А. А. БАБАДЖАНЯН

ПРОЕКЦИОННО-СВЯЗНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хорошо известен прием преобразования линейных уравнений [1] второго рода

$$x = Ax + f, \tag{1}$$

где компактный оператор $A : B \to B$, B—банахово пространство, в эквивалентное уравнение

$$x = Sx + (E - A_1)^{-1} f, \tag{2}$$

где $S = (E - A_1)^{-1} \ (A - A_1)$, а $(E - A_1)^{-1}$ существует и непрерывен. Если A_1 подобрано так, что

$$\rho(S) < 1, \tag{3}$$

где $\rho(S)$—спектральный радиус оператора S, то решение (2) можно найти методом последовательных приближений Пикара—Пуанкаре—Неймана (методом простой итерации).

Основной прием сведения (1) к (2) состоит в выборе A_1 в виде PA или AP, где P—линейный идемподентный оператор, определенный на всем B (или просто, проектор на некоторое подпространство $B_0 = R(P) \subset B$, где $R(P)$—образ оператора P).

В этом случае, как известно, отыскание $(E - PA)^{-1}$ требует решения уравнений в подпространстве B_0, действительно

$$u = (E - PA)^{-1} f \tag{4}$$

является решением

$$u = PAu + f, \tag{5}$$

откуда, расщепляя пространство $B = PB \oplus (E - P) B$, имеем равенства

$$P(u - f) = PAP(u - f) + PAf \tag{6}$$

$$u = P(u - f) + f, \tag{7}$$

где $PAf \neq 0$,

откуда решается только (6).

Аналогичным образом при $A_1 = AP$ „расщепление уравнения“

$$u = APu + f \tag{5'}$$

имеет вид

$$Pu = PAPu + Pf, \quad \text{где } Pf \neq 0 \tag{6'}$$

$$u = APu + f. \tag{7'}$$

Значит (5) или (5′) можно сначала решить в подпространстве B_0 относительно $P(u-f)$ или Pu, а затем скорректировать на всем B. Причем, если B_0 конечномерно, то решение (6) или (6′) это решение конечной системы линейных алгебраических уравнений. Очевидно, если исходная система (5) или (5′) сама является конечной системой линейных алгебраических уравнений ($A: R^n \to R^n$), то этот прием позволяет просто понижать размерность решаемой системы уравнений.

Если $A_1 = PA$, то (2), эквивалентное (1), запишется в виде

$$x = (E-PA)^{-1}(A-PA)x + (E-PA)^{-1}f. \tag{8}$$

Для $A_1 = AP$, соответственно,

$$x = (E-AP)^{-1}(A-AP)x + (E-AP)^{-1}f. \tag{9}$$

В случае близости PA (или AP) к A следует, что S имеет малую норму, т. е. выполняется (3).

Метод осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова, изученный в работах [2, 3, 4], является методом простой итерации применительно к преобразованному уравнению (8) или (9), т. е. его решения находятся последовательно, начиная с заданного $x^{(0)}$ как

$$x^{(k+1)} = (E-PA)^{-1}(A-PA)x^{(k)} + (E-PA)^{-1}f \tag{10}$$

или

$$x^{(k+1)} = (E-AP)^{-1}(A-AP)x^{(k)} + (E-AP)^{-1}f \tag{11}$$

при специальном выборе (как правило одномерном) проектора P. Если проектор P зависит от шага k, то процесс (10) или (11) называется нестационарным.

В [1] указывалось, что идея перехода от (1) к (8) или (9) „не содержит фактических рекомендаций выбора проекционного оператора P".

Дадим эти рекомендации (см. [5,6]) — выберем в (10) или (11) на каждом шаге k такой проектор P_k, чтобы имело место условие $(B): P_k A x^{(k)} = Ax^{(k)}$ для (10) или $P_k x^{(k)} = x^k$ для (11) при $k = 0, 1, \ldots$ Будем полагать, что $(E-A)^{-1}$ существует и непрерывен.

Тогда (10) и (11) принимают вид:

$$x^{(k+1)} = P_k A x^{(k+1)} + f \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{12}$$

и

$$x^{(k+1)} = AP_k x^{(k+1)} + f \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Записывая, например (11), в более простой форме

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + AP_k(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + f$$

ясно, что условие (B) для метода Ю. Д. Соколова является требованием полного использования в осредненной поправке [5] (на шаге $k+1$) информации полученной на шаге k, что соответствовало бы „максимально осредненной поправке".

Но сами (12) или (13), как отмечалось ранее, можно решить на подпространстве $B_k \subset B$ (здесь B_k подпространства шага k) и тогда для (12) имеем следующую схему решения

$$P_k(x^{(k+1)}-f)=P_kAP_k(x^{(k+1)}-f)+P_kAf, \tag{14}$$

$$x^{(k+1)}=P_k(x^{(k+1)}-f)+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{15}$$

где предпологается $P_kAf \neq 0$. Можно положить $P_k(x^{(k+1)}-f)=Z^{k+1}$.

В случае конечномерного пространства R^n известно [7], что всякий проектор может быть представлен в виде скелетного разложения двух взаимно полуобратных матриц

$$P_k=T_k^-T_k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

(Матрица T^- называется полуобратной к T, если выполнено 1. $TT^-T=T$ [7,8]). Здесь $T_k - m\times n$ – матрица, а $r(P_k)=r(T_k)=r(T_k^-)=m$, $r(P)$ — ранг матрицы P. Более того, имеет место [7] $T_kT_k^-=E$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$.

Тогда нетрудно видеть, что в (14) можно отбросить зависимые уравнения („сократить" на T_k^- обе части (14)) и привести (14), (15) к эквивалентному виду:

$$T_k(x^{(k+1)}-f)=T_kAT_k^-T_k(x^{(k+1)}-f)+T_kAf, \tag{14'}$$

$$x^{(k+1)}=T_k^-T_k(x^{(k+1)}-f)+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{15'}$$

Здесь предполагается, что $T_kAf \neq 0$.

Таким образом, уравнение (14) сужается и решается в подпространстве B_k, а затем расширяется (15′) на все R^n.

Замечание 1. Так как в (14), (15) мы находим приближения $x^{(k+1)}$ к решению (1), то $x^{(k+1)}-f$ есть приближение $Ax^{(k+1)}$ (естественно, при условии сходимости). Кроме того $P_kAx^{(k+1)}=P_k(x^{(k+1)}-f)$ $k=0,\ 1, \ldots$

Аналогичным образом эти выкладки можно провести и для (13), т. е. решить на подпространстве B_k, а затем скорректировать решение на всем B $(k=0,\ 1,\ \ldots)$:

$$P_kx^{(k+1)}=P_kAP_kx^{(k+1)}+P_kf, \tag{16}$$

$$x^{(k+1)}=AP_kx^{(k+1)}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots) \tag{17}$$

Здесь предполагается $P_kf \neq 0$.

Заметим, что на каждом шаге (16) соответствует проекционной схеме Галеркина для уравнений II рода (причем требование ортогональности проектора необязательно).

Если пространство конечномерно, то (16), (17) можно записагь в виде:

$$T_kx^{(k+1)}=T_kAT_k^-T_kx^{(k+1)}+T_kf, \tag{16'}$$

$$x^{(k+1)}=AT_k^-T_kx^{(k+1)}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{17'}$$

Здесь $T_k f \neq 0$. Можно ввести обозначение $P_k x^{(k+1)} = X^{(k+1)}$ или $_k x^{(k+)} = X^{(k+1)}$.

Замечание 2. Если для процесса (14), (15) (или для (16), (17)) для некоторого k не выполняется условие $P_k Af \neq 0$ (соответственно $P_k f \neq 0$), то всегда можно перейти к аналогичному процессу, где $Q_k Af \neq 0$ (или $Q_k f \neq 0$), например, $Q_k = E - P_k$ с выполнением условий (B).

Замечание 3. В процессах (14′), (15′) и (16′), (17′) можно T_k считать заданной на каждом шаге и проектор P_k строить (т. е. находить T_k^-) из условий (B). Отметим, что построение P_k возможно из иных соображений, например, требования (наряду с условиями (B)) принадлежности $R(P_k)$ заданных векторов $c_1^{(k)}, \ldots c_{h_k}^{(k)}$, где $c_i^{(k)} = c_i^{(k)}(x^{(0)}, \ldots, x^{(k-1)})$.

Соответственно назовем: (12) и (13)—аппроксимирующими; (14) и (16)—проектирующими; (14′) и (16′)—усеченными или проектирующими; (15), (15′) и (17), (17′)—корректирующими уравнениями.

Сами процессы (14), (15) или (16), (17)—проекционно-связными.

В зависимости от того, зависит или нет матрица T_k от шага итерации, будем различать процессы (14′), (15′) или (16′), (17′) с переменным или фиксированным направлением проектирования.

Ясно, что достаточные условия сходимости для нестационарного метода Ю. Д. Соколова, детально изученного в [2, 3, 4], могут быть перенесены и для методов, предлагаемых в настоящей работе, такая попытка будет сделана в других работах.

Для одномерного ($m=1$) процесса (14′), (15′) в случае фиксированной матрицы $T_k \equiv T$ и $T_k^- = x^{(k)}/Tx^{(k)}$, можно доказать из результатов [9] следующую теорему.

Теорема. Одномерный процесс (14′), (15′) для произвольной системы линейных алгебраических уравнений сходится к решению (1), если:

1. $\Omega(S) < 1$,
2. кратность собственного числа $\lambda(S)=1$ матрицы S равна дефекту $E-S$, где $\Omega(S) = \max\limits_{\substack{\lambda(S)\in\sigma(S)\\ \lambda(S)\neq 1}} |\lambda(S)|$, $\sigma(S)$—спектр матрицы S, имеющей вид $S = A + (1/TAf)AfT(E-A)$.

Аналогичная теорема имеет место и для (16′), (17′).

Метод итеративного агрегирования [10] (см. также [11]), в частном случае, когда матрица $T_k \geqslant 0$ имеет расщепляющийся вид (1.7) из [12], $A \geqslant 0$, $\|A\| < 1$, совпадает с процессом (16′), (17′), при этом дезагрегирующая матрица (полуобратная T_k^- вида (2.1) из [12]) строится как (5.6) из [12]. Из чего непосредственно следует выполнимость условий (B) для процесса (16′), (17′).

Одномерный алгоритм [10] рассматривался в [13], где были получены впервые условия сходимости.

В [14] дано обобщение одномерного алгоритма итеративного агрегирования—названное однопараметрическим, показано что $\|A\| < 1$ не является необходимым условием применимости метода [10] (из настоящей работы следует, что это условие не является необходимым и для многомерного алгоритма). Там же показано совпадение метода однопараметрического агрегирования с методом Ю. Д. Соколова в случае, если P_k проектор на одномерное собственное подпространство вдоль ядра собственного функционала оператора A^* соответссвующее наибольшему собственному значению.

Иные разновидности метода итеративного агрегирования [10] даны в [6, 15—19], где предлагаются новые способы построения дезагрегирующей матрицы.

Все предложенные методы итеративного агрегирования вкладываются, как было отмечено в схему (16′), (17′), методы же, предложенные автором в [6, 16], вкладываются в схему (14′), (15′), что нетрудно видеть.

В заключение заметим, что анализ сходимости предлагаемых методов (работа [5] представлена 15/IX—1980 г.) способствовал дополнительным исследованиям свойств проекторов [20, 21].

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՊՐՈՅԵԿՑԻՈՆ ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է բանախովյան տարածության մեջ երկրորդ սեռի հավասարումների սիստեմի իտերատիվ լուծման մեկ ընդհանուր մոտեցումը։ Առաջարկված է երկու իտերատիվ-պրոեկցիոն պրոցես։

Հանրագումարի է բերված նաև անվերջ չափանի դեպքը լրիվ-անընդհատ օպերատորով։

Շարադրված է մեթոդների համառոտ տեսական հիմունքը։

Մեթոդը ամփոփված է նաև ոչգծային հավասարումների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко* и др. Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Ю. Д. Соколов.* Метод осреднения функциональных поправок.—К.: «Наукова думка», 1967.
3. *Н. С. Курпель.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. К.: «Наукова думка», 1968.
4. *Н. С. Курпель, Т. С. Курченко.* Двухсторонние методы решения систем уравнений. К.: «Наукова думка», 1975.
5. *А. А. Бабаджанян.* Об одной итеративной схеме решения операторных уравнений.—ДАН АрмССР, т. 77, № 4, 1983.
6. *А. А. Бабаджанян.* Методы агрегирования.—Ереван, 1982 (Препринт/ВЦ АН АрмССР: № 82-3).
7. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул.—М.: «Наука», 1974.
8. *Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева.* Вычислительные методы линейной алгебры.—Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 54, 1975.

9. *Г. И. Марчук, Ю. А. Кузнецов.* Итерационные методы и квадратичные функционалы.—В кн.: Методы вычислительной математики. Новосибирск, Наука, 1975.

10. *Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов.* Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов.—Плановое хозяйство, 1965, № 5.

11. Итеративное агрегирование и его применение в планировании.—М.: Экономика, 1979.

12. *А. А. Бабаджанян.* Конечные методы агрегирования.—В настоящем сборнике.

13. *Б. А. Щенников.* Блочный метод решения системы линейных уравнений большой размерности.—Экономика и математические методы, вып. 6, 1965.

14. *М. А. Красносельский, А. Ю. Островский, А. В. Соболев.* О сходимости метода однопараметрического агрегирования.—Автоматика и телемеханика, № 9, 1978.

15. *Э. Б. Ершов.* Исследование метода одномерного итеративного агрегирования.—В кн.: Вторая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Тезисы докладов. М.: ЦЭНИ АН СССР, 1983.

16. *А. Н. Алавердян, А. А. Бабаджанян, Л. Х. Еремян.* Общие процессы итеративного агрегирования.—IX Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. М., 1983.

17. *W. L. Miranker and V. Ya. Pan.* Methods of aggregation.—Linear Algebra Appl. v. 25, 1980, p. 231—257.

18. *F. Chatelin and W. L. Miranker.* Acceleration by aggregation of succesive approximations methods.—Linear Algebra Appl., v. 43, 1982, p. 17—47.

19. *B. Sekerka.* Iteracni metoda pro řešeni meziodvetvovych vztahu.—Econ—Math. Obzor, v. 17, 1981, p. 241—260.

20. *А. А. Бабаджанян, А. М. Сафарян.* О псевдообращении в гильбертовом пространстве.—Ученые записки Ереванского госуниверситета, 2, 1981.

21. *А. А. Бабаджанян, А. М. Сафарян.* О некоторых свойствах косых проекторов в гильбертовом пространстве.—В настоящем сборнике.

8—689