Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 21, 2000, 36–41.

Об одном свойстве решения системы линейных уравнений, полученного обобщенными методами исключения

Кнарик А. Тунян, Альберт Д. Туниев

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Аннотация

Используя обобщенное преобразование Гаусса и Грама-Шмидта, были предложены параметрические методы решения системы линейных уравнений, которые являются обобщением метода исключения Гаусса и метода полного исключения Гаусса-Жордана [3]. В этих методах на каждом s-м шаге выбирается не направляющий элемент, как это делается в методах исключения, а направляющий вектор длины k_s, где $k_s \in \{1, \ldots, n\}$, n - число столбцов матрицы A в системе $Ax = b$. Решение, полученное этими методами при некотором выборе (наборе $\{k_s\}$) является единственным.

Здесь возникает вопрос: могут ли существовать, по крайней мере, два различных набора $\{k_s\}$ и $\{k'_s\}$, для которых решения, полученные обобщенным методом исключения (или полного исключения) совпадают. В этой работе показано, что такие наборы могут существовать.

1. Обозначения

В связи с тем, что нам придется оперировать с частями векторов и матриц, приведем обозначения, предложенные Романовским [2].

Здесь $x[N]$ - вектор $x = \{x_i\}$ с индексом i, пробегающим конечное множество N;

$x[K]$ - соответствующий K-й "кусок" вектора $x[N]$, где $K \subset N$;

$x[i]$ - компонента вектора $x[N]$ с индексом i;

$x[i, N]$ - i-я строка матрицы $x[M, N] = \{x_{ij}\}$, а $x[M, j]$ - j-й столбец этой матрицы;

$x[K, L]$ - подматрица матрицы $x[M, N]$, где $K \subset M$, $L \subset N$.

Матрицы $a[M, N]$ и $b[K, L]$ могут быть перемножены, если $N = K$.

Кроме того, $o[M, N]$ - матрица, все элементы которой равны нулю (нулевая матрица), $e[M, M]$ - единичная матрица, в которой диагональные элементы равны единице, а все остальные элементы равны нулю; $M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$.

Мы не делаем различий между вектор-строкой и вектор-столбцом.

2. Описание обобщенных методов исключения

Рассмотрим линейное уравнение

$$a[M,N]x[N] = a[M,0], \tag{1}$$

где $x[N]$ - неизвестный вектор-столбец.

Обобщенный метод полного исключения является параметрическим методом. В этом методе на каждом s-м шаге мы выбираем направляющий вектор длины k_s, где $k_s \in \{1,\ldots,n\}$. Если все $k_s = 1$, то мы получаем обычные методы исключения, если все $k_s = n$, то мы получаем нормальное решение. Таким образом, обобщенные методы исключения позволяют получить решение, которое является аналогом базисного решения и нормального решения (два крайних случая).

Вначале опишем обобщенный метод полного исключения.

Не меняя общности рассуждений, допустим, что $a[M,N]$ - матрица полного ранга. Обозначим $N' = \{0,1,\ldots,n\}$ и $a^0[M,N'] = a[M,N']$. Метод может быть описан следующим образом.

1. Последовательно для $s = 1,\ldots,m$ выбираем направляющий вектор $a^{s-1}[s,K_s]$, где $K_s \subseteq N$, $N = \{1,\ldots,n\}$ и полагаем

$$a^s[i,N'] = \begin{cases} \dfrac{a^{s-1}[i,N']}{\|a^{s-1}[i,K_s]\|} & \text{при } i = s, \\ a^{s-1}[i,N'] + \alpha_i a^s[s,N'] & \text{при } i \neq s, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^s = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i,K_s]a^s[s,K_s], \qquad i \neq s.$$

Запоминаем направляющие векторы $a^s[s,K_s]$, $s = 1,\ldots,m$.

2. После m шагов мы получаем эквивалентную систему вида

$$a^m[M,N]x[N] = a^m[M,0].$$

3. Пусть $K = \bigcup\limits_{s\in M} K_s$. Заметим, что так как все $K_s \subseteq N$, то $K \subseteq N$. Используя направляющие векторы $a^s[s,K_s]$, сформируем матрицу $b[M,K] = \{b[s,j]\}$, элементы которой имеют вид

$$b[s,j] = \begin{cases} a^s[s,j] & \text{при } j \in K_s, \\ 0 & \text{при } j \in K \backslash K_s, \end{cases}$$

или, в векторной форме,

$$b[s,K] = \{a^s[s,K_s], o[K\backslash K_s]\}, \qquad s = 1,\ldots,m.$$

4. Сформируем систему

$$u[K,N]x[N] = u[K,0],$$

или

$$u[K,K]x[K] + u[K,N\backslash K]x[N\backslash K] = u[K,0],$$

где

$$u[K,N] = b^T[M,K]a^m[M,N], \qquad u[K,0] = b^T[M,K]a^m[M,0].$$

При введенных выше предположениях справедливо следующее утверждение. (см [3]).

Теорема 1. *(а) Вектор $u[K,0]$ является собственным вектором подматрицы $u[K,K]$ с собственным значением $\lambda = 1$, т.е. $u[K,K]u[K,0] = u[K,0]$.*

(б) Компоненты вектора $u[K,0]$ являются коэффициентами разложения столбц $a[M,0]$ относительно псевдобазиса $\{a[M,s]\}_{s\in K}$, т.е.

$$a[M,0] = \sum_{s\in K} a[M,s]u[s,0],$$

где $a[M,s]$ - столбцы системы (1) для $s \in K$. Кроме того, это разложение являетс единственным в данном смысле, т.е. для разбиения $\{K_1, \ldots, K_m\}$.

Если в (2) мы заменим $i \neq s$ на $i > s$, т.е. на каждом шаге s преобразуем тольк элементы, стоящие ниже s-й строки, то мы получаем обобщенный метод исключения В этом случае после m шагов получим систему вида

$$a^s[s,N]x[N] = a^s[s,0], \qquad s = 1,\ldots,m.$$

Теперь, образуя обратный ход [3], мы получаем решение исходной системы (1).

Нетрудно заметить, что при одном и том же разбиении $\{K_s\}$ решения, полученные обобщенными методами исключения и полного исключения, совпадают.

Рассмотрим одно важное свойство решения, полученного обобщенными методами полного исключения.

Теорема 2. *По отношению к обобщенному методу полного исключения число разложений $a[M,0]$ относительно псевдобазиса $\{a[M,s]\}_{s\in K}$ конечно. Для различных разбиений разложения $a[M,0]$ относительно псевдобазиса $\{a[M,s]\}_{s\in K}$ могут совпадать.*

Доказательство. Число разложений $a[M,0]$ относительно некоторого псевдобазиса $\{a[M,s]\}_{s\in K}$ конечно, так как число разбиений относительно этого псевдобазиса конечно.

Доказательство второй части Теоремы 2, т.е. что могут существовать, по крайней мере, два разных разбиения, при которых разложения $a[M,0]$ относительно некоторого псевдобазиса могут совпадать, мы покажем на следующем примере, а именно:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1, \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Здесь $M = \{1,2,3\}$, $N = \{1,2,3,4\}$.

Данный пример мы решаем при двух разбиениях:

$K = \{K_1, K_2, K_3\}$, где $K_1 = \{1,2,3,4\}$, $K_2 = \{1,2,3,4\}$, $K_3 = \{1\}$

и

$K' = \{K_1', K_2', K_3'\}$, где $K' = K_1 = \{1,2,3,4\}$, $K_2' = \{1\}$, $K_3' = \{3\}$.

При этих двух разбиениях мы получаем одно и то же решение $x[N] = u[N,0] = (1, 3/2, 1, -3/2)^T$.

Решение примера при $K = \{K_1, K_2, K_3\}$ и $K' = \{K'_1, K'_2, K'_3\}$ дано ниже. В Таблицах 0-6 в последних столбцах записаны соответствующие значения α_i.

Таблица 0.
$K_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
1	-1	1	1	-1	:2
1	0	1	0	2	-1
2	1	-1	-1	4	1/2

Таблица 1.
$K_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	0
1/2	1/2	1/2	-1/2	5/2	:1
9/4	3/4	-3/4	-3/4	15/4	-3/2

Таблица 2.
$K_3 = \{1\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2
1/2	1/2	1/2	-1/2	5/2	-1/2
3/2	0	-3/2	0	0	:3/2

Таблица 3.

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$
0	-1/2	1	1/2	-1/2
0	1/2	1	-1/2	5/2
1	0	-1	0	0

Используя направляющие векторы $a^1[1,N] = (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$,
$a^2[2,N] = (1/2, 1/2, 1/2, -1/2)$, $a^3[3,1] = (1)$, строим матрицу

$$b[M,N] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как, согласно Таблице 3, $b[M,0] = (-1/2, 5/2, 0)^T$, то $u[N,0] = b^T[M,N]b[M,0] = (1, 3/2, 1, -3/2)^T$.

Теперь решим пример при разбиении $K' = \{K'_1, K'_2, K'_3\}$.

Таблица 4.
$K_1' = K_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
1	-1	1	1	-1	:2
1	0	1	0	2	-1
2	1	-1	-1	4	1/2

Таблица 5.
$K_2' = \{1\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2
1/2	1/2	1/2	-1/2	5/2	:1/2
9/4	3/4	-3/4	-3/4	15/4	-9/4

Таблица 6.
$K_3' = \{3\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$	α_i
0	-1	0	1	-3	0
1	1	1	-1	5	1
0	-3/2	-3	3/2	-15/2	:3

Таблица 7.

x_1	x_2	x_3	x_4	$a[M,0]$
0	-1	0	1	-3
1	-1/2	0	1/2	5/2
0	-1/2	-1	1/2	-5/2

Используя направляющие векторы $a^1[1,N] = (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$, $a[2,1] = (1)$, $a[3,3] = (-1)$, строим матрицу

$$b[M,N] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как, согласно Таблице 7, $b[M,0] = (-3, 5/2, -5/2)^T$, то
$u[N,0] = b^T[M,N]b[M,0] = (1, 3/2, 1, -3/2)^T$.

Литература

[1] В. В. Воеводин, *Вычислительные основы линейной алгебры.* Наука, Москва, 1977.

[2] И. В. Романовский, *Алгоритмы решения экстремальных задач.* Наука, Москва, 1977.

[3] A. D. Tuniev, *Pivot vector method and its applications.* Cybernetics and Systems Analysis, New-York, **28**, 1, 1993, 99-109.

[4] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.* Физматгиз, Москва, 1963.