Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 20–22, 2012.

О структуре Ric-полусимметрических подмногообразий

В. А. Мирзоян, Г. А. Налбандян, Р. Э. Чахмахчян

Государственный Инженерный Университет Армении, г. Ереван
E-mail: vmirzoyan@mail.ru

Римановы Ric-полусимметрические многообразия характеризуются полупаралельностью тензора Риччи R_1 и являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых и полусимметрических многообразий (см. [1] и цитированную в ней литературу). В евклидовых пространствах общая классификация Ric-полусимметричеких подмногообразий была дана автором в [2]. Некоторые их частные классы были исследованы в [3-6]. Настоящая работа посвящена исследованию нормально плоских Ric-полусимметричеких подмногообразий коразмерности $p \geq 2$ с p группами регулярных главных векторов кривизны в евклидовых пространствах.

Пусть M – m- мерное подмногообразие евклидова пространства E_n. Тогда главное расслоение ортонормированных реперов в E_n можно привести к главному расслоению $O(E_n, M)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, где $x \in M$, $e_i \in T_x(M)$, $i, j, k = 1, \dots, m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta = m+1, \dots, n$, а $T_x(M)$ и $T_x^\perp(M)$ – касательное и нормальное пространства к M в точке x. По известной схеме (см. [1], [4,5]) получим

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j,\ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k,\ h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k .$$

Здесь h_{ij}^α – компоненты второй фундаментальной формы α_2, ω_i^j – 1-формы римановой связности ∇ на M, а ω_α^β – 1-формы нормальной связности $\nabla^\perp$. Компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇, $\nabla^\perp$ и тензора Риччи R_1 определяются по формулам

$$R^j_{ikl} = -\sum_\alpha h^\alpha_{i[k} h^\alpha_{l]j},\ R^\beta_{\alpha kl} = -\sum_i h^\alpha_{i[k} h^\beta_{l]i},\ R_{ik} = R^l_{ikl} = \sum_\alpha \left(h^\alpha_{il} h^{\alpha l}_k - H^\alpha h^\alpha_{ik} \right),$$

где $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ – компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$. Если $R = 0$, то подмногообразие называется локально евклидовым, а при $R^\perp = 0$ оно называется нормально плоским. В последнем случае все матрицы $\left\| h_{ij}^\alpha \right\|$ в некотором ортонормрепере могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\left\| \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \right\|$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия. Известно, что условие Ric-полусимметричности нормально плоского подмногообразия равносильно условию $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle \cdot \langle n_i, n_j \rangle = 0$ [4]. Это значит, что любые два г.в.к. n_i и n_j нормально плоского Ric–полусимметрического подмногообразия удовлетворяют одному из следующих условий: $\langle n_i, n_j \rangle = 0$, $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle = 0$. Отсюда следует, что множество ненулевых г.в.к. нормально плоского Ric–полусимметрического подмногообразия разбиваются на группы, обладающие следующими свойствами: 1) если n_i и n_j принадлежат одной группе, то $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle = 0$, 2) если n_i и n_j принадлежат разным группам, то они ортогональны и не удовлетворяют условию $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle = 0$. Очевидно, что число таких групп ненулевых г.в.к. не превосходит коразмерность подмногообразия. Если их число равно коразмерности, то в каждой группе все г.в.к. коллинеарны [6]. В [6] доказано, что если в какой-либо группе имеются неравные коллинеарные векторы, то их число равно двум. Пусть

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X,Y) = 0 \forall Y \in T_x(M)\}, \quad T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X,Y) = 0) \forall Y \in T_x(M)\}$$

обозначают пространства дефектности и относительной дефектности подмногообразия M в точке x. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются индексом дефектности и индексом относительной дефектности подмногообразия M в точке x. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ называется пространством кодефектности в точке x.

Пусть в каждой точке x нормально плоского m-мерное подмногообразие M в E_n имеется q различных г.в.к. $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$, $p_1 + \dots + p_q = m$. Через $F_x^{(\varphi)}$ $(\varphi = 1, \dots, q)$ обозначим p_φ-мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет только одно собственное значение кратности p_φ. Именно в указанном смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим г.в.к. n_φ. Главный вектор кривизны n_φ называется регулярным, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$ и – сингулярным, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(0)}$.

Пусть m-мерное подмногообразие M в E_n является Ric-полусимметрическим и имеет коразмерность $n - m = p$. Регулярные г.в.к. разбиваются на группы, содержащие не менее двух векторов или один вектор, имеющий кратность [5]. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием коразмерности $p \ge 2$ евклидова пространства E_n и пусть M допускает p групп регулярных главных векторов кривизны. Тогда индексы дефектности и относительной дефектности совпадают и M разлагается в прямое произведение p Ric-полусимметрических гиперповерхностей.*

Классификацию Ric-полусимметрических гиперповерхностей дает (см.[3]) следующая

Теорема 2. *В евклидовом пространстве E_{m+1} гиперповерхность M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью или (а) гиперсферы S^m в E_{m+1}, или (б) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1}, или (в) произведения*

$S^n \times E_{m-n}$, где S^n гиперсфера в E_{n+1}, а E_{m-n} – $(m-n)$- мерная плоскость, $n = 2,...,m-1$, или (г) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n гиперконус вращения в E_{n+1}, а E_{m-n} – $(m-n)$- мерная плоскость, $n = 2,...,m-1$, или (д) гиперповерхности ранга ≤ 2, или (е) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1}, $m \ge 5$, которая несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер, $S^p(r_1)$, $p \ge 2$, и $S^q(r_2)$, $q \ge 2$, и прямой L, и представляет собой конус с (прямая L в качестве образующей) над прямым произведением $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m(r) \subset E_{m+1}$, или (ж) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n- полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1}, описываемая, как и K^m в п. (е), а E_{m-n}- $(m-n)$-мерная плоскость, $n = 5,...,m-1$.

Список литературы

1. Lumiste Ü. Semiparallel submanifolds in space forms. New York, Springer, 2009, 306p.
2. Mirzoyan V. A. General classification of normally flat Ric-semisymmetric submanifolds. National Acad. Sci. of Armenia. Reports, 2012, 112, № 1, 19-29.
3. Мирзоян В.А. Классификация Ric- полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах. Матем. сб., 2000, 191, № 9, 65-80.
4. Мирзоян В.А. Структурные теоремы для Ric- полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий. Матем. сб., 2006, 197, № 7, 47-76.
5. Мирзоян В.А. Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах. Изв. РАН. Сер. Матем., 2011, 75, № 6, 47-78.
6. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. О нормально плоских Ric – полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах. Изв. вузов. Матем., 2012, № 9, 19-31.