А. Г. ДАЛАЛЯН

ИСКЛЮЧАЕМЫЕ СЛОВА И СВОБОДНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Словом называем конечную последовательность, составленную из букв некоторого алфавита. Если X есть слово в алфавите $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\}$, то словом вида X в некотором алфавите $\Psi_m = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ будем называть слово, которое получается заменой букв слова X некоторыми непустыми словами алфавита Ψ_m, причем одинаковые буквы заменяются графически равными словами [1, с. 363]. Следуя [2, с. 262], дадим

Определение 1. *Множество слов N в алфавите Ω называется исключаемым в алфавите Ψ_m, если в алфавите Ψ_m существует бесконечно много графически неравных слов, каждое из которых для любого слова X из множества N, не содержит подслов вида X.*

Множество N называется просто исключаемым, если существует алфавит Ψ_m, в котором оно исключаемо ([1] с. 363, [2], с. 262). Одноэлементное исключаемое (исключаемое в алфавите Ψ_m) множество называется исключаемым (исключаемым в алфавите Ψ_m) словом. Понятие исключаемости оказывается полезным при изучении систем тождеств многообразий полугрупп [3, 4]. Впервые в частном случае понятие исключаемости было рассмотрено в работах [5, 6], в которых доказывается исключаемость слова x_1^2 в алфавите Ψ_3 и исключаемость слова x_1^3 в алфавите Ψ_2. В работе [7] доказывается исключаемость множества слов $\{x_1 x_2 \ldots x_n x_{\psi(1)} x_{\psi(2)} \ldots x_{\psi(n)}\}$, где $n = 1, 2, \ldots$ а ψ — любая перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, в алфавите Ψ_7. Слово X называется кратным, если каждая буква, входящая в X, входит в него минимум два раза. В работе [2] доказывается исключаемость некоторого подмножества (так называемых „хорошо смешанных“ слов) всех кратных слов в алфавите Ψ_{20}. В работе [8] показывается исключаемость любого слова длины не меньше 2^k, в которое входит не более k различных букв, в алфавите Ψ_4. В работах [1, 2] приводятся необходимые и достаточные условия того, чтоб множество слов в алфавите Ω было бы исключаемым. Через $\Pi_r = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$ будем обозначать свободную полугруппу с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_r$, где $r \leqslant \infty$. Следуя [2], дадим

Определение 2. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_r и Π_t называется X-свободным при некотором фиксированном слове X в алфавите Ω, если при гомоморфизме φ образ каждого не со-*

держащего подслов вида X элемента полугруппы Π_r *также не содержит подслов вида* X.

В [2] доказывается существование x_1^k-свободного, при любом $k \geqslant 2$, гомоморфизма полугрупп Π_- и Π_3 и ставится вопрос о существовании для любого исключаемого слова X X-свободного эндоморфизма (т. е. гомоморфизма в себя) некоторой конечнопорожденной свободной полугруппы. Очевидно, что любой гомоморфизм полугрупп Π_r и Π_t, взаимно однозначно отображающий множество всех образующих полугруппы Π_r в множество образующих полугруппы Π_t, является X-свободным для любого слова X, значит, для любого слова X, которое исключаемо в алфавите Ψ_r, существует X-свободный эндоморфизм полугруппы Π_r. Поэтому, естественно, в определении 2, данном в [2], потребовать, чтобы гомоморфизм свободных полугрупп Π_r и Π_t не отображал взаимно однозначно множесто всех образующих полугруппы Π_r в множество образующих полугруппы Π_t. В дальнейшем будем считать, что вышеуказанное уточнение определения 2 имеет место. Оказывается, что существуют такие исключаемые слова X, для которых не существует не только X-свободного эндоморфизма никаких свободных полугрупп, но и не существует никакого X-свободного гомоморфизма никаких полугрупп Π_r и Π_t при любых r, $t \in \{1, 2, \ldots\}$.

В § 1 настоящей работы приводятся необходимые и достаточные условия существования X-свободного гомоморфизма некоторых свободных полугрупп для любого слова X, а также примеры исключаемых слов X, для каждого из которых не существует X-свободного гомоморфизма никаких свободных полугрупп. В работе [2] приводятся достаточные условия для того, чтобы гомоморфизм свободных полугрупп был x_1^k-свободным при любом $k \geqslant 2$, и ставится вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий. В § 2 настоящей работы приводятся такие необходимые и достаточные условия для $k = 2$ из чего следует существование алгоритма, который по любому гомоморфизму конечнопорожденных свободных полугрупп определяет, является ли он x_1^2-свободным.

Приведем основные обозначения, которые используются в данной работе. Через $|X|$ обозначается длина слова X, т. е. количество букв, входящих в него, через Δ_X — множество всех различных букв слова X. Графическое равенство слов X и Y обозначается $X \doteq Y$. В дальнейшем через $X, X_1, X_2, \ldots, X', Y, Y_1, \ldots, Y', Z_1, Z_2, \ldots$ будем обозначать слова, а через $w, w_1, w_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ — буквы алфавита Ω.

§ 1. В настоящем параграфе через X всегда обозначается слово в алфавите Ω, у которого не все буквы различны.

Лемма 1.1. *Гомоморфизм* φ *свободных полугрупп* Π_r *и* Π_t, *удовлетворяющий условию* $|\varphi(a_i)| = 1$, *где* a_i *любая одразующая полугруппы* Π_r, *не является* X-*свободным ни для какого слова* X.

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда существуют такие образующие a_r и a_l полугруппы П, что $\varphi(a_r) \doteq \varphi(a_l)$. Так как не все буквы слова X различны, то хотя бы одно из слов $b_1 b_2, \ldots, b_{|X|}$, где буквы $b_1, b_2, \ldots, b_{|X|}$ могут принимать значения a_r и a_l, не содержит подслов вида X. Но $\varphi(b_1 b_2 \ldots, b_{|X|}) = [\varphi(a_r)]^{|X|}$, а $[\varphi(a_r)]^{|X|}$ представляет собой слово вида X. Противоречие.

Определение 1.2. *Будем говорить, что для слова X существует δ-разбиение, если Δ_X можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ таким образом, что Φ_1 и Φ_2 непусты и для любого представления слова X в виде $X \doteq X_1 x_i x_j X_2$ выполняются условия*

$$(1),\ \textit{если}\ x_i \in \Phi_1 \cup \Phi_4,\ \textit{то}\ x_j \in \Phi_2 \cup \Phi_4;$$

$$(2),\ \textit{если}\ x_i \in \Phi_2 \cup \Phi_3,\ \textit{то}\ x_j \in \Phi_1 \cup \Phi_3.$$

Теорема 1.3. *Для слова X существует X-свободный гомоморфизм некоторых свободных полугрупп в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий*

(i) *X нельзя представить в виде $X \doteq Y' w Y''$*, где $\Delta_{Y'} \cap \Delta_{Y''} = \varnothing$ *и $w \overline{\in} \Delta_{Y'} \cup \Delta_{Y''}$, и для слова X не существует δ-разбиения.*

(ii) *X можно представить в виде $X \doteq X_1 w X_2$, где $\Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_2} = \varnothing$, $w \overline{\in} \Delta_{X_1} \cup \Delta_{X_2}$; при $i = 1, 2$ слово X_i нельзя представить в виде $X_i \doteq Y_i' w_i Y_i''$, где $\Delta_{Y_i'} \cap \Delta_{Y_i''} = \varnothing$ и $w_i = \overline{\in} \Delta_{Y_i'} \cup \Delta_{Y_i''}$; и или для слов X_1 и X_2 не существует δ-разбиения, или одно из слов X_1 и X_2 пусто, а для другого не существует δ-разбиения.*

Доказательство.

Необходимость.

Допустим, что это не так. Тогда существует X-свободный гомоморфизм φ свободных полугрупп $П_r$ и $П_l$ и для слова X не выполняется ни одно из условий (i) и (ii). Из леммы 1.1. следует, что существует такая образующая a_r полугруппы П, что $\varphi(a_r) = BC$, где $|B|, |C| \geqslant 1$.

a) Докажем, что слово X нельзя представить в виде $X \doteq X_1 u_1 X_2 u_2 X_3$, где $u_1 \neq u_2$, $u_2, u_1 \overline{\in} \Delta_{X_1} \cup \Delta_{X_2} \cup \Delta_{X_3}$ и

$$\Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_2} = \Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_3} = \Delta_{X_2} \cap \Delta_{X_3} = \varnothing.$$

Допустим, что это не так. Тогда $a_r^{|X|-1}$ не содержит подслов вида X, но $\varphi(a_r^{|X|-1}) = (BC)^{|X|-1} \doteq (BC)^{|X_1|} B (CB)^{|X_2|} C (BC)^{|X_3|}$, т. е. $(BC)^{|X|-1}$ представляет собой слово вида X, что невозможно. Таким образом, или слово X нельзя представить в виде $X \doteq Y' w Y''$, где $\Delta_{Y'} \cap \Delta_{Y''} = \varnothing$ и $w \in \Delta_{Y'} \cup \Delta_{Y''}$, или $X \doteq X_1 w X_2$, где $\Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_2} = \varnothing$, $w \overline{\in} \Delta_{X_1} \cup \Delta_{X_2}$ и при $i = 1, 2$ слово X_i нельзя представить в виде $X_i \doteq Y_i' w_i Y_i''$, где $\Delta_{Y_i'} \cap \Delta_{Y_i''} = \varnothing$ и $w_i \in \Delta_{Y_i'} \cup \Delta_{Y_i''}$.

б) Допустим, что X нельзя представить в виде $X \doteq Y'wY''$, где $\Delta_{Y'} \cap \Delta_{Y''} = \varnothing$ и $w \in \Delta_{Y'} \cup \Delta_{Y''}$, но для слова X существует δ-разбиение Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

Рассмотрим слово D, которое получается следующей подстановкой слов B, C, BC, CB вместо букв слова X: если X начинается с буквы из множества $\Phi_1 \cup \Phi_3$ (множества $\Phi_2 \cup \Phi_4$), то вместо букв множества Φ_1 (множеста Φ_2) подставляется слово B, вместо букв множества Φ_2 (множества Φ_1) -слово C, вместо букв множества Φ_3 (множества Φ_4) - слово BC, а вместо букв множества Φ_4 (множества Φ_3) -слово CB. Очевидно, что D есть слово вида X. Из условий (1), (2) определения 1.2 следует, что D есть начало слова $(BC)^h$, при некотором $h \geqslant 2$. Так как множества Φ_1 и Φ_2 непусты, то $h \leqslant |X|-1$. Таким образом, $a_r^{|X|-1}$ не содержит подслов вида X, но $\varphi(a_r^{|X|-1}) = (BC)^{|X|-1}$ и, по доказанному, начало слова $(BC)^{|X|-1}$ есть слово вида X, что невозможно.

в) Пусть $X \doteq X_1wX_2$ где $\Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_2} = \varnothing$, $w \overline{\in} \Delta_{X_1} \cup \Delta_{X_2}$ и при $i = 1, 2$ слово X_i нельзя представить в виде $X_i \doteq Y_i'w_iY_i''$, где $\Delta_{Y_i'} \cap \Delta_{Y_i''} \neq \varnothing$ и $w_i \overline{\in}$ $\overline{\in} \Delta_{Y_i'} \cup \Delta_{Y_i''}$, но для одного из слов X_1 и X_2 существует δ-разбиение. Пусть Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 есть δ-разбиение для слова X_1. (Случай, когда существует δ-разбиение для слова X_2, рассматривается аналогично.). Так же, как в пункте б) получим, что $\varphi(a_r^{|X|-1}) = (BC)^{|X|-1} \doteq DD'$, где D есть слово вида X_1. Очевидно, что $a_r^{|X|-1}$ не содержит подслов вида X. Но $\varphi(a_r^{|X|-1}) = (BC)^{|X|-1} \doteq DD'(BC)^{|X_2|+1} \doteq DD'BC\,(BC)^{|X_2|}$, т. е. $\varphi(a_r^{|X|-1})$ содержит подслово вида X, что невозможно.

Достаточность.

Покажем, что гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_n и Π_{n+1}, определенный следующим образом: $\varphi(a_i) = a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, \ldots, n-1\}$ и $\varphi(a_n) = a_na_{n+1}$, является X-свободным. Допустим, что это не так. Тогда существует такой элемент A полугруппы Π_n, который не содержит подслов вида X, но $\varphi(A)$ содержит подслово вида X.

а) X нельзя представить в виде $X \doteq Y'wY''$, где $\Delta_{Y'} \cap \Delta_{Y''} = \varnothing$ и $w \overline{\in} \Delta_{Y'} \cup \Delta_{Y''}$, и для слова X не существует δ-разбиения.

Пусть $X \doteq y_1y_2 \ldots y_{|X|}$, где $y_1, y_2, \ldots, y_{|X|}$ буквы слова X. Тогда $\varphi(A) = E_1A_1A_2 \ldots A_{|X|}E_2$, причем при любом $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$ $|A_i| \neq 0$ и $A_i \doteq A_t$ при всех r, $t \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$ таких, что $y_r \doteq y_t$. Для слова X определим множества Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 следующим образом: Φ_1 есть множество всех тех букв y_i слова X, для которых A_i начинается не с буквы a_{n+1} и кончается на букву a_n; Φ_2 — множество всех тех букв y_i слова X, для которых A_i начинается с буквы a_{n+1} и кончается не на букву a_n; Φ_4 — множество всех тех букв y_i слова X, для которых A_i начинается с буквы a_{n+1} и кончается на букву a_n; Φ_3 — множество всех остальных букв слов X. Очевидно, что множества Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 попарно не пересекаются и их объединение равно

Δ_X. Нетрудно убедиться, что для любого представления слова X в виде $X \doteq Y' x_g x_q Y''$ выполняются условия (1) и (2) определения 1.2. Так как для слова X не существует δ-разбиения, то одно из множеств Φ_1 и Φ_2 пусто. Покажем, что из пустоты одного из множеств Φ_1 и Φ_2 следует пустота второго. Пусть это не так, и для определенности $\Phi_1 = \varnothing$, а $\Phi_2 \neq \varnothing$. Тогда существует буква $w \in \Phi_2$, такая, что $X \doteq Y' w Y''$. Из условий (1) и (2) определения 1.2 следует, что $\Delta_{Y'} = \Phi_4$ и $\Delta_{Y''} = \Phi_3$. Тогда $\Delta_{Y'} \cap \Delta_{Y''} = \varnothing$ и $w \overline{\in} \Delta_{Y'} \cup \Delta_{Y''}$, что невозможно по условию (i) настоящей теоремы. Таким образом, $\Phi_1 = \Phi_2 = \varnothing$. Из условий (1) и (2) определения 1.2 следует, что одно из множеств Φ_3 и Φ_4 пусто.

Допустим, что множество Φ_4 пусто. Тогда

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1)\,\varphi^{-1}(A_1)\,\varphi^{-1}(A_2)\ldots\varphi^{-1}(A_{|X|})\,\varphi^{-1}(E_2),$$

причем при любом $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$ $|\varphi^{-1}(A_i)| \neq 0$ и $\varphi^{-1}(A_r) \doteq \varphi^{-1}(A_t)$ при всех $r, t \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$, таких, что $y_r \doteq y_t$. Значит, A содержит подслово вида X, что невозможно по предположению.

Допустим, что множество Φ_3 пусто. Тогда при всех $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$ $A_i \doteq a_{n+1} B_i a_n$. Значит,

$$\varphi(A) = E_1 a_{n+1} B_1 a_n a_{n+1} B_2 a_n \ldots a_{n+1} B_{|X|} a_4 E_2.$$

Тогда $$E_1 \doteq E_1' a_n \text{ и }$$

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1')\, a_n\, \varphi^{-1}(B_1)\, a_n\, \varphi^{-1}(B_2)\ldots a_n\, \varphi^{-1}(B_{|X|})\,\varphi^{-1}(a_n E_2),$$

причем $a_n \varphi^{-1}(B_r) \doteq a_n \varphi^{-1}(B_t)$ при всех $r, t \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$, таких, что $y_r \doteq y_t$. Значит, слово A содержит подслово вида X, что невозможно по предположению.

б) $X \doteq X_1 w X_2$, где $\Delta_{X_1} \cap \Delta_{X_2} = \varnothing$, $w \overline{\in} \Delta_{X_1} \cup \Delta_{X_2}$ и при $i=1, 2$ слово X_i нельзя представить в виде $X_i \doteq Y_i' w_i Y_i''$, где

$$\Delta_{Y_i'} \cap \Delta_{Y_i''} = \varnothing \quad \text{и} \quad w_i \overline{\in} \Delta_{Y_i'} \cup \Delta_{Y_i''}.$$

Допустим сначала, что X_1 и X_2 непусты и для слов X_1 и X_2 не существует δ-разбиения. Пусть $X_1 \doteq y_1 y_2 \ldots y_{|X_1|}$ и $X_2 \doteq z_1 z_2 \ldots z_{|X_2|}$. Тогда $\varphi(A) = E_1 A_1 A_2 \ldots A_{|X_1|} F G_1 G_2 \ldots G_{|X_2|} E_2$, где $|F| \neq 0$, при любом $i \in \{1, 2, \ldots, |X_1|\}$ $|A_i| \neq 0$, при любом $j \in \{1, 2, \ldots, |X_2|\}$ $|G_j| \neq 0$, $A_r \doteq A_t$ при всех $r, t \in \{1, 2, \ldots, |X_1|\}$, таких, что $y_r \doteq y_t$, $G_g \doteq G_q$ при всех g, q, таких, что $z_g \doteq z_q$. Так же, как и в предыдущем пункте, определим для слова X_1 множества $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, а для слова X_2 — множества $\Phi_1', \Phi_2', \Phi_3', \Phi_4'$. Аналогично доказывается, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_1' = \Phi_2' = \varnothing$ и что одно из множеств Φ_3 и Φ_4 и одно из множеств Φ_3' и Φ_4' пусты.

Пусть множества Φ_4 и Φ_4' пусты. Тогда

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1)\,\varphi^{-1}(A_1)\,\varphi^{-1}(A_2)\ldots\varphi^{-1}(A_{|X_1|})\,\varphi^{-1}(F)\,\varphi^{-1}(G_1)\ldots$$
$$\varphi^{-1}(G_{|X_2|})\,\varphi^{-1}(E_2),$$

т. е. слово A содержит подслово вида X.

Пусть Φ_4 и Φ'_3 пусты. Тогда при всех $j \in \{1, 2, \ldots, |X_2|\}$

$$G_j \doteq a_{n+1} H_j a_n$$

и

$$\varphi(A) = E_1 A_1 A_2 \ldots A_{|X_1|} F a_{n+1} H_1 a_n a_{n+1} H_2 a_n \ldots a_{n+1} H_{|X_2|} a_n E_2.$$

Значит, $E_2 \doteq a_{n+1} E'_2$. Получим, что

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1)\varphi^{-1}(A_1)\ldots\varphi^{-1}(A_{|X_1|})\varphi^{-1}(Fa_{n+1})\varphi^{-1}(H_1)a_n\ldots$$
$$\varphi^{-1}(H_{|X_2|})a_n\varphi^{-1}(E'_2),$$

т. е. слово A содержит подслово вида X, что невозможно.

Пусть Φ_3 и Φ'_4 пусты. Невозможность этого случая доказывается так же, что и предыдущего.

Пусть Φ_3 и Φ'_3 пусты. Тогда при всех $i \in \{1, 2, \ldots, |X_1|\}$ $A_i \doteq a_{n+1} B_i a_n$ и при всех $j \in \{1, 2, \ldots, |X_2|\}$ $G_j \doteq a_{n+1} H_j a_n$. Получим, что

$$\varphi(A) = E_1 a_{n+1} B_1 a_n \ldots a_{n+1} B_{|X_1|} a_n F a_{n+1} H_1 a_n \ldots a_{n+1} H_{|X_2|} a_n E_2.$$

Значит,

$$E_1 \doteq E'_1 a_n \quad \text{и} \quad E_2 \doteq a_{n+1} E'_2,$$

из чего следует, что

$$A \doteq \varphi^{-1}(E'_1)a_n\varphi^{-1}(B_1)\ldots a_n\varphi^{-1}(B_{|X_1|})\varphi^{-1}(a_nFa_{n+1})\varphi^{-1}(H_1)a_n\ldots$$
$$\varphi^{-1}(H_{|X_2|})a_n\varphi^{-1}(E'_2),$$

т. е. A содержит подслово вида X, что невозможно.

Допустим теперь, что для X_1 не существует δ-разбиения, и $|X_2| = 0$. (Случай, когда $|X_1| = 0$, а для слова X_2 не существует δ-разбиения, рассматривается аналогично). Пусть $X_1 \doteq y_1 y_2 \ldots y_{|X_1|}$ тогда $X \doteq y_1 y_2 \ldots y_{|X_1|} w$ и $\varphi(A) = E_1 A_1 A_2 \ldots A_{|X_1|} F E_2$, где $|F| \neq 0$, при любом $i \in \{1, 2, \ldots, |X_1|\}$ и $A_r \doteq A_t$ при всех $r, t \in \{1, 2, \ldots, |X_1|\}$, таких, что $y_r \doteq y_t$. Так же, как и в предыдущем случае, определим для слова X_1 множества Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 = \varnothing$ и одно из множеств Φ_3 и Φ_4 тоже пусто.

Пусть Φ_4 непусто. Тогда $E_2 \doteq E'_2 E''_2$, где E''_2 не начинается с буквы a_{n+1}. Тогда

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1)\varphi^{-1}(A_1)\varphi^{-1}(A_2)\ldots\varphi^{-1}(A_{|X_1|})\varphi^{-1}(FE'_2)\varphi^{-1}(E'_2),$$

т. е. слово A содержит подслово вида X, что невозможно.

Пусть Φ_3 непусто. Тогда при всех $i \in \{1. 2, \ldots, |X_1|\}$

$$A_i \doteq a_{n+1} B_i a_n$$

и

$$\varphi(A) = E_1 a_{n+1} B_1 a_n a_{n+1} B_2 a_n \ldots a_{n+1} B_{|X_1|} a_n F E_2.$$

Значит,

$$E_1 \doteq E'_1 a_n \quad \text{и} \quad F \doteq a_{n+1} F'.$$

Получим, что

$$A \doteq \varphi^{-1}(E_1') a_n \varphi^{-1}(B_1) a_n \varphi^{-1}(B_2) \ldots a_n \varphi^{-1}(B_{|X_1|}) a_n \varphi^{-1}(F' E_2),$$

т. е. слово A содержит подслово вида X, что невозможно. Теорема 1.3 полностью доказана.

Следствие. 1.4. *Существует алгоритм, который по любому слову X в алфавите Ω определяет, существует ли X-свободный гомоморфизм некоторых свободных полугрупп.*

Следствие 1.5. *Для любого кратного слова X существует X-свободный гомоморфизм в том и только том случае, когда для слова X не существует δ-разбиения.*

Следствие 1.6. *Если для любого представления слова X в виде $X \doteq X_1 x_l X_2 x_l X_3$, где x_l любая буква из множества Δ_X, длина слова X_2 нечетна, то не существует X-свободного гомоморфизма никаких свободных полугрупп.*

Доказательство. Пусть Φ_1 есть множество всех тех букв, которые в слове X находятся на нечетных местах, Φ_2-множество всех остальных букв слова X, а $\Phi_3 = \Phi_4 = \varnothing$. Очевидно, что Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 есть δ-разбиения для слова X.

Приведем примеры исключаемых слов, для которых не существует X-свободного гомоморфизма никаких свободных полугрупп.

$$V_n = x_1 x_2 \ldots x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_2 \ldots x_n \quad \text{при всех } n \geqslant 2.$$

$$W_{2m} = x_1 x_2 \ldots x_{2m} x_{2l_1 - 1} x_{2s_1} \ldots x_{2l_m - 1} x_{2s_m},$$

где $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ и $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ есть перестановки множества $(1, 2, \ldots, m)$. Слова V_n и W_{2m} являются исключаемыми ввиду своей кратности (см. [1, 2]). Нетрудно проверить, что они удовлетворяют условию следствия 1.6. Следующее утверждение дает метод построения исключаемых слов X, для которых не существует X-свободного гомоморфизма никаких свободных полугрупп.

Следствие 1.7. *Пусть X есть исключаемое слово и $x_l \in \Delta_X$. X' получается из слова X подстановкой вместо всех вхождений буквы x_l в слове X слова $x_{i_1} x_{i_2}$, где $i_1 \neq i_2$ и $x_{i_1}, x_{i_2} \overline{\in} \Delta_X$. Тогда для слова X' не существует X'-свободного гомоморфизма никаких свободных подгрупп.*

Доказательство. Очевидно, что полученное слово X' является исключаемым. Пусть $\Phi_1 = \{x_{i_1}\}$, $\Phi_2 = \{x_{i_2}\}$, $\Phi_3 = \{\Delta_X \setminus \{x_l\}\}$, $\Phi_4 = \varnothing$. Нетрудно убедиться, что Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 есть δ-разбиение для слова X'.

Следствие 1.8. *Пусть M есть множество всех слов X в алфавите Ω, которые удовлетворяют условиям*

(i) *мощность множества Δ_X не меньше трех;*

(ii) *для любых различных букв x_i и x_j из множества Δ_X $x_i x_j$ и $x_j x_i$ являются подсловами слова X.*

Тогда для любого слова X из множества M существует X-свободный гомоморфизм некоторых свободных полугрупп.

Доказательство. Так как каждое слово из множества M является кратным, достаточно доказать (следствие 1.5), что для любого слова $X \in M$ не существует δ-разбиения. Допустим, что это не так, т. е. Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 есть δ-разбиения для некоторого слова из множества M. Так как Φ_1 и Φ_2 непусты, то существуют буквы x_r и x_t из Δ_X такие, что $x_r \in \Phi_1$ и $x_t \in \Phi_2$.

Из условия (i) следует, что существует такая буква $x_s \in \Delta_X$, что $s \neq r$ и $s \neq t$, а по условию (ii) $x_r x_s$ и $x_t x_s$ есть подслова слова X. Из условий (1) и (2) определения 1.2. следует, что $x_s \in \Phi_2 \cup \Phi_4$ и $x_s \in \Phi_1 \cup \Phi_3$, что невозможно.

Заметим, что условие (i) следствия 1.8. нельзя опустить, так как $(x_1 x_2)^k$ при $k \geqslant 2$ удовлетворяет условию (ii), но по следствию 1.7 не существует $(x_1 x_2)^k$-свободного гомоморфизма никаких свободных полугрупп.

§ 2. Следуя [2] будем говорить, что слово в некотором алфавите не содержит квадратов, если в нем нет подслов вида x_1^2, а гомоморфизм φ некоторых свободных полугрупп — свободным от квадратов, если он является x_1^2-свободным.

Рассмотрим два условия, которые мы будем накладывать на гомоморфизм φ свободных полугрупп Π и Π'. Как и раньше, образующие полугруппы Π будем обозначать через a_i.

(i) Если $U \in \Pi$, $|U| \leqslant 3$ и U не содержит квадратов, то $\varphi(U)$ не содержит квадратов;

(ii) Если при некотором $U \in \Pi$ и некоторых образующих a_i и a_k полугруппы Π имеет место равенство $\varphi(a_i) = A_1 B \varphi(U) CB$ (или $\varphi(a_i) = BC\varphi(U) BA_1$) и $\varphi(a_k) \doteq CD$ (соответственно $\varphi(a_k) = DC$), где хотя бы одно из слов B, C и U непусто, то $a_i U a_k$ (соответственно $a_k U a_i$) содержит квадрат некоторого слова.

В леммах 2.1 и 2.2 будем предполагать, что гомоморфизм φ свободных полугрупп Π и Π' удовлетворяет условию (i).

Лемма 2.1. Если $\varphi(a_i) \doteq A_1 A$ и $\varphi(a_j) = AA_2$, где $|A| \neq 0$, то $i = j$.

Доказательство. Допустим, что это не так, т. е. $|A| \neq 0$, $\varphi(a_i) = A_1 A$, $\varphi(a_j) = AA_2$ и $i \neq j$. Тогда $a_i a_j$ не содержит квадратов, но $\varphi(a_i a_j) = A_1 AAA_2$, что невозможно в силу условия (i).

Лемма 2. 2. *Если $\varphi(a_i) = AB \doteq CA$, то не существует такого индекса j, что B начинается со слова $\varphi(a_j)$ (C кончается на слово $\varphi(a_j)$).*

Доказательство. Мы докажем, что при условиях леммы 2.2 B не начинается со слова $\varphi(a_j)$. Утверждение о том, что C не кончается на слово $\varphi(a_j)$, доказываетя аналогично.

Допустим, что лемма 2.2 неверна, т. е. $\varphi(a_i) = AB \mathrel{\underline{\cdot}} CA$.

1) $|A| \geqslant |C|$.

Тогда $A \mathrel{\underline{\cdot}} CA_1$, значит $\varphi(a_i) = CA_1B \mathrel{\underline{\cdot}} CCA_1'$, что невозможно в силу условия (i).

2) $|A| < |C|$.

Тогда $C \mathrel{\underline{\cdot}} AC_1$, где $|C_1| \neq 0$, значит $\varphi(a_i) = AB \mathrel{\underline{\cdot}} AC_1A$.

Так как C_1A начинается на $\varphi(a_j)$, то $C_1A \mathrel{\underline{\cdot}} \varphi(a_j)A_1$.

а) $|C_1| \geqslant |\varphi(a_j)|$.

Тогда $C_1 \mathrel{\underline{\cdot}} \varphi(a_j)A_2$ и $\varphi(a_i) = AC_1A \mathrel{\underline{\cdot}} A\varphi(a_j)A_2A$.

Очевидно, что $a_ia_ja_i$ не содержит квадратов, но $\varphi(a_ia_ja_i) = A\varphi(a_j) \times$ $\times A_2A\varphi(a_j)A\varphi(a_j)A_2A$ содержит квадрат, что невозможно по условию (i).

б) $|C_1| < |\varphi(a_j)|$.

Тогда $\varphi(a_j) = C_1C_2$, где $|C_2| \neq 0$. Так как $C_1A \mathrel{\underline{\cdot}} \varphi(a_j)A_1$, то $A \mathrel{\underline{\cdot}} C_2A_1$ и $\varphi(a_i) = AC_1A \mathrel{\underline{\cdot}} A\varphi(a_j)A_1 \mathrel{\underline{\cdot}} C_2A_1\varphi(a_j)A_1$.

Очевидно, что a_ia_j не содержит квадратов, но $\varphi(a_ia_j) = C_2A_1\varphi(a_j) \times$ $\times A_1\varphi(a_j)$ содержит квадрат, что невозможно по условию (i).

Теорема 2.3. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π и Π' является свободным от квадратов тогда и только тогда, когда удовлетворяет условиям (i) и (ii).*

Доказательство. Необходимость.

Очевидно, что условие (i) необходимо. Надо доказать необходимость условия (ii). Допустим, что это не так. Тогда существует свободный от квадратов гомоморфизм φ полугрупп Π и Π' такой, что условие (ii) не выполняется, т. е. существуют такие образующие a_k и a_i полугруппы Π, что $\varphi(a_i) = A_1B\varphi(U)CB$, $\varphi(a_k) = CD$ и a_iUa_k не содержит квадратов. Тогда $\varphi(a_iUa_k) = A_1B\varphi(U)CB\varphi(U)CB$ содержит квадрат, что противоречит нашему предположению. Аналогично рассматривается случай, когда существуют такие образующие a_i и a_k полугруппы Π, что $\varphi(a_i) = BC\varphi(U)BA_1$ и $\varphi(a_k) = DC$, a_kUa_i не содержит квадратов.

Достаточность.

Пусть гомоморфизм φ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Допустим, что φ не является свободным от квадратов, т. е. существует такой элемент W полугруппы Π, что W не содержит квадратов, а $\varphi(W)$ содержит квадрат некоторого слова, т. е. $\varphi(W) = H_1HHH_2$, где $|H| \neq 0$. Возможны два случая.

Случай 1. Одно из вхождений слова H в слово $\varphi(W)$ есть подслово образа некоторой образующей полугруппы Π при гомоморфизме φ, которое не совпадает со всем образом, а второе вхождение слова H в слово $\varphi(W)$ имеет вид $G_1\varphi(U)G_2$, где G_1 есть конец образа некоторой образующей полугруппы Π при гомоморфизме φ, не совпадающий со всем образом, а G_2 есть начало образа некоторой образующей полугруппы П при гомоморфизме φ, не совпадающий со всем образом. Допустим, что первое вхождение слова H в $\varphi(W)$ является подсловом образа некоторой образующей полугруппы П при гомоморфизме φ. Второй случай рассматривается аналогично. Тогда существуют такие образующие a_i и a_k полугруппы П, что $\varphi(a_i)=A_1AG_1$, $\varphi(a_k)=G_2D$, причем $A\doteq G_1\varphi(U)G_2$ и W содержит подслово a_iUa_k. Тогда $\varphi(a_i)=A_1G_1\varphi(U)G_2G_1$ и $\varphi(a_k)=G_1D$ и по условию a_iUa_k содержит квадрат, т. е. W содержит квадрат, что невозможно.

Случай 2. $\varphi(W)=\varphi(W_1)A_1A_2\varphi(U)B_1B_2\varphi(W)C_1C_2$, где $A_1A_2=\varphi(a_i)$ $B_1B_2=\varphi(a_j)$, $C_1C_2=\varphi(a_k)$, $W_1, U, V, W_2\in$ П и $A_2\varphi(U)B_1\doteq B_2\varphi(V)C_1$. Можно считать, что ни одно из слов A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 не является образом образующей полугруппы П при гомоморфизме φ.

1) $|A_2|=|B_2|$.

Тогда $A_2\doteq B_2$ и $\varphi(U)B_1\doteq\varphi(V)C_1$. Индукцией по $|U|+|V|$ докажем, что $U\doteq V$ и $B_1\doteq C_1$.

Если $|U|>0$, $|V|>0$, то $U\doteq a_rU'$, $V\doteq a_tV'$ и $\varphi(a_r)\varphi(U')B_1\doteq$ $\doteq\varphi(a_t)\varphi(V')C_1$ и по лемме 2.1 $r=t$, т. е. $\varphi(U')B_1\doteq\varphi(V')C_1$. Так как $|U'|+|V'|=|U|+|V|-2$, то, применяя индуктивное предположение, получим, что $U'\doteq V'$ и $B_1\doteq C_1$, тогда $U\doteq V$.

Теперь пусть $|U|>0$, $|V|=0$. Тогда $\varphi(U)B_1\doteq C_1$ и $U\doteq a_rU'$, т. е. $C_1\doteq\varphi(a_r)\varphi(U')B_1$ и $\varphi(a_k)=C_1C_2\doteq\varphi(a_r)\varphi(U')B_1C_2$, что невозможно по лемме 2.1. (Так как $|C_1|\neq 0$, то и $|C_2|\neq 0$).

Если $|U|=0$, $|V|>0$, то $V\doteq a_rV'$, т. е. $B_1\doteq\varphi(a_r)\varphi(V')C_1$. Тогда $\varphi(a_j)=B_1B_2\doteq\varphi(a_r)\varphi(V')C_1B_2$ и из леммы 2.1 следует, что это невозможно (так как $|B_1|\neq 0$, значит и $|B_2|\neq 0$).

Таким образом, $A_2\doteq B_2$, $U\doteq V$, $B_1\doteq C_1$. Если $i=j$ (или $j=k$), то $W\doteq W_1a_iUa_iVa_kW_2$, где $U\doteq V$ (или $W\doteq W_1a_iUa_kVa_kW_2$, где $U\doteq V$) и W содержит квадрат a_iU (или Ua_k), что невозможно. Значит, $a_ia_ja_k$ не содержит квадрата, но $\varphi(a_ia_ja_k)=A_1A_2B_1B_2C_1C_2\doteq$ $\doteq A_1A_2B_1A_2B_1C_2$, так как $A_2\doteq B_2$ и $B_1\doteq C_1$, что невозможно. Если же $|A_2|=|B_2|=|B_1|=|C_1|=0$, то $W\doteq W_1UVW_2$, где $U\doteq V$, что тоже невозможно.

2) $|A_2|>|B_2|$.

Тогда $A_2\doteq B_2E_1'$, где $|E_1'|\neq 0$ и $E_1'\varphi(U)B_1\doteq\varphi(V)C_1$

(I) $|E_1'|\geqslant|\varphi(V)|$.

Тогда $E_1'\doteq\varphi(V)C_1'$ и $C_1'C_1''\doteq C_1$. Значит, $\varphi(U)B_1\doteq C_1''$. Получим, что

$$\varphi(a_i)=A_1A_2\doteq A_1B_2E_1'\doteq A_1B_2\varphi(V)C_1'; \tag{1}$$

$$\varphi(a_k)=C_1C_2\doteq C_1'C_1''C_2\doteq C_1'\varphi(U)B_1C_2 \tag{2}$$

Если $|C_1'|\neq 0$, то из леммы 2.1 и соотношения (1) следует, что $|V|=0$, но тогда $|E_1'|=|\varphi(V)C_1'|=0$, что противоречит условию $|E_1'|\neq 0$.

Пусть $|C_1'|\neq 0$. Тогда из леммы 2.2 и равенств (1) и (2) следует, что $i=k$, $|V|=|U|=0$. Значит, $W\doteq W_1a_ia_ja_kW_2$ и $a_ia_ja_k$ не содержит квадратов, но $\varphi(a_ia_ja_k)=A_1A_2B_1B_2C_1C_2$.

Из $A_2\varphi(U)B_1\doteq B_2\varphi(V)C_1$ и $|U|=|V|=0$ следует, что $A_2B_1\doteq$ $\doteq B_2C_1$, т. е. $\varphi(a_ia_ja_k)$ содержит квадрат, что невозможно по условию (i).

(II) $|E_1''|<|\varphi(V)|$.

Тогда из равенства $\varphi(U)B_1\doteq E_1''\varphi(V_1)C_1$ следует, что $V\doteq V'a_rV_1$ $\varphi(a_r)=F_1'F_1''$, $E_1''\doteq\varphi(V')F_1'$ и $\varphi(U)B_1\doteq F_1''\varphi(V_1)C_1$. Если $|F_1'|=0$, то $E_1''\doteq\varphi(V')F_1'\doteq\varphi(V')$ и $\varphi(a_i)=A_1A_2\doteq A_1B_2E_1''\doteq A_1B_2\varphi(V')$. Так как $|A_1|\neq 0$, то из леммы 2.1 следует, что $|V'|=0$, значит, $|E_1''|=$ $=|\varphi(V')|=0$, что невозможно.

Если $|F_1'|\neq 0$, то можно считать, что $|F_2''|\neq 0$.

A) $|F_1''|\geqslant|\varphi(U)|$.

Тогда из равенства $\varphi(U)B_1\doteq F_1''\varphi(V_1)C_1$ следует, что $F_1''\doteq\varphi(U)B_1'$, $B_1'B_1''\doteq B_1$ и $B_1''\doteq\varphi(V_1)C_1$.

Тогда получим, что

$$\varphi(a_r)=F_1'F_1''\doteq F_1'\varphi(U)B_1'; \tag{3}$$

$$\varphi(a_j)=B_1B_2\doteq B_1'B_1''B_2\doteq B_1'\varphi(V_1)C_1B_2; \tag{4}$$

$$\varphi(a_i)=A_1A_2\doteq A_1B_2E_1''\doteq A_1B_2\varphi(V')F_1'. \tag{5}$$

Если $|B_1'|=0$, то $F_1''\doteq\varphi(U)$, и так как $|F_1'|\neq 0$, то из леммы 2.1 и равенства (3) следует, что $|U|=0$, т. е $|F_1''|=|\varphi(U)B_1'|=0$, что невозможно.

Пусть $|B_1'|\neq 0$ и, как доказано $|F_1'|\neq 0$. Тогда из леммы 2.2 и равенств (3), (4), (5) следует, что $r=i$, $r=j$ и $|U|=|V_1|=|V'|=0$, т. е. $V\doteq V'a_rV_1\doteq a_i$. Тогда $W\doteq W_1a_ia_ia_ia_kW_2$, что невозможно по предположению.

B) $|F_1''|<|\varphi(U)|$.

Тогда из равенства $\varphi(U)B_1\doteq F_1''\varphi(V_1)C_1$ следует, что $U\doteq U'a_tU_1$, $\varphi(a_t)\doteq E_2'E_2''$, $F_1''\doteq\varphi(U')E_2'$ и $E_2''\varphi(U_1)B_1\doteq\varphi(V_1)C_1$.

Если $|E_2'|=0$, то $\varphi(a_r)=F_1'F_1''\doteq F_1'\varphi(U')E_2'$, и, так как $|F_1'|\neq 0$, то из леммы 2.1 следует, что $|U'|=0$. Тогда $|F_1''|=|\varphi(U')E_2'|=0$, что невозможно. Так как $|E_2'|\neq 0$, то можно считать, что $|E_2''|\neq 0$. Получим, что

$$\varphi(a_t)\doteq E_2'E_2''; \tag{6}$$

$$\varphi(a_r)=F_1'F_1''\doteq F_1'\varphi(U')E_2'; \tag{7}$$

$$\varphi(a_i)=A_1A_2\doteq A_1B_2E_1''\doteq A_1B_2\varphi(V')F_1'. \tag{8}$$

Так как $|F_1'|\neq 0$, $|E_2'|\neq 0$, то из леммы 2.2 и равенств (6), (7), (8) следует, что $r=i$, $t=r$ и $|U'|=|V'|=0$. Тогда $U\doteq a_iU_1$, $V\doteq a_iV_1$ и $W\doteq W_1a_ia_iU_1a_ja_iV_1a_kW_2$, что невозможно по предположению.

3) $|A_2|<|B_2|$.

Тогда из равенства $A_2\varphi(U)B_1 \doteq B_2\varphi(V)C_1$ следует, что $B_2 \doteq A_2F_1''$ и $\varphi(U)B_1 \doteq F_1''\varphi(V)C_1$, где $|F_1''|\neq 0$.]

(I) $|F_1''|>|\varphi(U)|$.

Тогда $F_1'' \doteq \varphi(U)B_1'$, $B_1'B_1'' \doteq B_1$ и $B_1'' \doteq \varphi(V)C_1$. Получим, что $\varphi(a_j) = B_1B_2 \doteq B_1'B_1''B_2 \doteq B_1'\varphi(V)C_1B_2$. С другой стороны, $\varphi(a_j) = B_1B_2 \doteq B_1A_2F_1'' \doteq B_1A_2\varphi(U)B_1'$. Тогда из леммы 2.2 следует (как нетрудно показать $|B_1'|\neq 0$), что $|V|=|U|=0$, т. е. $\varphi(a_j) = B_1B_2 \doteq B_1'B_1''A_2B_1 \doteq B_1'C_1A_2B_1'$, так как $B_1'' \doteq \varphi(V)C_1 \doteq C_1$. Получим, что $W = W_1a_ia_ja_kW_2$ и, очевидно, что $a_ia_ja_k$ не содержит квадратов, но $\varphi(a_ia_ja_k) = A_1A_2B_1B_2C_1C_2 \doteq A_1A_2B_1'C_1A_2B_1'C_1C_2$, т. е. $\varphi(a_ia_ja_k)$ содержит квадрат слова $A_2B_1'C_1$, что противоречит условию (I).

(II) $|F_1''|<|\varphi(U)|$.

Тогда из равенства $\varphi(U)B_1 \doteq F_1''\varphi(V)C_1$ следует, что $U \doteq U'a_rU_1$, $\varphi(a_r) = E_1'E_1''$, $F_1'' \doteq \varphi(U')E_1'$ и $E_1''\varphi(U_1)B_1 \doteq \varphi(V)C_1$. Если $|E_1'|=0$, то $F_1'' \doteq \varphi(U')$. Тогда $\varphi(a_j) \doteq B_1B_2 \doteq B_1A_2F_1'' \doteq B_1A_2\varphi(U')$. Так как $|B_2|\neq 0$, то $|B_1|\neq 0$ и из леммы 2.1 следует, что $|U'|=0$, тогда $|F_1''|=|\varphi(U')E_1'|=0$, что невозможно. Так как $|E_1'|\neq 0$, то можно считать, что $|E_1''|\neq 0$.

А) $|E_1''|\geqslant|\varphi(V)|$.

Тогда из равенства $E_1''\varphi(U_1)B_1 \doteq \varphi(V)C_1$ следует, что $E_1'' \doteq \varphi(V)C_1'$, $C_1'C_1'' \doteq C_1$ и $\varphi(U_1)B_1 \doteq C_1''$. Получим, что

$$\varphi(a_r) = E_1'E_1'' \doteq E_1'\varphi(V)C_1'; \tag{9}$$

$$\varphi(a_k) = C_1C_2 \doteq C_1'C_1''C_2 \doteq C_1'\varphi(U_1)B_1C_2'; \tag{10}$$

$$\varphi(a_j) = B_1B_2 \doteq B_1A_2F_1'' \doteq B_1A_2\varphi(U')E_1'. \tag{11}$$

Если $|C_1'|=0$, то $\varphi(a_r) = E_1'\varphi(V)$, и так как $|E_1'|\neq 0$, то из леммы 2.1 следует, что $|V|=0$, т. е. $|E_1''|=|\varphi(V)C_1'|=0$, что невозможно.

Пусть $|C_1'|=0$. Тогда из леммы 2.2 и равенств (9), (10), (11) следует, что $r=k$, $r=j$ и $|V|=|U_1|=|U'|=0$, т. е. $U \doteq U'a_rU_1 \doteq a_j$ и $W \doteq W_1a_ia_ja_ia_iW_2$, что невозможно по предположению.

Б) $|E_1''|<|\varphi(V)|$.

Тогда из равенства $E_1''\varphi(U_1)B_1 \doteq \varphi(V)C_1$ следует, что $V \doteq V'a_lV_1$, $\varphi(a_l) = F_2'F_2''$, $E_1'' \doteq \varphi(V')F_2'$ и $\varphi(U_1)B_1 \doteq F_2''\varphi(V_1)C_1$. Тогда

$$\varphi(a_l) = F_2'F_2''; \tag{12}$$

$$\varphi(a_r) = E_1'E_1'' \doteq E_1'\varphi(V')F_2'; \tag{13}$$

$$\varphi(a_j) = B_1B_2 \doteq B_1A_2F_1'' \doteq B_1A_2\varphi(U')E_1'. \tag{14}$$

Если $|F_2'|=0$, то $\varphi(a_r) \mathrel{\overline{\underline{\cdot}}} E_1'\varphi(V')$ и так как $|E_1'|\neq 0$, то из леммы 2.1 следует, что $|V'|=0$, т. е. $|E_1'|=|\varphi(V')F_2'|=0$, что невозможно.

Пусть $|F_2'|\neq 0$. Тогда из леммы 2.2 и равенств (12), (13), (14) следует, что $t=r$, $r=j$ и $|V'|=|U'|=0$. Тогда $U \mathrel{\overline{\underline{\cdot}}} a_jU_1$, $V \mathrel{\overline{\underline{\cdot}}} a_jV_1$ и $W=W_1a_l\,a_j\,U_1\,a_j\,a_j\,U_1'\,a_l\,W_1$, что невозможно по предположению.

Следствие 2.4. Существует алгоритм, который по любому гомоморфизму свободных конечнопорожденных полугрупп определлет, является ли данный гомоморфизм свободным от квадратов.

Ա. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

ԲԱՑԱՌԵԼԻ ԲԱՌԵՐ ԵՎ ԱԶԱՏ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐ

Տվյալ աշխատանքի առաջին պարագրաֆում տրվում են յուրաքանչյուր բառի համար ազատ հոմոմորֆիզմ գոյություն ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ Կառուցվում է բացառելի բառերի բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն չունի ազատ հոմոմորֆիզմ։ Երկրորդ պարագրաֆում տրվում են հոմոմորֆիզմը քառակուսիներից ազատ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ Այդ արդյունքները պատասխանում են [2]-ում արծարծված հարցերին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зимин А. И.* Блокирующие множества термов. Матем. сб., т. 119 (3), 363—375, 1982.
2. *Dwight R. Bean, Andrzey Ehrenfeucht, George F. McNulty.* Avoidable Patterns In String of Symbols, Pacific Journal of Mathematics' vol. 85, № 2, 261—294, 1979.
3. *Зимин А. И.* Полугрупповые многообразия с условиями конечности для конечнопорожденных полугрупп. Деп. в ВИНИТИ, № 45, 19—80 ДЕП, 1980.
4. *Мельничук И. Л.* О проблемах равенства, делимости слов в многообразиях полугрупп. XVII Всесоюзная алгебраическая конференция, часть вторая, Минск, с. 152, 1983.
5. *Thue A.* Über unendliche Zeichenreihen, Norske Vid, Seles K. Skr., 1, Mat. Nat. Kl. Christiania, 7, p. 1—22, 1906.
6. *Аршон Е.С.* Доказательство существования n-значных бесконечных асимметрических последовательностей. Матем. сб., т. 2 (44), 769—779, 1939.
7. *Евдокимов А. А.* О сильно асимметрических последовательностях, порожденных конечным числом символов. ДАН СССР, т. 179, № 6, с. 1268, 1968.
8. *Далалян А. Г.* Об исключаемости слов в четырехбуквенном алфавите, VII Всесоюзная конференция по математической логике, Тбилиси, с. 52, 1982.