УДК 518.9

А. А. АРАКЕЛЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ РАЗЛОЖИМЫХ ОТНОШЕНИЙ

Известно, что задачу принятия решений можно рассматривать как [1] пару, состоящую из множества альтернатив и заданного на нем бинарного отношения предпочтения. Это позволяет применить к задачам принятия решений алгебру множеств и отношений, а именно, использовать и перенести на задачи принятия решений такие алгебраические конструкции, как разложение бинарного отношения в прямое и лексикографическое произведение и композицию бинарных отношений. В качестве такой конструкции можно рассмотреть, например, игру между двумя противоборствующими сторонами и представить её как произведение (прямое или лексикографическое и композицию) нескольких игр. Отсюда следует, что удобнее разложить задачу принятия решений в произведение более простых задач и анализ сложной задачи принятия решений заменить анализом более простых.

Необходимость такого подхода в применении к играм отмечал Н. Н. Воробьев в [2]: «... теория игр, подобно абстрактной алгебре и топологии, дожна была встать на путь изучения исчислений игр. На этом пути сделаны лишь первые шаги, но представляется он весьма перспективным. «Одним из направлений в этой области является изучение возможностей сведения одних игр к другим, точнее говоря, нахождение и описание (хотя бы частичное) решений одной игры на основе решений другой игры, в том или ином смысле более просто устроенной».

Данная работа посвящена исследованию свойств разложимых отношений, рассмотрению вопросов разложения задач принятия решений в произведение (прямое или лексикографическое) и композицию нескольких задач и изучению свойств решения Неймана—Моргенштерна, или короче, НМ-решения.

1. Определения

Аналогично [1], задачу принятия решений будем представлять в виде пары (A, ρ), где A—множество альтернатив, ρ—бинарное отношение предпочтения, заданное на A.

Всюду далее будем пользоваться понятиями, определениями и символикой теории бинарных отношений из [3].

$\neg$—отрицание, $\wedge$—конъюнкция, $\vee$—дизъюнкция, $\rightarrow$—импликация, $\leftrightarrow$—эквивалентность, $\bigwedge\limits_{x}$—квантор общности по переменному x, $\bigvee\limits_{x}$—квантор существования по переменному x, $\subset$—классификатор, т. е. $\underset{x}{\subset}\pi(x)$ обозначает множество всех x, удовлетворяющих условию, выражаемому предикатом $\pi(x)$.

Пусть $\{A_s\}_{s\in S}$ произвольное семейство множеств. Через $\prod\limits_{s\in S} A_s$ обозначим декартово произведение этого семейства множеств. Подмножества $\prod\limits_{s\in S} A_s$ будем называть отношениями.

Если φ_i, $i\in I$ отношения из $\prod_{s\in S} A_{si}$, то их прямым произведением будем называть отношение $\square_{i\in I}\varphi_i\subset\prod_{s\in S} A_s$ $A_s=\prod_{i\in I} A_{si}$ определенное формулой:

$$(a_s)_{s\in S}\in\square_{i\in I}\varphi_i\leftrightarrow(a_{si})_{s\in S}\in\varphi_i\ i\in I \text{ где } a_s\neq(a_{si})_{i\in I},\ s\in S$$

Пусть $\widetilde{A}_i=A_{si}$, $s\in S$, $i\in I$. Положим отношение $\Delta_{S\widetilde{A}_i}=\subset\bigvee_{\substack{(a_{si})_{s\in S}\\ a\in\widetilde{A}_i}}$ $a_{si}=a$, $s\in S$, $i\in I$.

Лексикографическим произведением отношений $\varphi_i\subset\prod_{s\in S} A_{si}$, $i\in I$ назовем отношение $\underset{i\in I}{X}\varphi_i\subset\prod_{s\in S} A_{si}$ определенное формулой:

$$(a_s)_{s\in S}\in\underset{i\in I}{X}\varphi_i\leftrightarrow\bigvee_{k\in I}\bigwedge_{i<k-1}(a_{si})_{s\in S}\in\Delta_{S.\widetilde{A}_i}\ \bigwedge(a_{sk})_{s\in S}\in\varphi_k.$$

Композицией отношений φ_i, $i\in I$ назовем отношение $\square_{i\in I}\psi_i\subset\prod_{s\in S} A_s$, определенное формулой:

$$(a_s)_{s\in S}\in\square_{i\in I}\varphi_i\leftrightarrow\bigvee_{k\in I}(a_{sk})_{s\in S}\in\varphi_k\wedge\bigwedge_{i\neq k}(a_{si})_{s\in S}\in\Delta_{S.\widetilde{A}_i}$$

Под слабым объединением отношений $\varphi_i\subset\prod_{s\in S} A_{si}$, $i\in I$ понимаем отношение $\otimes\varphi_i$ определенное следующим образом:

$$(a_s)_{s\in S}\in\otimes\varphi_i\leftrightarrow\bigvee_{i\in I}(a_{si})_{s\in S}\in\varphi_i\wedge\bigwedge_{j+i}(a_{sj})_{s\in S}\in\varphi_j.$$

Положим $A=\prod_{s\in S} A_s$, $A_s=\prod_{i\in I} A_{si}$, $s\in S$. Через π_i обозначим отношение, определенное формулой: $\pi_i\subset A\times A_i$, $i\in I$, $\pi((a_s)_{s\in S})=a_i$, $i\in I$.

Тогда будут иметь место следующие равенства:

$$\varphi_i=(\square_{s\in S}\pi_{si})(\square_{i\in I}\varphi_i),\qquad i\in I,\tag{1.1}$$

$$\varphi_i\subset(\square_{s\in S}\pi_{si})(\underset{i\in I}{X}\varphi_i),\qquad i\in I,\tag{1.2}$$

$$\varphi_i\subset(\square_{s\in S}\pi_{si})(\underset{i\in I}{\times}\varphi_i),\qquad i\in I\tag{1.3}$$

Положим $\varepsilon_\pi=\pi_i^{-1}{}_0\pi_i$, $i\in I$. Отношение $\varphi\subset\prod_{s\in S} A_s$ разлагается в прямое произведение /лексикографическое произведение/ отношений $\varphi_i\subset\prod_{s\in S} A_{si}$, $i\in I$, если $\varphi=\prod_{i\in I}\varphi_i$ ($\varphi=\underset{i\in I}{X}\varphi_i$, $\varphi=\underset{i\in I}{\times}\varphi_i$).

В дальнейшем нам понадобится следующее определение разложимости отношения.

Будем говорить, что отношение $\rho\subset A\times A$ разложимо в прямое произведение однотипных ему отношений $\sigma_i\subset B_i\times B_i$, если существует такое взаимно-однозначное отображение θ множества A на $\underset{i\in I}{X} B_i$, что $\overline{\theta\square\theta}(\rho)=\square_{i\in I}\sigma_i$, т. е. отношения ρ и $\square_{i\in I}\sigma_i\subset\underset{i\in I}{X} B_i$ изоморфны. Пусть $\pi_i: B=\underset{i\in I}{X} B_i\to B_i$, $\sigma_i\subset B_i\times B_i$ и ρ разложимо в прямое произведение отношений σ_i, $i \in I$. Тогда $(b_i^1, b_i^2) \in \sigma_i \leftrightarrow \bigvee_{((b_j^1)_{j \neq i}(b_j^2)_{j \neq i}) \in (\underset{j \neq i}{X} B_j, \underset{j \neq i}{X} B_j)} \bigvee_{(a^1, a^2) \in \rho}$

$((a^1, (b_j^1)_{j \in I}), a^2, (b_j^2)_{j \in I})) \in \overline{\theta \square \theta}\, (\rho) \leftrightarrow (b_i^1, b_i^2) \in (\pi_i \square \pi_i))\overline{(\theta \square \theta)}(\rho)) \leftrightarrow$

$\sigma_i = (\pi_i \square \pi_i)\, (\overline{(\theta \square \theta)}(\rho))$.

Будем говорить, что отношение $\rho \subset A \times A$ разложимо в лексикографическое произведение отношений $\sigma_i \subset B_i \times B_i$, если существует такое взаимно-однозначное отображение θ множества A на $\underset{i \in I}{X} B_i$, что $\overline{\theta \square \theta}\, (\rho) = \underset{i \in I}{X} \sigma_i$, т. е. отношения $\rho \subset A \times A$ и $\underset{i \in I}{X} \sigma_i \subset \underset{i \in I}{X} B_i \times \underset{i \in I}{X} B_i$ изоморфны.

Как и в случае разложимости в прямое произведение имеем $\sigma_i \subseteq \pi_i \circ \theta \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \pi_i^{-1}$, $i \in I$.

Если ρ отношение на A, то под срезом ρ через подмножество $B \subset A$ будем понимать множество $\rho(B) = \underset{a \in A}{\subset} \bigvee_{b \in B} (b, a) \in \rho$.

Под звездой отношения ρ через подмножество $B \subset A$ понимаем множество $St(B, \rho) = \rho\, (B)\, U \rho^{-1}(B)$.

Под суперпозицией отношений $\rho_i \subset A \times A$ будем понимать отношение $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_n$ определенное формулой:

$$(a, b) \in \rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_n \leftrightarrow \bigvee_{\{a_i\}_{i=1,\ldots,n-1} \subset A} (a, a_1) \in \rho_1 \wedge (a_1, a_2) \in \rho_2 \wedge \ldots \wedge (a_{n-1}, b) \in \rho_n.$$

Если $\rho_i = \rho$, $i = 1, \ldots, n$, то суперпозицию обозначим ρ^n.

Пусть дано отношение $\rho \subset A \times A$. Последовательность $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots,n} \subset A$ называется циклом, если $\bigwedge_{i=1,\ldots,n-1} (a_i, a_{i+1}) \in \rho \wedge (a_n, a_1) \in \rho$. Отношение $\rho \subset A \times A$ называется ациклическим, если оно не имеет циклов. Отношение $\rho \subset A \times A$ называется звездно-конечным, если $|St(a, \rho)| < \infty$ для любого $a \in A$.

Проекцией элемента $a \in A = \underset{s \in S}{\Pi} A_s$ через подмножество $L \subset S$ называется $pr_L a = (a_i)_{i \in L}$.

$Pr_1 \rho$, $pr_2 \rho$, $pr \rho$ — первая, вторая, объединенная проекции бинарного отношения $\rho \subset A \times B$:

$$pr_1 \rho = \underset{a \in A}{\subset} \bigvee_{b \in B} (a, b) \in \rho, \quad pr_2 \rho = \underset{b \in B}{\subset} \bigvee_{a \in A} (a, b) \in \rho, \quad pr \rho = pr_1 \rho \cup pr_2 \rho.$$

Пусть $(A_s)_{s \in S}$ произвольное семейство множеств, $A_s = \underset{i \in I}{\Pi} A_{si}$, $\varphi \subset \underset{s \in S}{\Pi} A_s$, $\psi \subset \underset{s \in S}{\Pi} A_s$, $\varnothing \neq T \underset{\neq}{\subset} S$.

Определим отношение $bin_T\, \varphi \subset (\underset{s \in T}{\Pi} A_s) \times (\underset{s \in S \setminus T}{\Pi} A_s)$ следующим образом:

$$((a_s)_{s \in T}, (a_s)_{s \in S/T}) \in bin_T \varphi \leftrightarrow a_s)_{s \in S} \in \varphi.$$

Очевидно, что $bin_T \varphi = bin_{S \setminus T} \varphi$.

НМ-решением отношения $\rho \subset A \times A$ называется подмножество $V_\rho(A) \subset A$, удовлетворяющее условиям:

1) $\bigwedge\limits_{a,b\in V_\rho(A)} \neg(a,b)\in\rho$;

2) $\bigwedge\limits_{a\in V_\rho(A)} \bigvee\limits_{b\in V_\rho(A)} (b,a)\in\rho$.

2. Свойства разложимых отношений

Лемма 2. 1. Если отношение $\rho\subset A\times A$ разложимо в прямое произведение $\mathop{\square}\limits_{i\in I} \rho_i$ отношений $\rho_i\subset A_i\times A_i$, то

$\bigwedge\limits_{B\subset A} St\ (B,\rho)=(\mathop{\square}\limits_{i\in I} \rho_i^{-1}(B_i))\cup(\mathop{\square}\limits_{i\in I} \rho_i(B_i))$, где $B=\mathop{X}\limits_{i\in I} B_i$.

Доказательство. $c\in St(B,\rho)\leftrightarrow\bigvee\limits_{b\in B}(b,c)\in\rho\cup\rho^{-1}\leftrightarrow\bigwedge\limits_{i\in I}(b_i,c_i)\in\rho_i\vee\bigwedge\limits_{i\in I}(b_i,c_i)\in\rho_i^{-1}\leftrightarrow\bigwedge\limits_{i\in I} c_i\in\rho_i(B_i)\vee\bigwedge\limits_{i\in I} c_i\in\rho_i^{-1}(B_i)\leftrightarrow c\in\mathop{\square}\limits_{i\in I}\rho_i\ (B_i)\ \vee c\in\square\rho_i^{-1}\ (B_i)$.

Лемма 2.2 Если отношение $\rho\subset A\times A$ разложимо в прямое произведение $\mathop{\square}\limits_{i\in I} \rho_i$ отношений ρ_i, $i\in I$, $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$, то $\overset{n}{\rho}\cap\triangle_A=\mathop{\square}\limits_{i\in I}(\overset{n}{\rho_i}\cap\triangle_{A_i})$.

Доказательство. $\rho\cap\triangle_A=\overbrace{\mathop{\square}\limits_{i\in I}\rho_i}^{n}\cap\triangle_A=(\mathop{\square}\limits_{i\in I}\overset{n}{\rho_i})\cap(\mathop{\square}\limits_{i\in I}\triangle_i)=\mathop{\square}\limits_{i\in I}\overset{n}{\rho_i}\cap\triangle_{A_i}$.

Теорема 2.1. Прямое произведение отношений $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$ звездно-конечное и ациклическое тогда и только тогда, когда $\bigwedge\limits_{i\in I}\rho_i$ звездно-конечные и ациклические.

Доказательство теоремы следует из леммы 2.1 и леммы 2.2.

Лемма 2.3. Если отношение $\rho\subset A\times A$ разлагается в композицию отношений $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$, то $\bigwedge\limits_{m}\overset{m}{\square}\overset{m}{\rho_i}\subset\rho$.

Доказательство. Из $(a,b)\in\square\overset{m}{\rho_i}$ следует существование таких a_i, $b_i\in A_i$, $i\in I$, $j\in I$, что $\bigwedge\limits_{i\neq j}(a_i,b_i)\in\triangle_{A_i}\ \wedge(a_j,b_j)\in\overset{m}{\rho_i}$. Отсюда $\bigwedge\limits_{i\neq j}(a_i,b_i)\in\triangle_{A_i}$ и существуют такие $a_j^1, a_j^2,\dots, a_j^m\in A_j$, что $(a_j, a_j^1)\in\rho_j\wedge(a_j^1, a_j^2)\in\rho_j\wedge\dots(a_j^m, b_j)\in\rho$. Определим последовательность $\{\tilde{a}^k\}_k=1,2,\dots,m$ следующим образом:

$$\tilde{a}=a_j^k,\ k=1,2,\dots,m,$$

$$pr_{I\setminus\{j\}}\tilde{a}^k=pr_{I\setminus\{j\}}a,\ k=1,2,\dots,m.$$

Тогда $(a,\tilde{a}^1)\in\rho$ и $(\tilde{a}^k,\tilde{a}^{k+1})\in\rho$ для любого $k=1,\cdot\cdot\cdot,m-1$ и $(\tilde{a}^m, b)\in\rho$.

Отсюда $(a,b)\in\overset{m}{\rho}$ и следовательно $\mathop{\overset{m}{\square}}\limits_{i\in I}\overset{m}{\rho_i}\subset\rho$.

Покажем, что обратное включение верно не всегда. Пусть $(a,b)\in\overset{m}{\rho}$. Тогда существует такая последовательность $\{a^i\}_{i=1,\dots,m}$, что

$(a, a^1)\in\rho\wedge(a^1, a^2)\in\rho\wedge\ldots\wedge(a^m, b)\in\rho$. Отсюда $(a_{i_1}, a^1_{i_1})\in\rho_{i_1}\wedge(a^1_{i_2}, a^2_{i_2})\in\rho_{i_2}\wedge\ldots\wedge(a^{m-1}_{i_m})\in\rho_{i_m}\wedge(a^m_{i_{m+1}}, b_{i_{m+1}})\in\rho_{i_{m+1}}$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{m+1}$. Следовательно $a_j\neq b_j$, $j\notin\{i_1, i_2,\ldots,i_{m+1}\}$, $(a_j, b_j)\in\rho_j$, $j\in\{i_1,\ldots, i_{m+1}$. Отсюда $(a, b)\notin\underset{i\in I}{\overset{m}{\square}}\rho_i$.

Лемма 2. 4. Если отношение $\rho\subset A\times A$ разлагается в композицию отношений $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$, то $\wedge\ \overset{m}{\square}\ \rho_i\cap\triangle_{A_i}\subset\overset{m}{\rho}\cap\triangle_A$

Доказательство. Из $(a,b)\in\underset{i\in I}{\overset{m}{\square}}\rho_i\cap\triangle_{A_i}$ следует существование таких $a_i, b_i\in A_i$, $i\in I$ и $j\neq i$, что $(a_i, b_i)\in\triangle_{A_i}$, $i\in I$, $i\neq j$, $(a_j, b_j)\in\overset{m}{\rho_j}\cap\triangle_{A_j}$.

Отсюда $a=b$ и $(a_j, a^1_j)\in\rho_j\wedge(a^1_j, a^2_j)\in\rho_j\wedge\ldots\wedge(a^m_j, b_j)\in\rho_j\wedge(a_j, b_j)\in\triangle_{A_j}$.

Определим последовательность $\{\tilde a^k\}_{k=1\ldots,m}$ следующим образом:

$$\tilde a^k_j=a^k_j,\ k=1,\ldots,m,$$

$$pr_{I\setminus\{j\}}\tilde a^k=pr_{I\setminus\{j\}}\ a.$$

Тогда $a=b\wedge(a,\tilde a^1)\in\rho\wedge\ \wedge\ (\tilde a^k, \tilde a^{k+1})\in\rho\wedge(a^m, b)\in\rho$.

Отсюда $(a, b)\in\overset{m}{\rho}\cap\triangle_A$ и следовательно $\underset{i\in I}{\overset{m}{\square}}\rho_i\ \cap\triangle_{A_i}\subset\overset{m}{\rho}\cap\triangle_{A_i}$.

Покажем, что обратное включение не всегда верно. Пусть ρ_i симметричные отношения, $i\in I$, $(a, b)\in\overset{2n}{\rho}\cap\triangle_A$. Тогда $a=b\wedge pr_1(a,a^1)\in\rho_1\wedge pr_2(a^1, a^2)\in\rho_2\wedge\ldots\wedge pr_n(a^{n-1}, a^n)\in\rho_n\wedge$
$pr_1(a^n, a^{n+1})\in\rho_1\wedge pr_2(a^{n+1}, a^{n+2})\in\rho_2\wedge\ldots\wedge pr_n(a^{2n+2})\in\rho_n\wedge a^{2n+2}=b$. Отсюда $(a_1, a^1_1)\in\rho_1\wedge(a^1_2, a^2_2)\in\rho_2\wedge\ldots\wedge(a^{n-1}_n, a^n)\in\rho_n\wedge(a^n_1, a^{n+1}_1)\in\rho\wedge(a^{n+1}_2, a^{n+2}_2)\in\rho_2\wedge\ldots\wedge(a^{2n+1}_n, a^{2n+2}_n)\in\rho_n$. Следовательно $(a,b)\in\underset{i\in I}{\overset{2}{\square}}\rho_i\cap\triangle_{A_i}\wedge(a, b)\notin\underset{i\in I}{\overset{2n}{\square}}\rho_i\cap\triangle_{A_i}$.

Следствие. Если отношение $\rho\subset A\times A$, где $A=\prod_{i\in I}A_i$ разлагается в композицию $\underset{i\in I}{\square}\rho_i$ отношений $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$, то для того, чтобы ρ было ациклическим, достаточно, чтобы $\bigwedge_{i\in I}\rho_i$ были ациклическими.

Доказательство. Если бы ρ_i были ациклическими для любого $i\in I$ и ρ неациклическим, то существовал бы такой $n<\infty$, что $\overset{n}{\rho}\cap\triangle_A\neq\varnothing$.

Из леммы 2.4 следовало бы существование такого $m\leqslant n$, что $\overset{n}{\rho}\cap\triangle_A\subset\underset{i\in I}{\overset{m}{\square}}\rho_i\cap\triangle_{A_i}$. Отсюда $\underset{i\in I}{\overset{m}{\square}}\rho_i\cap\triangle_{A_i}=\varnothing$. Следовательно $\overset{m}{\rho_i}\cap\triangle_{A_i}\neq\varnothing$ и мы получили бы противоречие с ацикличностью ρ_i, $i\in I$.

Лемма 2. 5. Если отношение $\rho\subset A\times A$, где $A=\prod_{i\in I}A_i$ разлагается в лексикографическое произведение $\underset{i\in I}{X}\rho_i$, $\rho_i\subset A_i\times A_i$, $i\in I$, то

$$\bigwedge_n \overset{n}{\rho} \cap \triangle_A \subset \bigcup_{m=1}^{n} \underset{i\in I}{X} \overset{m}{\rho_i} \cap \triangle_{A_i}, \qquad (2.\ 1)$$

$$\bigwedge_m \neg \bigvee_n \underset{i\in I}{X} \overset{m}{\rho_i} \not\subset \triangle_{A_i} \subset \overset{n}{\rho} \cap \triangle_A \qquad (2.\ 2)$$

Доказательство. Если $(a, b) \in \overset{n}{\rho} \cap \triangle_A$, то $(a, b) \in \overset{n}{\rho} \wedge (a,b) \in \triangle_A$. Отсюда $\bigvee_{\{a^i\}_{i=1,\ldots,n}} (a, a^1) \in \rho \wedge (a^1, a^2) \in \rho \wedge \ldots \wedge (a^n, b) \in \rho$. Следовательно $\bigvee_{i_1,\ldots,i_{n+1}} \bigwedge_{j<i_1} ((a_j=a^1_j) \wedge (a_{i_1}, a^1_{i_1}) \in \rho_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \bigwedge_{j<i_{n+1}} ((a^n_{i_{n+1}}=b_{i_{n+1}}) \wedge (a^n_{i_{n+s}}, b_{i_{n+1}}) \in \rho_{i_{n+1}}$.

Положим $i_k=min\{i_1,\ldots, i_{n+1}\}$. Тогда $(a_{i_u}, a^{l_1}_{i_u}) \in \rho_{iu} \wedge \ldots \wedge (a^{l_m}_{i_u}, b_{i_u}) \in \rho_{i_k} \wedge$ число рёбер не меньше двух $\wedge (m<n) \wedge \wedge (a^s_j=a_j)$. Если бы число ребер было равно единице, то $(a_{i_u}, a^{l_1}_{i_u}) \in \rho_{i_u} \wedge a^{l_1}_{i_u}=b_{i_u}$. Следовательно $(a_{i_k}=b_{i_k}) \wedge (a_{i_k}, b_{i_k}) \in \rho_{i_k}$ и мы получили бы противоречие с ацикличностью ρ_{ik}.

Определим последовательность $\tilde{a}^j$, $j \in \{l^1,\ldots, l^m\}$ следующим образом: $\tilde{a}^j_p=a_p$, $p<i_k$, $j\in\{l^1,\ldots,l^m\}$, $\tilde{a}^j_{i_k}=a^j_{i_k}$, $j\in\{l^1,\ldots,l^m\}$.
Тогда $(a, \tilde{a}^{l_1}) \in \rho \wedge \ldots \wedge (\tilde{a}^{l_m}, b) \in \rho \wedge (a, b) \in \triangle_A$.

Следовательно $(a, b) \in \overset{m+1}{\rho} \cap \triangle_A$. Отсюда $\overset{n}{\rho} \cap \triangle_A \subset \bigcup_{m=1}^{n} \overset{m}{\rho} \cap \triangle_A$. Так как $(a=b) \bigwedge_{j<ik} ((a_j=\tilde{a}^{l_1}_j) \wedge (a_{i_k}, \tilde{a}^{l_1}_{i_k}) \in \rho_{i_k} \wedge \ldots \wedge (\bigwedge_{j<i_k} (\tilde{a}^{l_m}_{i_k}, b_{i_k}) \in \rho_{i_k} \wedge (\tilde{a}^{l_m}_j = b_j))$, то $(a, b) \in \underset{i\in I}{\square} \overset{m+1}{\rho_i} \cap \triangle_{A_i}$. Отсюда $\overset{n}{\rho} \cap \triangle_A \subset \bigcup_{m=1}^{n} \underset{i\in I}{\square} \overset{m+1}{\rho_i} \cap \triangle_{A_i}$.

Докажем включение (2. 2). Из включения $(a, b) \in \underset{i\in I}{\square} \overset{n}{\rho_i} \cap \triangle_{A_i} \rightarrow$

$\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j<i} (a_j=b_j) \wedge ((a_i, b_i) \in \overset{n}{\rho_i} \cap \triangle_{A_i})$

Пусть (a, b) такие, что $\bigvee_{i\in I} (a_i \neq b_i$. Тогда $(a, b) \notin \overset{n}{\rho} \cap \triangle_A$.

Следствие. Если отношение $\rho \subset A\times A$, $A=\underset{i\in I}{\Pi} A_i$ разлагается в лексикографическое произведение $\underset{i\in I}{X} \rho_i$, то для того, чтобы ρ было ациклическим достаточно, чтобы $\bigwedge_{i\in I} \rho_i$ были ациклическими.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. 4.

Лемма 2. 6. Если отношение $\rho \subset A\times A$ ациклическое и разлагается в композицию $\underset{i\in I}{\square} \rho_i$, $\rho_i \subset A_i \times A_i$, $i\in I$, то $\bigwedge_{i\in I} \rho_i$ ациклические.

Доказательство. Если бы $\bigvee_{i\in I} \rho_i$ был неациклическим, то существовал бы цикл $\{a^j_i\}_{j=0\ldots n}$ из ρ_i. Тогда, определив последовательность $\{\tilde{a}^l\}_{l=0,\ldots,n}$ следующим образом:

$$\tilde{a}^l_q = \begin{cases} a^j_q, & l=j \\ a_q, & l\neq j \end{cases}$$

получим $\bigwedge_{q\neq i}(\tilde a^0_q=a^1_q)\wedge(\tilde a^0_i,\tilde a^1_i)\in\rho_i\wedge\ldots\bigwedge_{q\neq i}(\tilde a^{n-1}_q=\tilde a^n_q)\wedge(\tilde a^{n-1}_i,\tilde a^n_i)$ $\in\rho_i\wedge(\tilde a^n_i,\tilde a^0_i)\in\rho_i\wedge\bigwedge_{q\neq i}(\tilde a^n_q=\tilde a^0_q))$. Отсюда $\{\tilde a^l\}_{l=0,\ldots,n}$ был бы циклом в ρ и мы получили бы противоречие с ацикличностью ρ.

Лемма 2. 7. Если отношение $\rho\subset A\times A$ разлагается в лексикографическое произведение $\underset{i\in I}{X}\rho_i$ $\rho_i\subset A_i\times A_i$, то из ацикличности ρ следует ацикличность $\bigwedge_{i\in I}\rho_i$.

Доказательство. Если бы существовало такое $i\in I$, что ρ_i был неациклическим, то существовал бы цикл $\{a^l_i\}_{l=0,\ldots,n}$ из ρ. Тогда, определив последовательность $\{\tilde a^l\}_{l=0,\ldots,n}$ следующим образом:

$$\tilde a^l_q=\begin{cases}a^l_q, & l=j\\ a_q, & l<j\end{cases}$$

получим $(\tilde a^0_q=\tilde a^1_q)\wedge(\tilde a^0_i,\tilde a^1_i)\in\rho_i\wedge\ldots\bigwedge_{q<l}(\tilde a^{n-1}_q=\tilde a^n_q)\wedge(\tilde a^{n-1}_i,\tilde a^n_i)\in\rho_i\wedge$ $\bigwedge_{q<l}(\tilde a^n_q=\tilde a^0_q)\wedge(\tilde a^n_i,\tilde a^0_i)\in\rho_i$. Отсюда $\{\tilde a^l\}_{l=0,\ldots,n}$ был бы циклом в ρ и мы получили бы противоречие с ацикличностью ρ.

Лемма 2. 8. Композиция отношений $\rho\subset A\times A$, $\sigma\subset B\times B$ звездно-конечная, тогда и только тогда, когда ρ и σ звездно-конечные.

Доказательство. Если $(x, y)\in\rho\Box\sigma$, то

$$St((x, y))=\{(x, z)\}_{z\in St(y)}\cup\{(w, y)\}_{w\in St(x)}.$$

Следовательно $|St(x,y)|<\infty\leftrightarrow|St(y)|<\infty\wedge|St(x)|<\infty$.

Лемма 2. 9. $\bigcap_{\alpha\in L}\underset{i\in I}{X}\varphi_{i\alpha}=\underset{i\in I}{X}(\bigcap_{\alpha\in L}\varphi_{i\alpha}$, где $\varphi_{i\alpha}\subset\prod_{s\in S}A^\alpha_{si}$ $\tilde A^\alpha_i=\prod_{s\in S}A^\alpha_{si}$, $i\in I$, $\alpha\in L$.

Доказательство. Покажем, что $\bigwedge_{\alpha\in L}(a_{si})_{s\in S}\in\triangle S,\tilde A^\alpha_i\leftrightarrow(a_{si})_{s\in S}\in\triangle_S,\bigcap_{\alpha\in L}$ $\tilde A^\alpha_i\cdot(a_{si})_{s\in S}\in\triangle_S,\bigcap_{\alpha\in L}\tilde A^\alpha_i\leftrightarrow\bigvee_{\substack{a\in\cap\tilde A^\alpha_i\\ \alpha\in L}}\bigwedge_{s\in S}a_{si}=a\leftrightarrow\bigwedge_{\alpha\in L}\bigvee_{a\in\tilde A^\alpha_i}\bigwedge_{s\in S}a_{si}=a\leftrightarrow\bigwedge_{\alpha\in L}(a_{si})_{s\in S}$ $\in\triangle S,\tilde A^\alpha_i$

Отсюда $(a_s)_{s\in S}\in\bigcap_{\alpha\in L}\underset{i\in I}{X}\varphi_{i\alpha}\leftrightarrow\bigwedge_{\alpha\in L}\{$либо $a_{si})_{s\in S}\in\varphi_{1\alpha}$, либо $((a_{s1})_{s\in S}\in\triangle_S,\tilde A^\alpha_1\wedge(a_{s2})_{s\in S}\in\varphi_{2\alpha})$, либо …
либо $((a_{su})_{s\in S}\in\triangle_S,\tilde A^\alpha_u$, $u=1,\ldots,n\wedge(a_{s,n+1})_{s\in S}\in\varphi_{(n+1).\alpha}$ либо …$\}\leftrightarrow$ либо $(a_{sl})_{s\in S}\in\bigcap_{\alpha\in L}\varphi_{1\alpha}$, либо $(a_{sl})_{s\in S}\in\triangle_S,\bigcap_{\alpha\in L}\tilde A^\alpha_1\wedge(a_{s2})_{s\in S}\in\bigcap_{\alpha\in L}\varphi_{2\alpha}$ либо либо $(a_{su})_{s\in S}\in\triangle_S,\bigcap_{\alpha\in L}\tilde A^\alpha_u$, $u=1,\ldots,n\wedge(a_{s,n+1})_{s\in S}\in\bigcap_{\alpha\in L}\varphi_{n+1,\alpha}$ либо$\leftrightarrow$ $(a_s)_{s\in S}\in\underset{i\in I}{X}(\bigcap_{\alpha\in L}\varphi_{i\alpha})$.

Лемма 2. 10. $pr_T\underset{i\in I}{X}\varphi_i=\underset{i\in I}{X}pr_T\varphi_i$.

Доказательство. $(a_s)_{s\in T}\in pr_T(\underset{i\in I}{X}\varphi_i)\leftrightarrow\bigvee_{(a_s)s\in S\setminus T}$ либо $(a_{s1})_{s\in S}\in\varphi_1$, либо $(a_{sl})_{s\in S}\in\varphi_1$, либо $((a_{s1})_{s\in S}\in\triangle_S\tilde A_1\wedge(a_{s2})_{s\in S}\in\varphi$ либо … либо $((a_{su})_{s\in S}\in$ $\triangle_{S,A^s_u}$, $u=1,\ldots,n\wedge(a_{s,n+1})_{s\in S}\in\varphi_{n+1})$ либо …$\leftrightarrow$

либо $\bigvee_{(a_s)_{s\in S/T}} (a_{s1})_{s\in S}\in\varphi_1$, либо $\bigvee_{(a_s)_{s\in S\setminus T}} (a_{s1})_{s\ni S}\in\triangle_{S,\tilde{A}_1} \wedge (a_{s2})_{s\in S}\in\varphi_2$ либо ...

либо $\bigvee_{(a_s)_{s\in S/T}} ((a_{su})_{s\in S}\in\triangle_{S,\tilde{A}_u}, u=1,\dots,n \wedge (a_{s,n+1})_{s\in S}\in\varphi_{n+1}$ либо ... $\leftrightarrow$

$(a_s)_{s\in T}\in \bigtimes_{i\in I} pr_T\,\varphi$.

Лемма 2. 11. $(\bigtimes_{i\in I}\varphi_i)(\bigtimes_{i\in I}\psi_i)=\bigtimes_{i\in I}\varphi_i(\psi_i)$, где $\varnothing\neq\varphi_i\subset\bigtimes_{s\in S} A_{si}$, $\varnothing\neq\psi_i \subset\bigtimes_{s\in T} A_{si}$, $\varnothing\neq T\underset{\neq}{\subset} S$.

Доказательство. $(a_s)_{s\in S\setminus T}\in(\bigtimes_{i\in I}\varphi_i)(\bigtimes_{i\in I}\psi_i)\leftrightarrow\bigvee_{(a_{si})_{s\in T}\in\psi_1}(a_{si})_{s\in S}\in\varphi_1$

либо $\bigvee_{(a_{si})_{s\in T}\in\triangle_{T,\tilde{A}_1^T}}(a_{si})_{s\in S}\in\triangle_{S,\tilde{A}_1}\wedge\bigvee_{(a_{s2})_{s\in T}\in\psi_2}(a_{s2})_{s\in S}\in\varphi_2$ либо ... либо

$\bigvee_{(a_{su})_{s\in T}\in\triangle_{T,\tilde{A}_u^T}}\bigwedge_{u=1,\dots,n}(a_{su})_{s\in S}\in\triangle_{S,\tilde{A}_1}\wedge\bigvee_{(a_{s,n+1})_{s\in S}\in\psi_{n+1}}(a_{s,n+1})_{s\in S}\in\varphi_{n+1}$ либо ... $\leftrightarrow$

$(a_s)_{s\in S\setminus T}\in\bigtimes_{i\in I}\varphi_i(\psi_i)$.

Лемма 2. 12. $\overset{-1}{\overbrace{\bigtimes_{i\in I}\rho_i}}=\bigtimes_{i\in I}\overset{-1}{\rho_i}$, где $\rho_i\subset A_i\times B_i$, $i\in I$.

Доказательство. $(b_i, a_i)_{i\in I}\in\overset{-1}{\overbrace{\bigtimes_{i\in I}\rho_i}}\leftrightarrow(a_1, b_1)\in\bigtimes_{i\in I}\rho_i\leftrightarrow$ либо $(a_1, b_1)\in\rho_1$, либо $(a_1=b_1)\wedge(a_2, b_2)\in\rho_2$, либо ... либо $\bigwedge_{u=1,\dots,n} a_u=b_u \wedge (a_{n+1}, b_{n+1})\in\rho_{n+1}$ ... $\leftrightarrow$ либо $(b_1, a_1)\in\rho_1^{-1}$, либо $b_1=a_1\wedge(b_2, a_2)\in\rho_2^{-1}$ либо ... либо $\bigwedge_{u=1,2,\dots,n}(a_u=b_u)\wedge(b_{n+1}, a_{n+1})\in\overset{-1}{\rho_{n+1}}$ ... $\leftrightarrow(b_i, a_i)\in\bigtimes_{i\in I}\overset{-1}{\rho_i}$.

Лемма 2. 13. $(\bigtimes_{i\in I}\rho_{i1})\circ(\bigtimes_{i\in I}\rho_{i2})\circ\dots\circ(\bigtimes_{i\in I}\rho_{in})\supset\bigtimes_{i\in I}\rho_{i1}\circ\rho_{i2}\circ\dots\circ\rho_{in}$, где $\rho_{iu}\subset A_{iu}\times A_{iu+1}$, $u=1,\dots,n-1$.

Доказательство. $(a_{i1}, a_{in})_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I}\rho_{i1}\circ\dots\circ\rho_{in}\to\bigvee_{j\in I}\bigwedge_{i<j}((a_{i1}=a_{in})\wedge$ $a_{j1}, a_{jn})\in(\rho_{j1}\circ\dots\circ\rho_{jn})\to(\bigvee_{c_{j1},\dots,c_{jn-}}(a_{j1}, c_{j1})\in\rho_{j1}\wedge(c_{j1}, c_{j2})\in\rho_{j2}\wedge\dots\wedge$ $(c_{j,n-1}, a_{jn})\in\rho_{jn})$

Определим $(\tilde{c}_{iu})_{i\in I}$, $u=1,\dots,n-1$ следующим образом:

$$\tilde{c}_{iu}=\begin{cases} a_{i1}, & i<j,\ u=1,\dots,n-1\\ c_{ju}, & i=j\end{cases}$$

Тогда $\bigwedge_{i<j}(((a_{i1}=c_{i1})\wedge(a_{j1}, c_{j1})\in\rho_{j1})\wedge((c_{i1}=c_{i2})\wedge(c_{j1}, c_{j2})\in\rho_{j2})$ $\wedge\dots\wedge((c_{i,n-1}=a_{in})\wedge(c_{j,n-1}, a_{jn})\in\rho_{jn}))\to(((a_{i1}, c_{i1})_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I}\rho_i)\wedge(((c_{i1}, c_{i2})_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I}\rho_{i2})\wedge\dots\wedge((c_{i,n-1}, a_{in})_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I}\rho_{in})\to(a_{i1}, a_{in})_{i\in I}\in(\bigtimes_{i\in I}\rho_{i1})\circ$ $\dots\circ(\bigtimes_{i\in I}\rho_{in})$.

Следствие $\bigwedge_n \overset{n}{\underset{i\in I}{\overset{\smile}{X}}} \rho_i \supset \overset{n}{\underset{i\in I}{X}} \rho_i$, где $\rho_i \subset A_i \times A_i$, $i \in I$

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из леммы 2. 13, если положить $\bigwedge_{u=1,\ldots,n} (\rho_{iu}=\rho_i) \wedge (A_{iu}=A_i)$.

Лемма 2. 14 $(\underset{i\in I}{X} \rho_{i1}) \circ \ldots \circ (\underset{i\in I}{X} \rho_{in}) \subset \bigcup_{\{l_1,\ldots l_q\} \in \{1,\ldots,n\}} \underset{i\in I}{X} \rho_{il_1} \circ \ldots \circ \rho_{il_q}$

Доказательство. $(a_{i1}, a_{in})_{i\in I} \in (\underset{i\in I}{X} \rho_{i1}) \circ \ldots \circ (\underset{i\in I}{X} \rho_{in}) \rightarrow \bigvee_{((c_{iu})_{i\in I})_{u=1,\ldots,n-1}} ((a_{i1}, c_{i2})_{i\in I} \in \underset{i\in I}{X} \rho_i) \wedge ((c_{i2}, c_{i3}) \in \underset{i\in I}{X} \rho_{i2}) \wedge \ldots \wedge ((c_{i.n-1}, a_{in}) \in \underset{i\in I}{X} \rho_{in}) \rightarrow \bigvee_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \bigwedge_{j<i_1} (a_{j1}=c_{j2}) \wedge (a_{i_1,1}\, c_{i_1,2}) \in \rho_{i_1,1} \wedge \ldots \wedge \bigwedge_{j<i_{n-1}} (a_{jn}=c_{j_{n-1}}) \wedge (c_{i_{n-1},n-1}, a_{i_{n-1},n}) \in \rho_{i_{n-1},n}$.

Положим $i_u = min\{i_1, \ldots, i_n\}$. Тогда $\bigwedge_{j<i_u} (a_{j_1}=a_{j_n}) \wedge \bigvee_{\{ci_u, l_r\}_{r=1,-q}} (a_{i_u,1}, c_{i_u, l_1}) \in \rho i_{u,1} \wedge \ldots \wedge (c_{iu}, l_q, a_{i_u,n}) \in \rho_{i_u}, l_q \rightarrow \bigvee_{iu} \bigwedge_{j<i_u} (a_{j_1}=a_{j_u}) \wedge (a_{iu,1}\, a_{i_u',n}) \in \rho_{i_u,1} \circ \ldots \circ \rho_{i_u}, l_q \rightarrow (a_{i_1}, a_{in})_{i\in I} \in \underset{i\in I}{X} \rho_{il_1} \circ \ldots \circ \rho_{il_q}$.

Таким образом получаем, что для любого $(a_{i_1}, a_{in}) \in (\underset{i\in I}{X} \rho_{i1}) \circ \ldots \circ (\underset{i\in I}{X} \rho_{in})$ существует такой набор $\{l_1, \ldots, l_q\} \in \{1,2,\ldots, n\}$, что $(a_{i_1}, a_{in}) \in \underset{}{X} \rho_{il_1} \circ \ldots \circ \rho_{il_q}$.

Следствие. $\overset{n}{\underset{i\in I}{\overset{\smile}{X}}} \rho_i \subset \bigcup_{m=1}^{n} \underset{i\in I}{X} \rho_i^m$

Доказательство следует непосредственно из леммы 2.14, если положить $\bigwedge_{u=1,\ldots,n} (\rho_{iu}=\rho_i) \wedge (A_{iu}=A_i)$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий следствие.

Пример I. Пусть $A_1=\{a_1, c_1^1, c_1^2, c_1^3, b_1\}$, $\rho_1=\varnothing$, $\Delta_{A_1} \supset \{(a_1, c_1^1), (c_1^1, c_1^2), (c_1^2, c_1^3), (c_1^3, b_1)\}$,
$A_2=\{a_2, c_2^1, c^2, c_2^3\, b_2\}$, $\rho_2=\{(a_2\, c_2^1)\}$,
$\Delta_{A_2} \supset \{(c_2^1, c_2^2), (c_2^2, c_2^3), (c_2^3, b_2)\}$, $A_3=\{a_3, c_3^1, c_3^2, c_3^3, b_3\}$,
$\rho_3=\{(c_3^1, a_3), (c_3^1, c_3^2)\}$, $\Delta_{A_3} \supset \{(c_3^2, c_3^3), (c_3^3, b_3)\}$,
$A_4=\{a_4, c_4^1, c_4^2, c_4^3, b_4\}$, $\rho_4=\{(c_4^1, a_4), (c_4^2, c_4^1), (c_4^2, c_4^3)\}$,
$\Delta_{A_4}=\{(c_4^3, b_4)\}$, $A_5=\{a_5, c_5^1, c_5^2, c_5^3, b_5\}$, $\rho_5=\{(c_5^1, a_5), (c_5^2, c^3)\}$,
$\Delta_{A_5} \supset \{(c_5^2, c_5^1), (c_5^3, b_5)\}$, $A_6=\{a_6, c_6^1, c_6^2, c_6^3, b_6\}$,
$\rho_6=\{(c_6^1, a_6), (c_6^1, c_6^2), (c_6^2, c_6^3), (c_6^3, b_6)\}$, $\Delta_{A_6}=\varnothing$

Таким образом, получим

$a_1=c_1^1$, $(a_2, c_2^1) \in \rho_3$, $(c_4^1, a_4) \in \rho_4$, $(c_5^1, a_5) \in \rho_5$, $(c_6^1, a_6)\, \rho_6$,
$c_1^1=c_1^2$, $c_2^1=c_2^2$, $(c_3^1, c_3^2) \in \rho_3$, $(c_4^2, c_4^1) \in \rho_4$, $c_5^2=c_5^1$, $(c_6^1, c_6^2) \in \rho_6$,
$c_1^2=c_1^3$, $c_2^2=c_2^3$, $c_3^2=c_3^3$, $(c_4^2=c_4^3) \in \rho_4$, $(c_5^2, c_5^3) \in \rho_5$, $(c_6^2, c_6^3) \in \rho_6$,
$c_1^3=b_1$, $c_2^3=b_2$, $c_3^3=b_3$, $c_4^3=b_4$, $c_5^3=b_5$, $(c_6^3, b_6) \in \rho_6$.

Отсюда $\{(a_1=c_1^1) \wedge (a_2, c_2^1) \in \rho_2\} \wedge \{(c_1^1=c_1^2) \wedge (c_2^1=c_2^2) \wedge (c_3^1, c^2) \in \rho_3\} \wedge \{c_1^2=c_1^3) \wedge (c_2^2=c_2^3) \wedge (c_3^2=c_3^3) \wedge (c_4^2, c_4^3) \in \rho_4\} \wedge \{(c_1^3=b_1)$

$\wedge (c^3_2=b_2) \wedge (c^3_3=b_3) \wedge (c^3_4=b_4) \wedge (c^3_5=b_5) \wedge (c^3_6, b_6) \in \rho_6\} \to \{(a, c^1) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i\} \wedge \{(c^1, c^2) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i\} \wedge \{(c^2_1, c^3) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i\} \wedge \{(c^3, b) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i\} \to$

$(a, b) \in \underset{i\in I}{\overset{4}{\smile}{\overline{X}}} \rho_i \wedge (a, b) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i.$

Лемма 2. 15 $bin_T((\underset{s\in S}{X} \rho_s)(\varphi)=(\underset{s\in S/T}{X} \rho_s) \circ bin_T\ \varphi \circ (\underset{s\in I}{\overset{-1}{\smile}{\overline{X}}} \rho_s)$, где $\rho^s \subset A_s \times B_s$, $s \in S$, $\varphi \subset \underset{s\in S}{X} A_s$, $\varnothing \neq T \underset{\neq}{\subset} S$.

Доказательство. $((b_s)_{s\in T}, (b_s)_{s\in S\setminus T}) \in bin_T((\underset{s\in I}{X} \rho_s)(\varphi)) \leftrightarrow \bigvee\limits_{(a_s)_{s\in S}\in\varphi}$

$\bigvee\limits_{(b_s)_{s\in S}\in pr_s(\underset{i\in I}{X} \rho_s)} (a_s, b_s(\in \underset{s\in S}{X} \rho_s \leftrightarrow \bigvee\limits_{(a_s)_{s\in S}\in\varphi} \bigvee\limits_{(b_s)_{s\in S}\in pr_s \underset{s\in I}{X} \rho_s} ((b_s)_{s\in T}, (a_s)_{s\in T}) \in \underset{s\in I}{\overset{-1}{\smile}{\overline{X}}} \rho_s \wedge$

$((a_s)_{s\in T}, (a_s)_{s\in S/T}) \in bin_T\ \varphi \wedge ((a_s)_{s\in S\setminus T})(b_s)_{s\in S\setminus T} \in \underset{s\in S\setminus T}{X} \rho_s \leftrightarrow ((b_s)_{s\in T},$

$(b_s)_{s\in S\setminus T}) \in (\underset{s\in S\setminus T}{X} \rho_s) \circ bin_T\ \varphi \circ \overset{-4}{\smile}{\overline{(\underset{s\in T}{X} \rho_s)}}.$

Лемма 2. 16 $bin_I \triangle_{(I\cup\omega)b} \circ (\underset{i\in I}{X} \rho_i) \circ bin_\omega\ \triangle_{(I\cup\omega)A'} = \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i \cap A' \times b$, где $\rho_i \subset A_i \times b$, $i \in I$, $A' \subset A, b \subset B$, $\omega \notin I$, $A \cap B = \varnothing$.

Доказательство. $(a, d) \in \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i \cap A' \times b \leftrightarrow \bigwedge\limits_{i\in I} (a, d) \in \rho_i \wedge (a, d) \in A' \times b \leftrightarrow (\overset{\omega}{\overline{a}}; \overset{I}{\overbrace{a, \ldots, a}}) \in bin_\omega \triangle_{(I\cup\omega)A'} \wedge (\underbrace{a, \ldots, a}_{I}; \underbrace{d, \ldots, d}_{I}) \in \underset{i\in I}{X} \rho_i \wedge (\underbrace{d, \ldots, d}_{I}) \in bin_I\ \triangle_{(I\cup\omega)b} \leftrightarrow (a, d) \in bin_I\ \triangle_{(I\cup\omega)b} \circ \underset{i\in I}{X} \rho_i \circ bin_\omega\ \triangle_{(I\cup\omega)A'}$

Лемма 2. 17. Если отношение $\varphi \subset \prod\limits_{s\in S} A_s$, где $A_s = \prod\limits_{i\in I} A_{si}$ разлагается в лексикографическое произведение $\underset{j\in I}{X} \varphi_j$, $\bigwedge\limits_{j<i} A'_j = \bigcap\limits_{s\in S} A_{sj} \neq \varnothing$, то $\bigwedge\limits_{i\in I} \varphi_i \subset (\underset{s\in S}{\square} \pi_{si})(\underset{j\in I}{X} \varphi_j)$.

Доказательство. Из $\bigwedge\limits_{j<i} A'_j \neq \varnothing$ следует $\bigwedge\limits_{j<i} \triangle_{A'_j} \neq \varnothing$. Пусть $(a_{si})_{s\in S} \in \varphi_i$. Тогда $(\widetilde{a}_j)_{j\in I} \in \prod\limits_{j\in I} A_j$, определенный следующим образом: $\bigwedge\limits_{j<i} (\widetilde{a}_{sj})_{s\in S} \in \triangle_{A'_j} \wedge (\widetilde{a}_{si})_{s\in S} = (a_{si})_{s\in S}$ обладает следующими свойствами: $((\widetilde{a}_j)_{j\in I}, (a_{si})_{s\in S}) \in \underset{s\in S}{\square} \pi_{si}$, $(\widetilde{a}_j)_{j\in I} \in \underset{j\in I}{X} \varphi_j$.

Отсюда $(a_{si})_{s\in S} \in (\underset{s\in S}{\square} \pi_{si})(\underset{j\in I}{X} \varphi_j)$.

Покажем, что включение $\varphi_i \supset (\underset{s\in S}{\square} \pi_{si})\ (\underset{j\in I}{X} \varphi_j)$, вообще говоря, не верно. Пусть $(a_{si})_{s\in S} \in \underset{s\in S}{X} A_{si}$, $(a_{si})_{s\in S} \notin \varphi_i \cup \triangle_{A'_i}$. Положим $A'_j \neq \varnothing$, $j < i-1$, $\varphi_{i-1} \neq \varnothing$ $(a_{si})_{s\in S} \in \triangle_{A'_j}$, $j < i-2$, $(a_{s,\,i-1})_{s\in S} \in \varphi_{i-1}$.

Тогда $(\widetilde{a}_j)_{j\in I}$, определенный следующим образом:

$$\widetilde{a}_j = \begin{cases} (a_{sj})_{s\in S}, & j \leqslant i \\ \text{произвольный элемент из } A_j, & j > i \end{cases}$$

будет принадлежать $\underset{i\in I}{X}\varphi_j$. Огсюда $\bigwedge_{s\in S}((\tilde{a}_{si})_{j\in I},\ a_{sj})\in\pi_{si}$. Следовательно $(a_{si})_{s\in S}\in(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\underset{i\in I}{X}\varphi_j)$ и $(a_{si})_{s\in S}\notin\varphi_i\cup\triangle_{A'_i}$.

Лемма 2. 18. Если отношение $\varphi\subset\underset{s\in S}{\Pi}A_s$, где $A_s=\underset{i\in I}{\Pi}A_i$ разлагается в композицию $\underset{i\in I}{\square}\varphi_j$, $\bigwedge_{i\in I}A'_i\neq\varnothing$, то $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\subset(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\underset{j\in I}{\square}\varphi_j)$.

Доказательство. Из $\bigwedge_{i\in I}A'_i\neq\varnothing$ следует $\bigwedge_{i\in I}\triangle'_{A_j}\neq\varnothing$. Пусть $(a_{si})_{s\in S}\in\varphi_i$. Тогда $(\tilde{a}_j)_{j\in I}\in\underset{j\in I}{\Pi}A_j$, определенный следующим образом: $\bigwedge_{j\neq i}(\tilde{a}_{si})_{s\in S}\in\triangle_{A'_j}\wedge(\tilde{a}_{si})_{s\in S}=(a_{si})_{s\in S}$ обладает следующими свойствами: $((\tilde{a}_j)_{j\in I},(a_{si})_{s\in S})\in\underset{s\in S}{\square}\pi_{si}$, $(\tilde{a}_j)_{j\in I}\in\underset{j\in I}{\square}\varphi$

Отсюда $(a_{si})_{s\in S}\in(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\underset{j\in I}{X}\varphi_j)$.

Покажем, что включение $\varphi_j\supset(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\underset{j\in I}{\square}\varphi_j)$ вообще говоря не верно.

Пусть $(a_{sj})_{s\in S}\in\triangle\varphi_j$, $j\neq u\neq i$, $(a_{su})_{s\in S}\in\varphi_u$.

Тогда $(a_j)_{j\in I}\in\underset{j\in I}{\square}\varphi_j$, $((a_j)_{j\in I},(a_{si})_{s\in S}\in\underset{s\in S}{\square}\pi_{si}$, $(a_{si})_{s\in S}\in(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\underset{j\in I}{\square}\varphi_j)$, $(a_{si})_{s\in S}\notin\varphi_i$, так как $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\cap\triangle_{A'_i}=\varnothing$.

Лемма 2. 19 $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\cap\triangle_{A_i}=\varnothing\rightarrow\underset{j\in I}{\square}\varphi_i$

Доказательство. Доказательство следует из определения, так как $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\cap\triangle_{A_i}=\varnothing$.

Обратное включение не верно. Доказательство очевидное.

Лемма 2. 20. Если отношение $\varphi\subset\underset{s\in S}{\Pi}A_s$, где $A_s=\underset{i\in I}{\Pi}A_{si}$ разлагается в слабое объединение $\otimes\varphi_j$, $\bigwedge_{j\in I}A'_j\neq\varnothing$, то $\bigwedge_{j\in I}\varphi_i\subset(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\otimes\varphi_j)$

Доказательство. Если $(a_j)_{j\in I}$ такой, что $(a_{si})_{s\in S}\in\varphi_i$, $(a_{sj})\notin\varphi_j$, $j\neq i$, то $(a_j)_{j\in I}\in\otimes\varphi_j$, $((a_j)_{j\in I},(a_{si})_{s\in S})\ \underset{s\in S}{\square}\pi_{si}$. Следовательно $(a_{si})_{s\in S}\in(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\otimes\varphi_j)$.

Покажем, что вообще говоря, $\varphi_i\not\supset(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\otimes\varphi_j)$.

Пусть $(a_j)_{j\in I}$—такой, что $(a_{sj})_{s\in S}\notin\varphi_j$, $j\neq u\neq i$, $(a_{su})_{s\in S}\in\varphi_u$.
Тогда $(a_j)_{j\in I}\in\otimes\varphi_j$, $((a_j)_{j\in I},(a_{si})_{s\in S})\in\underset{s\in S}{\square}\pi_{si}$,

$(a_{si})_{s\in S}\in(\underset{s\in S}{\square}\pi_{sj})(\otimes\varphi_j)$, $(a_{si})_{s\in S}\notin\varphi_i$.

Лемма 2. 21. Пусть отношение $\varphi\subset\underset{s\in S}{\Pi}A_s$ разлагается в такое $*$—произведение отношений φ_j, $j\in I$, где $*\in\{X,\square,\otimes\}$, что

$$\varphi_i\subseteq(\underset{s\in S}{\square}\pi_{si})(\varphi),\quad i\in I \tag{2.3}$$

Тогда для того, чтобы φ_i были ацикличными для $i\in I$ достаточно, а если в (2.3) имеет место равенство, то и необходимо, чтобы

$$\bigwedge_n\overbrace{(\underset{s\in S}{\square}\pi_{ji})(\varphi)}^{n}\cap\triangle_{A_i}=\varnothing,\quad i=I.$$

Доказательство. Доказательство следует из утверждений п. 36.

Следствие. Для того, чтобы отношение $\varphi\subset A_1\times A_1$, где $A_1=A_{11}\times A_{12}$, разложимое в такое $*$ -произведение $\underset{j=1,2}{*}\varphi_j$, где $*\in\{X,\otimes\}$, $\varphi_j\subset A_{1j}\times A_{2j}$, $j=1,2$, что $\varphi_j\subseteq(\pi_j\square\pi_j)(\varphi)$ (2. 4)
имело ацикличные компоненты разложения, достаточно, чтобы

$$\bigwedge_n \pi_j\circ\overbrace{\varphi\circ\varepsilon_{\pi_j}\circ}^{n-1}\pi_j\circ\varphi\circ\overset{-1}{\pi_j}\cap\triangle_{A_j}=\varnothing$$

Доказательство следует из леммы 2. 21 и условия (2. 4).

Теорема 2. 2. Для того, чтобы отношение $\varphi\subset A_1\times A_1$, где $A_1=A_{11}\times A_{12}$, разложимое в лексикографическое произведение /композицию, слабое объединение/ отношений $\varphi_j\subset A_{1j}\times A_{1j}$, $j=1,2$ имело ацикличные компоненты разложения достаточно, чтобы

$$\bigwedge_n\pi_j\circ\overbrace{\varphi\circ\varepsilon_{\pi_j}\circ}^{n-1}\pi_j\circ\varphi\circ\overset{-1}{\pi_j}\cap\triangle_{A_j}=\varnothing \qquad j=1,2.$$

Доказательство. Доказательство следует из следствия леммы 2. 21 и леммы 2. 17 /леммы 2. 18, леммы 2. 19/.

Лемма 2. 22. $(\pi_i\square\pi_i)((\theta\square\theta)(\rho))=\pi_i\circ\theta\circ\rho\circ\theta^{-1}\circ\pi_i^{-1}$.

Доказательство. $(b_i^1, b_i^2)\in(\pi_i\square\pi_i)((\theta\square\theta)(\rho))\leftrightarrow(b_i^1, (b_j^1)_{j\in I})\in\pi_i \wedge ((b_j^1)_{j\in I}, a^1)\in\theta^{-1}\wedge(a^1, a^2)\in\rho\wedge(a^2, (b_j^2)_{j\in I})\in\theta\wedge((b_j^2)_{j\in I}, b_j^2)\in\pi_i \leftrightarrow b_i^1, b_i^2)\in\pi_i\circ\theta\circ\rho\circ\theta^{-1}\circ\pi_i^{-1}$.

3. НМ-решения разложимых отношений

В этом параграфе будем рассматривать отношения, заданные на множестве, элементы которого упорядочены порядковыми числами начального отрезка порядковых чисел не более, чем счетного типа.

Теорема 3.1. Для того, чтобы разложимое в прямое произведение нерефлексивное отношение $\rho\subset A\times A$ имело решение, достаточно, чтобы

$$\bigwedge_{i\in I}\pi_i\circ\overbrace{\rho\circ\varepsilon_{\pi_j}}^{n-1}\pi_i\circ\rho\circ\pi_i^{-1}\cap\triangle_{A_i}=\varnothing \tag{3.1}$$

$$\bigwedge_{i\in I}|\pi_i\circ\rho\circ\pi_i^{-1}(A_i)|<\infty \tag{3.2}$$

Доказательство. Из [4] следует $\bigwedge_{i\in I}\rho_i=(\underset{i=1}{\overset{2}{\square}}\pi_i)(\rho)=\pi_i\circ\rho\circ\pi_i^{-1}$.

Из (3. 1) следует ацикличность $\bigwedge_{i\in I}\rho_i$, а из (3. 2) звездная конечность $\bigwedge_{i\in I}\rho_i$. Следовательно, ρ, по теореме 2. 1 звездно-конечное и ацикличное отношение. Таким образом, по теореме Ричардсона [5] ρ имеет решение.

Теорема 3. 2. Для того, чтобы разложимое в прямое произведение нерефлексивное отношение $\rho\subset A\times A$ имело решение, достаточно, чтобы

$$\bigwedge_{i\in I} \pi_i \circ \overbrace{\rho \circ \varepsilon_{\pi_i} \circ \pi_i \circ}^{n-1} \rho \circ \pi_i^{-1} \cap \Delta_{A_i} \neq \varnothing \leftrightarrow n=2k \tag{3.3}$$

Доказательство. Из (3.3) и леммы 2.2 следует четность отношения ρ. Следовательно по теореме Ричардсона [5] ρ имеет решение.

Теорема 3.3. Если отношение $\varphi \subset A_1 \times A_1$, где $A_1 = A_{11} \times A_{12}$ разлагается в лексикографическое произведение отношений $\varphi_j \subset A_{1j} \times A_{1j}$, $j=1,2$, то для того, чтобы φ имело НМ-решение, достаточно, чтобы

$$\bigwedge_{n} \pi_j \circ \overbrace{\varphi \circ \varepsilon_{\pi_j} \circ \pi_j \circ}^{n-1} \varphi \circ \pi_j^{-1} \cap \Delta_{A_j} = \varnothing, \; j=1,2 \tag{3,4}$$

$$/(\pi_j \circ \varphi \circ \pi_j^{-1})\,(A_{1j})/ < \infty, \; j=1,2 \tag{3.5}$$

Доказательство. Из условий (3.4) и (3.5) следует ацикличность и звездная конечность отношений φ_j, $j=1,2$. По теореме [5] для любого φ_j $j=1,2$ существует решение. Следовательно отношение φ имеет решение.

Из теоремы 3.3 следует существование решений для некоторых звездно-бесконечных отношений, разложимых в лексикографическое произведение звездно-конечных отношений.

Теорема 3.4. Для того, чтобы отношение $\varphi \subset A_1 \times A_1$, где $A_1 = A_{11} \times A_{12}$, разложимое в лексикографическое произведение /композицию/ отношений $\varphi_j \subset A_{1j} \times A_{1j}$, $j=1,2$ имело НМ-решение, достаточно, чтобы

$$\pi_j \circ \overbrace{\varphi \circ \varepsilon_{\pi_i} \circ \pi_j \circ}^{n-1} \varphi \circ \pi_j^{-1} \cap \Delta_{A_j} \neq \varnothing, \quad j=1,2 \leftrightarrow n=2m.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует четность $\bigwedge_{j=1,} \varphi_j$. По теореме [5] $\bigwedge_{j\in I} \varphi_j$ существует НМ-решение. Отсюда и по теореме 3. 1 [6] следует существование решения отношения φ.

Теорема 3.5. Если отношение разлагается в прямое произведение отношений $\sigma_i \subset B_i \times B_i$, $i \in I$, то для того, чтобы ρ имело НМ-решение, достаточно, чтобы либо

$$\bigwedge_{n} \pi_i \circ \overbrace{\theta \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \varepsilon_{\pi_i} \circ}^{n-1} \theta \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \pi_i^{-1} \cap \Delta_{A_i'} = \varnothing, \; i \in I \tag{3.6}$$

$$/(\pi_i \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \pi_i^{-1})\,(A_i)/ < \infty, \; i \in I \quad \text{либо} \quad (3.7)$$

$$\bigwedge_{n} \pi_i \circ \overbrace{\theta \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \varepsilon_{\pi_i} \circ}^{n-1} \theta \circ \rho \circ \theta^{-1} \circ \pi_i^{-1} \cap \Delta_{A_i'} \neq \varnothing \leftrightarrow n=2k$$

Доказательство. Из условия (3.6) следует ацикличность отношений σ_i, $i \in I$. Из (3.7) следует звездная конечность отношений σ_i, $i \in I$. Следовательно, по теореме [5] $\bigwedge_{i\in I} \sigma_i$ имеет НМ-решение. Отсюда и из теоремы Варвака [7] следует существование НМ-решения отношения ρ.

Для случая (3.8) по теореме [5] существует НМ - решение отношений σ_i для любого $i \in I$. Следовательно, по теореме [7] существует решение у отношения ρ.

Теорема 3.6. Если отношение $\rho \subset A \times A$ разлагается в лексикографическое произведение отношений $\sigma_i \subset B_i \times B_i$, то для того, чтобы ρ имело НМ-решение, достаточно, чтобы были выполнены либо условия (3.6), (3.7) либо условие (3.8) теоремы 3.5.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.5 с той лишь разницей, что вместо применения теоремы Варвака [7] необходимо использовать свойство звездной конечности и ацикличности отношений σ_i.

Рассмотрим пример бинарного отношения, имеющего НМ-решение и разложимого в композицию отношений, не имеющих решения.

Пример. Пусть $A=\{(a,d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f)) (c, d), (c, e), (c, f)|$, $\rho=|((a, d), (a, e)), ((a, e), (a, f)), ((b, d), (b, e)), ((b, e), (b, f)), ((c, d), (c, e)), ((c, e), (c, f)), ((a, d), (b, d)), ((a, e), (b, e)), ((b, e), (c, e)), ((a, f), (b, f)), ((b, f), (c, f)), ((c, f), (c, d)), ((c, d), (a, d))$. Положим $A_1=\{a, b, c|$, $A_2=|d, e, f|$, $\rho_1=|(a, b), (b, c), (c, a)\}$, $\rho_2=\{(d, e), (e, f), (f, d)\}$. Тогда $\bigvee_\rho(A)=|(a, d), b, e), (c, f)\}$, $\bigvee_{\rho_i}(A_i)=\varnothing$, $i=1,2$, $\rho=\rho_1 \square \rho_2$, $A=A_1 \times A_2$.

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՎԵՐԱԾԵԼԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բինար հարաբերությունների վերածելիությունը մի քանի հարաբերությունների ուղիղ կամ լեքսիկոգրաֆիկ արտադրյալի և կոմպոզիցիայի միջոցով։

Հետազոտվում են Նեյման-Մորգենշտերնի լուծումները, կամ ավելի կարճ, ՆՄ-լուծումների գոյությունը վերածելի հարաբերությունների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1 *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М., 1978.

2 *Воробьев Н. Н.* Современное состояние теории игр. В сб. Теория игр, Ереван, 1968.

3 *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. «Теория полугрупп и её приложения», Изд. СГУ, 1965, вып. I.

4. *Спивак М. А.* Условия разложимости отношений в прямые произведения. Изв. ВУЗ-ов, Математика № 4 (47) 1965.

5 *M. Richardson.* Solutions of irreflexive relations, Ann. of Math. v. 58, №3, 1953.

6 *Аракелян А. А.* Гомоморфизмы и решения произведений релятивов, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, вып. XI, 1982.

7 *Варвак Л. П.* О существовании ядра на произведении графов. Укр. мат. журн., т. 17, № 3, 1965.

УДК 621.391.26; 612.172.4

А. А. АРАКЕЛЯН, С. С. ПАПЯН, Э. М. АЙКАЗЯН

АЛГОРИТМ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

1. Введение. Известно, что решение задачи сбора, обработки и анализа медико-биологической информации тесно связано с методами цифровой обработки сигналов при помощи алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

В настоящее время существует ряд методов БПФ, обеспечивающих эффективную процедуру спектрального анализа при помощи дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [1].

Вместе с этим разработаны численные методы приближенного вычисления частотных характеристик [2—4], не уступающих ДПФ.

Известно [5], что многочлены и рациональные дроби обладают рядом недостатков как аппарат приближения для функций с не слишком большой гладкостью. Основной недостаток состоит в том, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом. Другим недостатком использования многочленов наилучшего приближения является очень быстрое возрастание коэффициентов с ростом степени, что затрудняет их построение. Это обусловило необходимость разработки нового аппарата приближенного представления функции, свободного от недостатков, свойственных многочленам и рациональным дробям. Одним из эффективных методов приближения функции, значения которой заданы в конечном числе точек, является метод приближения интерполяционными полиномиальными сплайнами [5,6]. Достоинствами этого метода являются высокая точность аппроксимации самой функции и её производных, легкость реализации на ЭВМ алгоритмов вычисления значений сплайнов, хорошие свойства сходимости простейших процессов аппроксимации для широкого класса сеток. Сплайны удобно применять для приближенного описания тех физических процессов, которые не обладают регулярными свойствами гладкости, так как, выбирая подходящим образом узлы, можно добиться хорошей аппроксимации функции с нерегулярными свойствами гладкости [5]. Примером такой функции является функция, описывающая кривую электрокардиосигнала (ЭКС).

С другой стороны отличительной особенностью исследования медико-биологических процессов является то, что в большинстве случаев оно основано на методах экспериментального снятия и сбора в памяти ЭВМ значений переходных функций через определенные промежутки времени. Однако, ввиду того, что память ЭВМ, используемых для этих целей, ограничена, а интересы эксперимента требуют, чтобы амплитудно-частотные характеристики исследуемой переходной функции были вычислены с высокой точностью, значение интерполяционных сплайнов возрастает по сравнению с другими методами приближённого вычисления значений преобразования Фурье.

Следовательно, методы [2—4], будучи нетрудоемкими и обеспечивающими возможность получения простых формул для вычисления амплитудно-частотных характеристик исследуемых переходных процессов медико-биологических систем, уступают методу интерполяционных сплайнов по точности и применимости в задачах приближения переходных функций различных классов.

В данной работе рассмотрена задача приближенного вычисления преобразования Фурье при помощи представления анализируемой переходной функции параболическим сплайном и составлены алгоритм и программы на языках АССЕМБЛЕР и БЕЙСИК для случая равномерного и неравномерного шагов дискретизации. В качестве приложения рассматривается задача цифрового спектрального анализа электрокардиологических сигналов.

2. Преобразование Фурье сигнала, представленного параболическим сплайном. Пусть $x(t) \in C[t_0, T]$, где $C[t_0, T]$ пространство действительных, непрерывных на отрезке $[t_0, T]$ функции: $t_0 \in R$, $T \in R$, $t_0 < T$ и заданы два множества узлов:

$$\Delta'_n: \bar{t}_0 = t_0 < \bar{t}_1 < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < \bar{t}_n < t_{n+1} = T \qquad (1)$$

$$\Delta_n: t_0 < t_1 < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < t_n = T \qquad (n \geqslant 2) \qquad (2)$$

$$\text{где } t_{k-1} < \bar{t}_k < t_k, \quad k = 1, 2, \cdot \cdot \cdot n \qquad (3)$$

Функция $g_k(t)$ называется интерполяционным параболическим сплайном для функции $x(t)$, если

а) $g_k(t) \in P_2$, $t \in (\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1})$ $\quad (k=0, 1, 2, \cdot \cdot \cdot n)$;

б) $g_k(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$;

в) $g_k(t) = x(t_k)$ $\quad (k=0, 1, 2, \cdot \cdot \cdot n)$.

Числа $\bar{t}_k$ называются узлами сплайна, а числа t_k узлами интерполяции. t_k—это точки возможного разрыва второй производной. В качестве краевых условий принимаем

$$g''_k(z-0) = g''_k(z+0), \qquad z = \bar{t}_k, \ k = 1, n \qquad (4)$$

Обозначим через $h_k = t_{k+1} - t_k$ $\quad k = 0, 1, \cdot \cdot \cdot n-1)$

$\bar{h}_k = t_{k+1} - \bar{t}_{k+1}$ $(k=0, 1, \cdot \cdot n-1)$, $m_k = g'_k(t_k)$ $(k=0, 1, \cdot \cdot n-1)$.

Тогда согласно [5] получаем единственное представление

$g_k(t)$ для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $\quad k=0, 1, \cdot \cdot \cdot n-1$

$$g_k(t) = x(t_k) + m_k(t - t_k) + c_k\,(t - \bar{t}_k)^2 + d_k\,(t - \bar{t}_{k+1})^2_+ \qquad (5)$$

$$\text{где} \quad d_k = \frac{x(t_{k+1} - x(t_k)}{\bar{h}_k\,(\bar{h}_k - h_k)} - \frac{m_k + m_{k+1}}{2} \cdot \frac{h_k}{\bar{h}_k\,(\bar{h} - h_k)};$$

$$(t - \bar{t}_{k+1})^2_+ = \{max[0, (t - \bar{t}_{k+1})]\}^2;$$

$$c_k = \frac{m_{k+1} - m_k}{2h_k} - \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h_k\,(\bar{h}_k - h_k)} + \frac{m_k + m_{k+1}}{2\,(\bar{h}_k - h_k)}$$

а m_k $(к=0, 1, \cdot \cdot \cdot \cdot n)$ при краевых условиях (4) находим из системы уравнений

$$\frac{h_k - \bar{h}_k}{\bar{h} \cdot h_k} \cdot m_k + \left[\frac{h_k + \bar{h}_k}{h_k \cdot \bar{h}_k} + \frac{2h_{k+1} - \bar{h}_{k+1}}{k_{k+1}(h_{k+1} \ \bar{h}_{k+1})}\right] \cdot m_{k+1} + \frac{\bar{h}_{k+1}}{h_{k+1}\,(h_{k+1} \ \bar{h}_{k+1})} \cdot$$

$$m_{k+2}=2\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{h_k\cdot \bar{h}_k}+2\,\frac{x(t_{k+2})-x(t_{k+1})}{h_{k+1}(h_{k+1}-\bar{h}_{k+1})}\,;\; k=0,\,1,\cdot\;\cdot\;\cdot n-2 \quad (6)$$

$$m_0+m_1=2[x(t_1)-x(t_0)]h_0^{-1};\quad m_{n-1}+m_n=2[x(t_n)-x(t_{n-1})]h_{n-1}^{-1};$$

решение которой реализует программа на языках АССЕМБЛЕР и БЕЙСИК методом Гаусса.

Для приближенного расчета спектральных характеристик функции $x\ (t)$ рассмотрим её аппроксимацию

$$\bar{x}\ (t)=\sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) \quad (7)$$

Тогда, если положить $x\ (t)=0,\ t\ \bar{\in}\ [t_0, T]$, то после подстановки приближенного представления (7) функции $x\ (t)$ в формулу

$$H(j\omega)=\int_{\infty}^{\infty} x\ (t)e^{-j\omega t}\ dt \quad (8)$$

получим следующее приближенное выражение комплексного спектра

$$\bar{H}(j\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\psi_k(\omega)+j\Phi_k(\omega)\Big], \quad (9)$$

где $\psi_k(\omega)=\sum_{j=1}^{2} a_k^j\ sin\ \omega t_{k+j-1}+\sum_{j=3}^{4} a_k^j\ cos\omega t_{k+j-3}+a_k^5\ sin\omega\bar{t}_{k+1}$ (10)

$$\Phi_k(\omega)=\sum_{j=1}^{2} b_k^j\ sin\omega t_{k+j-1}+\sum_{j=3}^{4} b_k^j\ cos\omega t_{k+j-3}+b_k^5 cos\omega\bar{t}_{k+1} \quad (11)$$

$$a_k^1=b_k^3=-\frac{x\ (t_k)}{\omega}+\frac{2c_k}{\omega^3}$$

$$a_k^2=b_k^4=\frac{x\ (t_{k+1})}{\omega}-\frac{2(c_k+d_k)}{\omega^3}$$

$$a_k^3=-b_k^1=-\frac{m_k}{\omega^2} \quad (12)$$

$$a_k^4=-b_k^2=\frac{m_{k+1}}{\omega^2}$$

$$a_k^5=b_k^5=\frac{2\ d_k}{\omega^3}$$

Для случая краевых условий

$$g_0''(t_0)=x''(t_0),\quad g_n''(T)=x''(T)$$

получаем

$$|x(t)-\bar{x}(t)|\leqslant\frac{7}{8}\,(||\Delta_n||)^2 max|x''(t+h)-x''(t)|,$$

где max берётся по $t,\ t+h\in[t_0,\ T,]$ $|h|\leqslant||\Delta_n||$

$$||\Delta_n||=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\ (t_{i+1}-t_i)$$

Отсюда

$$|H(j\omega)-\bar{H}(j\omega)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)-\bar{x}(t)|dt\leqslant\frac{7}{8}\,||\Delta_n||^2 max|x''(t+h)-x''(t)|, \quad (13)$$

где max берётся по t, $t+h \in [t_0, T]$, $|h| \leqslant ||\Delta_n||$.
Приближенное представление преобразования Фурье при помощи сплайна назовем сплайн-преобразованием Фурье (СПФ).

3. СПФ для случая равноотстоящих узлов. Для цифровой обработки биометрической информации в лабораторных или клинических условиях используются сигналы, полученные в процессе аналого-цифрового преобразования и представляющие собой обычно сигналы, следующие через равные интервалы времени. В этом случае, если положить шаг квантования равным Δt, то имеем:

$$h_k=2\Delta t=2h, \quad \bar{h}_k=\Delta t=h \tag{14}$$

$$t_k=t_0+2k\Delta t, \quad \bar{t}_k=t_0+(2k-1)\Delta t$$

$$d_k=\frac{m_k+m_{k+1}}{h}-\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{h^2} \tag{15}$$

$$c_k=\frac{x\ (t_{k+1})-x(t_k)}{2h^2}-\frac{m_{k+1}+3m_k}{4h} \tag{16}$$

где величины m_k определяются из системы уравнений

$$m_k+6m_{k+1}+m_{k+2}=2[x(t_{k+2})-x(t_k)]\cdot h^{-1}; \quad k=0,1, \cdot \cdot\ n-2$$

$$m_0+m_1=2[x(t_1)-x(t_0)]\Delta t^{-1}$$

$$m_{n-1}+m_n=2[x(t_n)-x(t_{n-1})]\Delta t^{-1}$$

Отсюда, формулы (10) — (11) можно привести к виду

$$\psi_k(\omega)=a_k^1\ sin\omega(t_0+2k\Delta t)+a_k^2\ sin\omega[t_0+2(k+1)\Delta t]+a_k^3\ cos\omega\ (t_0+2k\Delta t)+ a_k^4 cos\omega[t_0+2(k+1)\Delta t]+a_k^5\ sin\omega[t_0+(2k+1)\Delta t]. \tag{17}$$

$$\Phi_k(\omega)=b_k^1\ sin\omega(t_0+2k\Delta t)+b_k^2\ sin\omega[t_0+2(k+1)\Delta t]+b_k^3 cos\omega(t_0+2k\Delta t)+ +b_k^4 cos\omega[t_0+2(k+1)\Delta t]+b_k^5\ cos\omega[t_0+(2k+1)\Delta t]. \tag{18}$$

4. Спектральный анализ ЭКГ сигналов. Известно [7,9], что ЭКГ представляет собой электрический сигнал, генерируемый нестационарным объемным источником-сердцем. Характерной особенностью ЭКГ является достаточная упорядоченность, что позволяет подробно и широко использовать её в клинических условиях. Анализ спектрального состава ЭКГ, как показали исследования [12], дает ценную информацию о заболеваниях сердца. Многие заболевания меняют только определенные, специфичные для него члены этого разложения. Так, при гипертрофии левого желудочка сердца резко изменяются амплитуды следующих гармоник: 1-й—для ряда синусов и косинусов, 2-й и 27-й ряда косинусов и 16-й для ряда синусов [12].

Для получения исходной информации и последующего проведения преобразования Фурье ЭКГ кривой применяется агрегатированная система непрерывного наблюдения за кардиологическими больными [11]. Из выбранного отведения аналоговый электрокардиосигнал поступает в аналого-цифровой преобразователь (АЦП), откуда с частотой дискретизации 500 отсчетов в секунду и в десятиразрядной цифровой форме передается в оперативное запоминающее устройство (ОЗУ) прикроватного микропроцессора.

Так как для проведения клинических исследований [9,10] при записи ЭКГ удовлетворительной считается полоса пропускания, ограниченная частотами 0,05 и 45 гц. и для спектрального анализа приходится взять сигнал с разной полосой пропускания, то в алгоритме спектрального анализа ЭКГ сигналов предусмотрена предварительная цифровая фильтрация. Цифровую фильтрацию реализуют фильтры Баттерворта: фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры высоких частот (ФВЧ), а так же полосовые и режекторные фильтры [7].

рис. 1

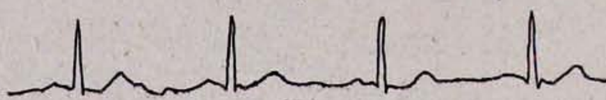

рис. 2.

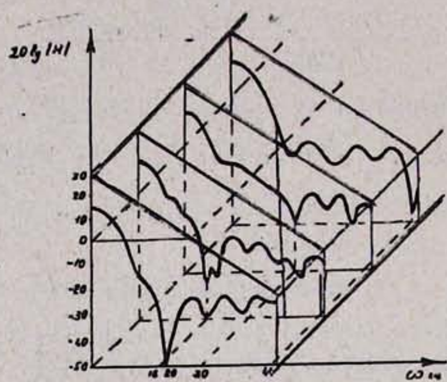

рис. 3.

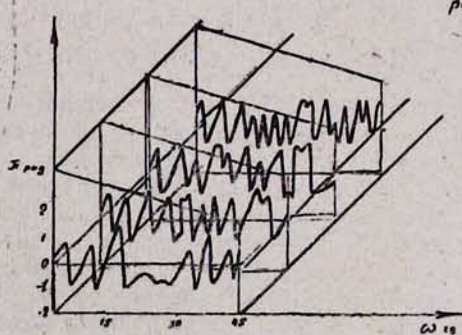

Рис. 4.

На рис. 1 и рис. 2 приведены построенные на устройстве графического отображения информации (УГОИ) графики входного и выходного сигналов ФНЧ при $\omega_c=45$гц., $n=2$.

Последовательные значения $\overline{H}(j\omega)$ из (9): $\overline{H}(j)$, $\overline{H}(2j)$, ... $\overline{H}(\Omega j)$ описывают спектральный состав исходной последовательности $\bar{x}(t)=\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ т. е. является комплексным спектром электрокардиосигнала.

Последовательность величин

$$|\overline{H}(j\omega)| = \sqrt{Re^2\overline{H}(j\omega) + I_m^2\overline{H}(j\omega)} \qquad \omega = 0, \pm 1, \pm 2, \cdot \cdot \pm \Omega$$

составляет амплитудный спектр $\bar{x}(t)$, а последовательность фазовых сдвигов φ_ω, определяемых соотношением

$$tg\varphi_\omega = \frac{Im\overline{H}(j\omega)}{Re\overline{H}(j\omega)}$$

составляет фазовый спектр $\bar{x}(t)$.

На рис. 3 и рис. 4 в логарифмическом масштабе приведены графики амплитудных и фазовых спектров, полученные через каждую минуту зубца ЭКГ.

5. Программное обеспечение. Программы алгоритма спектрального анализа написаны на языке АССЕМБЛЕР ЭВМ «Электроника 100/25» и состоят из следующих модулей:

1) модуль измерения и ввода аналоговой информации;
2) модуль фильтрации ЭКГ сигналов;
3) модуль распознавания структурных элементов ЭКГ кривой;
4) модуль спектрального анализа ЭКГ;
5) модуль вывода результатов измерения и анализа ЭКГ кривой на печать и УГОИ.

Эти модули входят в состав программного обеспечения системы непрерывного наблюдения за кардиологическими больными, оформлены в виде подпрограмм и могут быть использованы для решения различных задач автоматизированной обработки информации по результатам измерения медико-биологических параметров пациентов [11, 12, 13].

Выводы. Описанное программное обеспечение алгоритма спектрального анализа применяется в системе непрерывного наблюдения за кардиологическими больными и позволяет вычислять спектральные характеристики ЭКГ сигналов. По сравнению с существующими численными методами приближенного вычисления спектральных характеристик, рассмотренный метод обладает следующими преимуществами: 1) позволяет вычислять спектральные характеристики переходных функций, имеющих особенности и не имеющих слишком большую гладкость, например, ЭКГ сигналы; 2) повышает точность и расширяет в область высоких частот диапазон вычисления амплитудно-частотных характеристик; 3) позволяет получить численную оценку точности приближенного вычисления преобразования Фурье.

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ս. Ս. ՊԱՊՅԱՆ, Է. Մ. ՀԱՅԿԱՋՅԱՆ

ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է սպեկտրալ անալիզի մի ալգորիթմ, նրա կիրառումը էլեկտրասրտագրային ազդանշանների սպեկտրալ անալիզի խնդրում և այդ ալգորիթմի ծրագրային իրականացումը «էլեկտրոնիկա 100/25» ԷՀՄ-ի ԱՍՍԵՄԲԼԵՐ լեզվով։

Սպեկտրալ անալիզի ծրագիրը օգտագործվում է ինտենսիվ թերապիայի հիվանդասենյակներում սրտային հիվանդներին անընդհատ հսկող համակարգում։

ЛИТЕРАТУРА

1 *Рабинер Л. Б., Гоулд.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., Мир, 1978 г.

2 *Воронов А. А.* Приближённое построение кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике. Автоматика и телемеханика, № 6, 1952, с. 747—749.

3 *Соколов Н. Л.* Приближённый графоаналитический метод определения амплитудно-фазовых характеристик по переходным функциям. Сб. «Труды МАИ, вып. 112, 1959, с. 66—72.

4 *Солодовников В. В.* О применении трапецеидальных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 15, 1949, с. 362—376.

5 *Стечкин С. Б., Субботин Ю.. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.

6 *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.

7 *Верешкин А. Е., Катковник В. Я.* Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М., Советское радио, 1973.

8 *Томас Л. Дж., Кларк К. У. и др.* Автоматизированный анализ сердечных дизритмий, ТИИЭР, т. 67, № 9, 1979, с. 173—193.

9 *Лендолл Дж. Р.* Характеристики электрокардиографов, предназначенных для работы в вычислительных системах. Вычислительные системы и автоматическая диагностика заболеваний сердца, под ред. Кассереса и Дрейфуса Л.—М., Мир, 1974, с. 33—48.

10 *Херберг Х. М.* Вопросы эксплуатации медицинского вычислительного центра, там же с. 339—345.

11 Агрегатированная система на базе мини-ЭВМ «Электроника—100/25», микро-ЭВМ «Электроника-60» для непрерывного контроля за состоянием кардиобольных. Каталог медицинских электронных приборов., вып. 1, с. 103—105, М., 1982.

12 *Белоусов В.* Математическая электрокардиология. Минск, Беларусь, 1969.

13 *Папян С. С., Меликян Р. М.* Алгоритмы автоматического анализа и распознавания ЭКС и его программная реализация. Тезисы и докл. III конф. мол. уч. зак. республ. по автоматическому управлению, Тбилиси, 1982, с. 205—206.