Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 18, 1997, 87-94.

Принцип максимума энтропии и задача прогнозирования капиталовложений

М. А. Саакян

ЕрГУ, экономический факультет

Решена задача нахождения наиболее вероятного распределения инвестиций по отраслям народного хозяйства. Метод решения основан на принципе максимума энтропии.

1 Задача прогнозирования капиталовложений

В [1] рассматривается задача прогнозирования распределения капиталовложений в следующей постановке: известен перспективный план развития экономики городского хозяйства на конец периода долгосрочного планирования; известны также ежегодные суммарные инвестиции на развитие экономики городского хозяйства; требуется определить такой план распределения вложений по отраслям хозяйства города, при котором достижение прогнозных показателей перспективного плана осуществляется по всем отраслям одновременно, а в самом процессе развития происходит сглаживание диспропорций между различными отраслями. Там же приведена методика прогнозирования распределения капиталовложений согласно опорному плану, введенному В.И.Зубовым.

Опорный план имеет следующую конструкцию:

$$K_i(t) = \frac{[z_i(T) - z_i(t)]/s_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}[z_j(T) - z_j(t)]/s_j} \cdot K(t) \tag{1}$$

где $t = 0, 1, ..., T-1$ – текущий год прогноза, T – горизонт прогноза; $K(t)$ – фиксированная величина вложений, выделенных для развития экономики в t-м году; $z_i(T)$ и $z_i(t)$ – заданное конечное и текущее количественное состояние i-ой отрасли в T-ом и t-ом году прогнозиравания соответственно, $i = \overline{1,n}$, n – количество отраслей; $1/s_i$ – удельные затраты вложений для i-ой отрасли; $K_i(t)$ – искомая величина вложений i-ой отрасли в году t.

Уравнения движения состояния i-ой отрасли, в предположении, что лаг капиталовложений равен одному году, задается в виде:

$$z_i(t+1) = z_i(t) + s_i K_i(t) \quad i = \overline{1,n}, \ t = \overline{0, T-1}. \tag{2}$$

Опорный план (1) гарантирует:

- одновременный сбалансированный переход всех отраслей из начального состояния $(z_1(0), z_2(0), ..., z_n(0))$ в конечное состояние $(z_1(T), z_2(T), ..., z_n(T))$, при условии сбалансированности обеих состояний;
- в некотором смысле равномерную ликвидацию диспропорций развити между отраслями.

В [2] приводится постановка оптимизационной задачи по ускорению процесса сглаживания диспропорции в развитии отраслей, в которой требуется найти

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) \left[\frac{z_i(T) - (z_i(t) + s_i K_i(t))}{z_i(T)} \right]^2 \to \min \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \quad K_i(t) \geq 0,$$

$$0 \leq \gamma_i(t) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{0, T-1} \tag{4}$$

Придавая коэффициентам $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{0, T-1}$ различные веса, которые могут быть продиктованы необходимостью решения тех или иных социально-экономических задач, можно получить различные варианты оптимального распределения вложений по отраслям для каждого текущего года t периода $[0, T]$, в частности – опорный план. Зная величины $K_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{0, T-1}$, легко по конструкции, аналогичной (1), построить опорные планы распределения вложений для всех уровней иерархической системы управления звеньев народного хозяйства городской системы.

Рассмотрим уравнения движения количественного состояния i-ой отрасли:

$$z_i(t+1) = z_i(t) + s_i K_i(t) \tag{5}$$

или

$$\Delta z_i(t) = z_i(t+1) - z_i(t) = s_i K_i(t). \tag{6}$$

Предполагая, что приросты продукции отраслей соизмеримы, просуммируем обе части (6). Тогда получим

$$\Delta z(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t), \tag{7}$$

где $\Delta z(t)$ – прирост валового продукта народного хозяйства в t-ом году. Выражение (7) подсказывает, что должно иметь место

$$\Delta z(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) = s K(t), \quad t = \overline{0, T-1}. \tag{8}$$

где $1/s$ – ожидаемые удельные затраты капитальных вложений по всем отраслям народного хозяйства в t-ом году прогнозного периода.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу.

Основная задача. Найти наиболее вероятное распределение инвестиций $K(t)$, для фиксированного года t, $t = 0, 1, ..., T-1$, по всем отраслям народного хозяйства, чтобы даждый из отраслей получил необходимое количество вложений $K_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, обеспечивающее сбалансированное развитие отраслей, при одновременном выполнении условий:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \geq \Delta z(t), \tag{10}$$

Целевая функция должна обеспечить достижение наиболее вероятного распределения вложений по отраслям народного хозяйства. Условие (9) означает, что прогнозируемый лимит капитальных вложений необходимо распределить между отраслями, а условие (10) требует обеспечить прогнозный прирост объема валовой продукции во всем народном хозяйстве.

Одним из вариантов решения основной задачи является применение принципа максимума энтропии [3-7]. И тогда основная задача принимает вид:

Задача 1. Найти

$$H = -\sum_{i=1}^{n} K_i(t) \ln K_i(t) \to \max \tag{11}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \geq \Delta z(t). \tag{13}$$

Замечание. Если известны предпочтения развития отраслей, то целевая функция (11) принимает вид:

$$-\sum_{i=1}^{n} K_i(t) \ln \frac{K_i(t)}{\gamma_i(t)} \to \max$$

$$0 \leq \gamma_i(t) \leq 1, \quad t = \overline{0, T-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) = 1,$$

где $\gamma_i(t)$ – коэффициенты предпочтения.

Так как решение задачи 2 выписывается по формуле

$$K_i(t) = e^{-\lambda+1} e^{-\mu s_i} = \frac{e^{-\mu s_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-\mu s_j}} \cdot K(t), \tag{14}$$

то нет необходимости ставить условие неотрицательности $K_i(t) \geq 0$. $\lambda = \lambda(t)$ и $\mu = \mu(t)$ – множители Лагранжа ограничений (12)-(13) соответственно, оптимальные значения которых легко можно найти из условий (12) и (13).

2 Интерпретация основной задачи и взаимные задачи

На первый взгляд задача 1 кажется искусственной, а целевая функция внешне похожая на функцию энтропии Шеннона, не имеющую конкретного экономического смысла. Однако это не так. Целевая функция (11) имеет конкретную интерпретацию [3 - 7, 10],содержательный смысл которой в следующем:

Максимум (11) соовествует наиболее вероятной равноэффективной структуре распределения капитальных вложений по отраслям народного хозяйства, при наличии условий (12) – (13). Функцию (11) иногда называют также структурной функцией [6].

Задачи типа 1 встречаются в теории передачи информации (так называсмая первая вариационная задача), при моделировании пассажиропотоков [4], при исследовании городских систем [5] и т.д. Вероятностно-энтропийное обоснование задач с энтропийной целевой функцией дано в [3 – 6].

Основную задачу можно развить, добавив ограничение на прирост трудовых ресурсов, тогда аналогом задачи 1 является задача 2, с дополнительным ограничением на прирост труда.

Задача 2. Найти

$$-\sum_{i=1}^{n} K_i(t)\ln K_i(t) \to \max, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) = \Delta z(t), \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i K_i(t) \geq \Delta L(t). \tag{18}$$

В (18) l_i означает удельные затраты труда на единицу капитальных вложений, $\Delta L(t)$ – прирост ресурсов труда, занятых в рассматриваемых отраслях народного хозяйства (обеспечение занятости населения).

Решение задачи 2 представляется в виде

$$K_i(t) = e^{-\lambda+1}e^{-\mu s_i-\nu l_i} = \frac{e^{-\mu s_i-\nu l_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{-\mu s_i-\nu l_i}}\cdot K(t),$$

где λ, μ, ν – множители Лагранжа ограничений (16)–(18), соответственно.Представляют интерес взаимные задачи, соответствующие задачам 1 и 2 и экономическая интерпретация множителей Лагранжа соответствующих пар взаимных задач [8–9].

Рассмотрим сначала задачу 1′ взаимную задаче 1.

Задача 1′. Найти

$$\Delta z(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \to \max \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t) \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t)\ln K_i(t) = H \tag{21}$$

Как известно, множители Лагранжа q, ω ограничений (20) и (21) соответственно обладают свойством оценки ограничения как величины отношения вариации оптимального значения целевой функции к малому изменению правой части, его вызывающему.

При этом оценка ограничения имеет размерность отношения размерности целевой функции к размерности соответствующего ограничения. Очевидно также, что оценки одного и того же ограничения в различных взаимных задачах будут иметь различный смысл.

Согласно [8–9] множители Лагранжа, пары взаимных задач 1 и 1′, связаны между собой, и имеет место соотношение

$$q = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \omega = \frac{1}{\mu}.$$

Экономический смысл множителей Лагранжа:

$\lambda = \lambda(t)$ – оценка структуры распределения капитальных вложений при увеличении на еденицу общего объема капитальных вложений;

$\mu = \mu(t)$ – оценка структуры распределения капитальных вложений при увеличении на еденицу прироста общего объема валовой продукции;

$q = q(t)$ – оценка прироста общего объема валовой продукции при увеличении на единицу общего объема капитальных вложений (абсолютная эффективность прироста капитальных вложений);

$\omega = \omega(t)$ – оценка прироста общего объема валовой продукции при увеличении значения структурной функции распределения капитальных вложений на единицу.

Рассмотрим задачу 2′ взаимную к задаче 2.

Задача 2′. Найти

$$\Delta z(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \to \max, \tag{23}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i K_i(t) = \Delta L(t), \tag{25}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} K_i(t) \ln K_i(t) = H. \tag{26}$$

Пусть p_1, p_2, v – оценки ограничений (24) – (26) соответственно, и z_1, z_2, ω – оценки ограничений (16) – (18) задачи 2′.

Их экономический смысл таков:

$p_1 = p_1(t)$ – оценка прироста валовой продукции при единичном приросте общего объема капиталовложений;

$p_2 = p_2(t)$ – оценка прироста валовой продукции при единичном приросте труда (производительность труда вновь вовлеченных ресурсов);

$v = v(t)$ – оценка прироста валовой продукции при увеличении значения структурной функции распределения капиталовложений на единицу;

$z_1 = \dfrac{p_1}{v}$ – оценка структуры распределения капитальных вложений при единичном приросте общего объема капитальных вложений;

$z_2 = \dfrac{p_2}{v}$ – оценка структуры распределения капитальных вложений при единичном приросте валовой продукции;

$\omega = \dfrac{1}{v}$ – оценка структуры распределения капитальных вложений при единичном изменении прироста труда.

Взаимная задача строится заменой целевой функции основной задачи на одно из ограничений, поэтому получим еще одну задачу, взаимную задаче 2.

Задача 2″. Найти

$$\Delta L(t) = \sum_{i=1}^{n} l_i K_i(t) \to \min, \tag{27}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \geq \Delta z(t), \tag{29}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} K_i(t) \ln K_i(t) \geq H \tag{30}$$

Обозначим через z_1', z_2', ω' – множители Лагранжа основной задачи (задача 2), p_1', p_2', v' – множители Лагранжа, соответствую'ие ограничениям (28) – (30) задачи 2″. Экономический смысл множителей Лагранжа пары взаимных задач 2 и 2″ следующий:

$z_1' = \dfrac{p_1'}{v'}$ – оценка стуктуры распределения капитальных вложений при единичном приросте общего объема капитальных вложений;

$z_2' = \dfrac{p_2'}{v'}$ – оценка стуктуры распределения капитальных вложений при единичном приросте валовой продукции;

$\omega' = \dfrac{1}{v'}$ – оценка стуктуры распределения капитальных вложений при единичном изменении прироста труда;

p_1' – оценка влияния единицы прироста общего объема капитальных вложений на прирост труда;

p_2' – оценка влияния единицы прироста валовой продукции на прирост труда;

v' – оценка влияния изменения структуры распределения капитальных вложений на прирост труда.

3 Динамическая задача распределения капитальных вложений

Общая постановка задачи распределения капитальных вложений на весь период долгосрочного планирования – динамическая задача экономического развития [10], легко следует из постановки основной задачи.

Пусть известен общий объем вложений K на весь период прогнозирования. Требуетдя найти наиболее вероятное распределение величины K по всем отраслям народного хозяйства по годам периода прогнозирования, чтобы каждая из отраслей для каждого года получила необходимое количество капитальных вложений, обеспечивающих сбалансированное развитие отраслей, при пдновременном выполнении ограничений на прирост продукции (общей и погодовой), а также условия баланса погодового прироста трудовых ресурсов, соответственно.

В формализованном виде задача выглядит так:

$$-\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} K_i(t)\ln K_i(t) \to \max \tag{31}$$

при ограничениях

$$\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(t) = K(t), \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta z_i(t) = \Delta z(t), \tag{34}$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \Delta z_i(t) = \Delta z_i, \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i K_i(t) = \Delta L(t), \tag{36}$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \Delta L(t) = L \tag{37}$$

где

(32) – ограничение на общий объем капитальных вложений K на весь период прогнозирования;

(33) – баланс капитальных вложений $K(t)$ текущего года прогнозирования;

(34) – баланс прироста валовой продукции $\Delta z(t)$ текущего года по всем отраслям народного хозяйства;

(35) – баланс прироста валовой продукции Δz_i, i-ой отрасли на весь период прогнозирования;

(36) – баланс прироста труда $\Delta L(t)$ текущего года перспективного планирования;

(37) – баланс прироста труда за весь период прогнозирования.

Уравнения движения состояния отраслей остаются прежними:

$$\Delta z_i(t) = z_i(t+1) - z_i(t) = s_i K_i(t),$$

$$i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{0,T-1}.$$

Целевые функции соответствующих взаимных задач будут:

a) при максимизации валового продукта:

$$\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} s_i K_i(t) \to \max .$$

b) при минимизации трудовых ресурсов:

$$\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} l_i K_i(t) \to \min .$$

Литература

1. Зубов В.И., Петросян Л.А. Задача распределения капиталовложений. Изд-во Ленгосунта, 1971.
2. Зубов В.И., Петросян Л.А. Математические методы планирования. Изд-во Ленгосунта, 1982.
3. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981.
4. Вильсон В. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
5. Попков Ю.С., Посохин М.В., Гутнов А.Э., Шмульян Б.Л. Системный анализ и проблемы развития городов. М.: Наука, 1983.
6. Опойцев В.И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.
7. Саакян М.А., Киракосян Ш.В. Макромодель оптимального экономического роста союзной республики. Вестник ЕрГУ. Общественные науки, N4 (60). Ереван, 1986.
8. Лурье А.Л. Абстрактная модель оптимального хозяйственного процесса и о.о.оценки. Экономико-матеметические методы. М.: вып.1, 1966.
9. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.О. Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Мысль, 1972.
10. Саакян М.А. Прогнозирование наиболее вероятного распределения национального экономического потенциала (на арм. языке). Труды конференции "Айк". Ереван, 1995 (октябрь).
11. Саакян М.А., Киракосян Ш.В. Энтропийный метод исследования экономических систем. Проблема развития и размещения производительных сил в союзной республике. Сб. научных трудов НИИЭП при Госплане Арм.ССР. Ереван, 1983.