнений, полученных ранее в работах [6—8] для однородной среды, лишь появлением в них производных искомым функций по параметру t , описывающих характер неоднородности. Знание значений фигурирующих в этих уравнениях производных на поверхности $t=0$ позволило бы без какого-либо изменения применять здесь ранее разработанные методы решения. Однако в данном случае возникает необходимость решать дифференциальные уравнения. Эти уравнения существенно упрощаются, если учитывать, что симметричную функцию перераспределения можно представить в виде билинейного разложения

$$r(x', x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k a_k(x') u_k(x). \quad (4)$$

Тогда вместо (2) и (3) мы будем иметь

$$[v(x) + v(x')] \rho(t, x', x) - \frac{\partial \rho(t, x', x)}{\partial t} = \frac{\lambda(t)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(t, x') \varphi_k(t, x) \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned}
&[v(x) + v(x')] n(t, x', x) - \frac{\partial n(t, x', x)}{\partial t} = \\
&= \frac{\lambda(t)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k [\varphi_k(t, x') \varphi_k(t, x) + \varphi_k(t, x') \psi_k(t, x) + \varphi_k(t, x) \psi_k(t, x')], \quad (6)
\end{aligned}$$

где величины

$$\varphi_k(t, x) = a_k(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x', x) a_k(x') dx' \quad (7)$$

являются обобщенными функциями Амбарцумяна для неоднородной среды. Функции $\psi_k(t, x)$ определяются соотношением

$$\psi_k(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t, x', x) r_k(x') dx'. \quad (8)$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае уравнение (6) можно было получить также непосредственно из уравнения (5). Для этого необходимо продифференцировать уравнение (5) по $\lambda(t)$ и умножить полученное соотношение на $\lambda(t)$. Тогда, обозначив $n(t, x', x) = \lambda(t) \partial \rho(t, x', x) / \partial \lambda(t)$ и $\psi_k(t, x) = \lambda(t) \partial \varphi_k(t, x) / \partial \lambda(t)$, мы получим уравнение (6). Такой подход является своего рода обобщением метода определения среднего числа рассеяний кванта, предложенного Амбарцумяном [9] для однородной одномерной среды. В настоящей работе мы использовали иной путь решения, предложенный для однородной среды в работе [8], так как он более универсален и в сравнительно сложных случаях позволяет достаточно легко решать задачи, которые другими методами либо не решаются, либо решаются чрезвычайно трудным образом.

Дифференциальные уравнения (5) и (6) позволяют для искомым величин получить следующие интегральные представления:

$$\rho(t, x', x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_t^{\infty} \lambda(\tau) \varphi_k(\tau, x') \varphi_k(\tau, x) e^{-[v(x') + v(x)](\tau-t)} d\tau \quad (9)$$

и

$$n(t, x', x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_t^{\infty} \lambda(\tau) [\varphi_k(\tau, x') \varphi_k(\tau, x) + \varphi_k(\tau, x') \psi_k(\tau, x) + \varphi_k(\tau, x) \psi_k(\tau, x')] e^{-[v(x') + v(x)](\tau-t)} d\tau. \quad (10)$$

С помощью соотношений (7)—(10) можно для любой заданной зависимости численными методами определить как функцию отражения, так и среднее число рассеяний отраженных квантов. Имея величину $\rho(t, x', x)$, мы легко вычислим контур спектральной линии отражения $R_*(t, x)$. Для статистического описания рассеивающей способности атмосферы в целом может быть использовано среднее число рассеяний отраженных от среды квантов, имеющих частоту x . Очевидно, что оно определяется следующим соотношением:

$$N_*(t, x) = \frac{n_*(t, x)}{R_*(t, x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} n(t, x', x) dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x', x) dx'}$$

и также может быть вычислено без особых затруднений.

С этой точки зрения можно считать, что аналитическая часть решения рассматриваемых задач завершена. Однако в одном частном случае, часто рассматриваемом для астрофизических приложений, удастся продолжить аналитическое решение и тем самым существенным образом облегчить дальнейшие численные расчеты.

3. Экспоненциально убывающая $\lambda(\tau)$. Допустим, что $\lambda(\tau)$ убывает с оптической глубиной по экспоненциальному закону [3—5]

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 e^{-q\tau}. \quad (11)$$

Тогда выражение функции отражения для n -кратно рассеянных квантов задается с помощью простой формулы, которую легко можно найти, если величины $\rho(t, x', x)$ и $\varphi_k(t, x)$ разложить в ряды по степеням $\lambda(t)$. Она имеет следующий вид:

$$\rho_n(t, x', x) = \frac{\lambda^n(t) \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{km}(x) \varphi_{k, n-1-m}(x')}{2 \nu(x') + \nu(x) + nq}. \quad (12)$$

Функции $\varphi_{km}(x)$ определяются с помощью интеграла

$$\varphi_{km}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_m(x', x) a_k(x') dx', \quad (13)$$

где $\rho_m(x', x) = \rho_m(t, x', x)/\lambda^m(t)$, а $\varphi_{k0}(x) = x_k(x)$. Искомая функция отражения может быть вычислена суммированием величин $\rho_n(0, x', x)$:

$$\rho(0, x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(0, x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0^n \rho_n(x', x). \quad (14)$$

Таким образом, если $\lambda(\tau)$ дается соотношением (11), все интегрирования по оптической глубине удастся совершить аналитически, а численные расчеты носят итеративный характер, когда поочередно вычисляются

функции отражения для n -кратно рассеянных квантов. Суммирование n -кратных рассеяний здесь оправдано тем, что в глубоких слоях атмосферы в данном случае, если параметр q не слишком мал, практически нет рассеяний. Кванты, которые проникают в среду глубже некоторой величины, зависящей от параметра q , с очень большой вероятностью погибают при первом же акте рассеяния. Это уменьшает среднее число рассеяний, что, в свою очередь, улучшает сходимость суммы (14) по сравнению с аналогичной суммой, построенной для однородной среды.

Совершенно очевидно, что подобные соотношения можно получить и для определения величины $n(t, x', x)$. Однако уже из физических соображений понятно, что соответствующие функциям $\rho_n(t, x', x)$ слагаемые $n_n(t, x', x)$ в данном случае выражаются простым соотношением

$$n_n(t, x', x) = n \rho_n(t, x', x).$$

Это значит, что здесь среднее число рассеяний отраженных квантов целесообразнее вычислить по формуле

$$N(0, x', x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \rho_n(0, x', x)}{\rho(0, x', x)}, \quad (15)$$

и выполнить все соответствующие вычисления параллельно с расчетами функции отражения.

4. *Численные результаты.* Аналитические исследования предыдущих пунктов позволяют развивать эффективные методы для машинного решения рассмотренных задач. Здесь мы приведем некоторые результаты вычислений, выполненных согласно полученным формулам при чисто доплеровском рассеянии излучения. Численные расчеты реализованы в 10-ом приближении, т. е. вместо бесконечного ряда (4) мы ограничились использованием его первых десяти слагаемых. Для сравнения аналогичные вычисления выполнены также в приближении полного перераспределения излучения по частотам (ППЧ). По этому поводу следует отметить, что, вообще говоря, при ППЧ все аналитические результаты записываются намного проще, а это, в свою очередь, в некоторых случаях допускает дальнейшее аналитическое исследование проблемы. Однако в настоящей работе мы не ставили перед собой такой цели, тем более, что указанное аналитическое продвижение, в конечном счете, не дает ощутимой пользы при реализации численных процедур.

Численные расчеты выполнены для $\lambda(\tau)$, зависящей от оптической глубины согласно закону (11). При этом поочередно вычислялись величини

ны $R_{n_0}(t, x)$, с помощью которых определяются контур линии отражения $R_*(t, x)$ и среднее число рассеяний отраженных квантов $N_*(t, x)$. В качестве иллюстрации в табл. 1 приведены значения величин $R_{n_0}(0, x)$ в центре линии и в крыле. Как следует из приведенных значений, вклад многократно рассеянных квантов с ростом l в центре линии примерно одинаково уменьшается при 10-ом приближении и ППЧ. Также хорошо заметно, что с ростом параметра q роль l -кратно рассеянных квантов быстро убывает в обоих случаях.

ВЕЛИЧИНЫ $R_{n_0}(0, x)$ ПРИ $\lambda_0 = 0.99$ И $\beta = 10^{-4}$

Таблица 1

x	0				2.4536			
	0.01		1.0		0.01		1.0	
q	10-е пр. ППЧ							
1	2.85-01	3.01-01	1.81-01	1.87-01	2.24-02	2.79-03	9.66-04	7.34-04
2	1.40-01	1.36-01	3.92-02	3.68-02	2.72-03	2.07-03	8.02-05	1.55-04
3	8.32-02	7.81-02	8.54-03	7.62-03	1.25-03	1.65-03	1.62-05	3.28-05
4	5.48-02	5.16-02	1.86-03	1.50-03	8.99-04	1.35-03	3.51-06	5.91-06
5	3.87-02	3.63-02	4.05-04	3.35-04	7.28-04	1.12-03	7.65-07	1.45-06
6	2.85-02	2.67-02	8.87-05	7.06-05	6.09-04	9.41-04	1.67-07	3.06-07
7	2.18-02	2.03-02	1.94-05	1.48-05	5.17-04	7.94-04	3.65-08	6.43-08
8	1.70-02	1.58-02	4.23-06	3.12-06	4.41-04	5.73-04	7.96-09	1.35-08
9	1.35-02	1.25-02	9.23-07	6.57-07	3.77-04	5.72-04	1.74-09	2.84-09
10	1.09-02	1.01-02	2.02-07	1.38-07	3.23-04	4.87-04	3.80-10	5.98-10
11	8.84-03	8.15-03	4.40-08	2.90-08	2.78-04	4.15-04	8.29-11	1.26-10
12	7.26-03	6.67-03	9.60-09	6.11-09	2.38-04	3.53-04	1.81-11	2.65-11
13	6.00-03	5.48-03	2.10-09	1.29-09	2.05-04	3.01-04	3.95-12	5.57-12
14	4.99-03	4.54-03	4.53-10	2.70-10	1.76-04	2.57-04	8.63-13	1.17-12
15	4.16-03	3.77-03	1.00-10	5.68-11	1.51-04	2.19-04	1.88-13	2.45-13

Иная картина наблюдается в частотах крыльев. При 10-ом приближении величины $R_{n_0}(0, x)$ с ростом l в крыльях убывают быстрее, чем в центре линии. При ППЧ же происходит обратное явление, а именно, в крыльях линии по сравнению с центральными частотами возрастает роль многократно рассеянных квантов. Этот вывод подтверждается также результатами расчетов величины $N_*(0, x)$. При малых значениях параметра q очень хорошо вырисовывается различие поведений этой величины в двух рассмотренных случаях. Если при 10-ом приближении величина $N_*(0, x)$ в крыльях линии стремится к единице, то при ППЧ кванты крыльев испытывают наибольшее количество рассеяний (рис. 1). Физи-

ческое объяснение указанного эффекта для однородной среды дано нами в работе [8], и здесь на этом останавливаться не будем. Добавим лишь, что с ростом параметра q величина $N_*(0, x)$ стремится к единице независимо от механизма рассеяний и от частоты кванта.

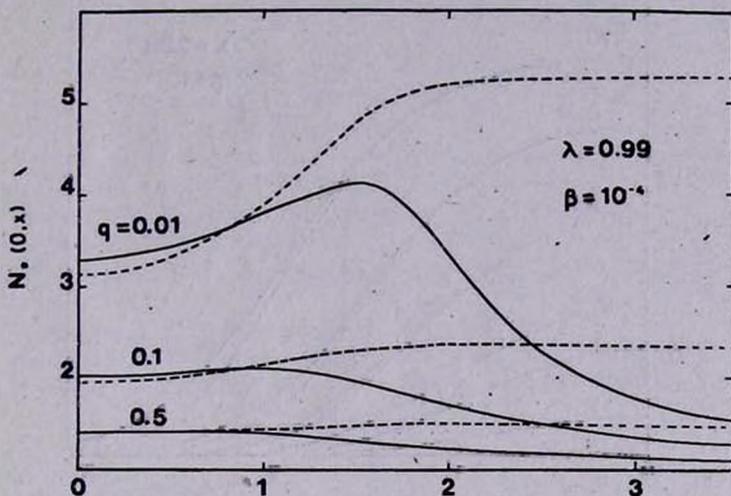


Рис. 1. Среднее число рассеяний отраженных квантов. — 10-ое приближение, ---- ППЧ.

Совершенно очевидно, что с увеличением q быстро падает сама вероятность отражения квантов от данной атмосферы. На рис. 2 показаны контуры спектральной линии отражения для различных скоростей убывания величины $\lambda(\tau)$. Уже при $q = 5$ вероятность отражения кванта в центре линии, по сравнению с аналогичной величиной, рассчитанной для однородной среды, уменьшается более чем в восемь раз.

Остается добавить, что точность численных решений указанных задач можно существенно повысить, не прибегая при этом к высоким приближениям. Для этого функцию отражения однократно рассеянных квантов можно вычислить, пользуясь точным законом перераспределения излучения по частотам, согласно следующей формуле:

$$p_1(t, x', x) = \frac{\lambda(t)}{2} \frac{r(x', x)}{v(x') + v(x) + q}, \quad (16)$$

а остальные члены построить по приближенным соотношениям. Такой подход ранее (см., например, [6]) нами был предложен и применен для однородной среды.

В заключение отметим, что подобным образом для неоднородной среды могут быть решены задачи образования спектральных линий при данных распределениях источников энергии в атмосфере. Легко может быть

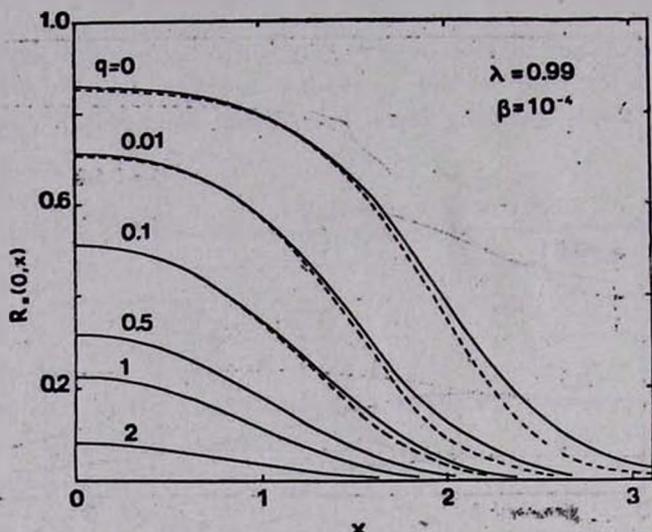


Рис. 2. Контур спектральной линии отражения. — 10-ое приближение, --- ППЧ

определено также среднее число рассеяний кванта, поглощенного в среде, содержащей источники энергии. Этим вопросам будет посвящена одна из последующих статей автора.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

RADIATION REFLECTION FROM AN INHOMOGENEOUS ATMOSPHERE FOR GENERAL LAWS OF NON-COHERENT SCATTERING

H. A. HARUTYUNIAN

The problem of radiation reflection from a semi-infinite inhomogeneous atmosphere for general laws of non-coherent scattering is considered. Both questions of reflection function determination and the mean number of reflected photon scattering are investigated. Equations for the determination of the mentioned quantities are received with the application of Ambartsumian's invariance principle.

The method elaborated in the earlier papers for the solution of analogous problems of homogeneous atmosphere is generalized for the considered medium. Some results of numerical calculations for one particular case are given as an illustration of analytical investigations.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, ДАН, 111, 1000, 1956.
2. В. В. Соболев, Астрофизика, 11, 499, 1975.
3. В. В. Соболев, Астрофиз. ж., 53, 681, 1976.
4. В. В. Соболев, Э. Г. Яновский, в сб. «Вопросы физики и эволюции космоса», Ереван, изд. АН Арм.ССР, 1978, стр. 357.
5. E. H. Avrett, The Formation of Spectrum Lines, Cambridge, Smithsonian Inst. Ast. Observ., 1965, p. 101.
6. Н. А. Нарутян, А. Г. Никогосян, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, 19, 135, 1978.
7. Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, ДАН, 242, 66, 1978.
8. Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, ДАН, 288, 1342, 1983.
9. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Ереван, изд. АН Арм.ССР, 1960, стр. 283.