ЧАСТЬ II

А. А. АРАКЕЛЯН

О РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ФУНКЦИЙ ВЫБОРА

Доказывается возможность реализации некоторых задач принятия решений при помощи задач, в которых множества альтернатив являются подмножествами пространств линейных преобразований банаховых пространств.

Полученные результаты применяются для реализации графодоминантных функций выбора по Нэшу.

1. Введение

В большинстве практических задач принятия решений отношение предпочтения бывает задано на множестве альтернатив произвольной природы. Однако [1, 2] представляется полезным перенесение теории выбора с абстрактного множества альтернатив „на множество, наделенное структурой вещественного пространства или, в общем случае, многообразия".

Цель данной работы состоит в получении условий, достаточных для представления задач принятия решения при помощи задач со множествами альтернатив, являющимися подмножествами пространств линейных преобразований банаховых пространств и непрерывных на сегменте [0, 1] пространств функций. В результате установления такого соответствия оказывается возможным получение условий, при помощи которых функция выбора абстрактной задачи принятия решения гомоморфно отображается на функцию выбора реализующей ее задачи.

2. Постановка задачи

Пусть общая задача принятия решения задана парой (A, ρ), где A множество альтернатив, ρ—бинарное отношение, заданное на A и выражающее отношение предпочтения между альтернативами. Обычно в теории выбора под решением (A, ρ) понимают некоторое подмножество $Y \subset A$, являющееся реализацией какого-либо принципа оптимальности. Часто при решении практических задач отношение предпочтения ρ бывает не задано и может быть выявлено согласно поведению индивидуумов, принимающих решение как на множестве A, так и на его подмножествах.

Известно [1, 2], что основным объектом теории выбора является функция выбора.

Функция $c: 2^A \to 2^A$ (или $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \subset 2^A$ называется [2] множеством предъявлений) такая, что $c(X) \subseteq X$ для любого $X \subseteq A$ называется функцией выбора.

Множество $c(X)$, $X \subseteq A$ представляет те и только те наборы альтернатив, которые выбираются из множества X. Следовательно, множество $c(X)$ есть реализация некоторого принципа оптимальности в задаче принятия решения на множестве X.

Обозначим через $S(A, \rho, \mathcal{A})$ множество функций выбора с исходной задачей принятия решений (A, ρ) и множеством предъявлений $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = 2^A$, то множество $S(A, \rho, \mathcal{A})$ обозначим через $S(A, \rho)$. Если $\{(A_k, \rho_k)\}_{k \in K}$ некоторая система задач принятия решений, то через $S((A_k, \rho_k), \mathcal{A}_k)$ обозначим множество функций выбора с исходной задачей принятия решений (A_k, ρ_k) и множеством предъявлений $\mathcal{A}_k$, $k \in K$.

Отображение φ множества альтернатив A во множество альтернатив B задач принятия решений (A, ρ) и (B, σ) соответственно называется гомоморфизмом из (A, ρ) в (B, σ), если

$$\varphi \square \varphi(\rho) = \sigma_{\varphi(A) \times \varphi(A)},$$

где $\sigma_{\varphi(A) \times \varphi(A)}$ сужение бинарного отношения σ [2].

Пусть в задаче принятия решений (A, ρ) A—топологическое пространство. Тогда отношение предпочтения ρ называется непрерывным, если из $(a, b) \in \rho$ следует существование таких окрестностей U_a и U_b точек a и b соответственно, что $U_a \times U_b \subseteq \rho$. Антисимметричное, транзитивное отношение называется отношением слабого порядка.

Будем говорить [3, 4], что задача принятия решений (A, ρ) реализуется задачей принятия решений (B, σ), если существует непрерывное гомоморфное отображение φ из (A, ρ) в (B, σ). Такое отображение φ называется представлением (A, ρ) в (B, σ).

Будем говорить, что класс задач принятия решений Z_1 реализуется классом задач принятия решений Z_2, если любая $(A, \rho) \in Z_1$ допускает такое представление φ в $(B, \sigma) \in Z_2$, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ для любых $a \neq b$, $a, b \in A$.

В [5] доказывается, что произвольная задача принятия решения с транзитивным отношением предпочтения реализуется в критериальном пространстве отношением Парето, а если отношение предпочтения антисимметричное, то соответствующая задача принятия решения реализуется в пространстве R^{2n} мажоритарным отношением M^{2n}, т. е. таким отношением, что $(a, b) \in M^{2n}$ тогда и только тогда, когда $m(a, b) > m(b, a)$, где $m(a, b) = \{i | a_i > b_i\}$.

В работе [3] показывается, что задача принятия решения с конечным числом альтернатив реализуется в критериальном пространстве некоторым порядковым бинарным отношением.

В следующем параграфе будут получены условия реализации некоторых классов задач принятия решения такими задачами принятия решения, в которых пространства альтернатив являются подмножествами линейных преобразований B-пространств, т. е. банаховых пространств и подпространств пространства $R([0, 1])$ всех непрерывных на сегменте $[0, 1]$ функций.

Задача реализации бинарных отношений тесно связана с реализацией функции выбора [2]. Будем говорить, что функция выбора $c_1 \in S(A, \rho, \boldsymbol{A})$ реализуется функцией выбора $c_2 \in S(B, \sigma, \boldsymbol{B})$, если существует отображение $\psi: A \to B$, удовлетворяющее условиям:

1) ψ непрерывный гомоморфизм из (A, ρ) в (B, σ);

2) $\psi(\boldsymbol{A}) \subseteq \boldsymbol{B}$, т. е. $\psi(X) \in \boldsymbol{B}$ для любого $X \in \boldsymbol{A}$;

3) $c_2|_{\psi(A)} = \psi \circ c_1 \circ \psi^{-1}$,

где $c_2|_{\psi(A)}$ —сужение оператора c_2 [2].

Тогда естественно встает вопрос реализации одного класса функций выбора $S((A_k, \rho_k), \boldsymbol{A}_k)$ другим классом $S((B_k, \sigma_k), \boldsymbol{B}_k)$, $k \in K$. Будем говорить, что класс функций выбора $S((A_k, \rho_k), \boldsymbol{A}_k)$ реализуется классом $S((B_k, \sigma_k), \boldsymbol{B}_k)$, если для функции выбора $c_1 \in S((A_k, \rho_k), \boldsymbol{A}_k)$ существует реализующая ее функция выбора $c_2 \in S((B_k, \sigma_k), \boldsymbol{B}_k)$.

Пусть (A, ρ) задача принятия решения, и функция выбора c определена следующим образом:

$$c(X) = X \setminus \rho(X), \quad X \subseteq A,$$

где $\rho(X) = \{y \in X \mid$ существует такой $x \in X$, что $(x, y) \in \rho\}$ называется срезом отношения ρ через множество X. Определенную [2] таким образом функцию будем называть графодоминантной функцией по отношению ρ и обозначать $c_\rho^{\text{гд}}(A, X)$. Если имеем систему задач принятия решений $\{(A_k, \rho_k)\}_{k \in K}$, то класс графодоминантных функций по отношениям $\{\rho_k\}_{k \in K}$ будем обозначать $S^{\text{гд}}(\{(A_k, \rho_k)\}_{k \in K})$.

Положим множество альтернатив A задачи выбора (A, ρ) равным декартову произведению $\prod_{i \in I} A_i$ множеств A_i, $i \in I$. Пусть $\{\rho_i\}_{i \in I}$ система отношений предпочтения, заданная на A. Определим отношение $\rho \subset A \times A$ следующим образом:

$(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существует такое $i \in I$, что $(x, y) \in \rho_i$.

Положим $x^* \| x_i = (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$.

Тогда получим [6] задачу принятия решения конфликтного типа, моделируемую общей бескоалиционной игрой

$$\Gamma = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{\rho_i\}_{i \in I} \rangle. \tag{1}$$

В [6] получены условия, которым должна удовлетворять функция выбора c для выполнения равенства

$$c(Y) = E(\{Y_i\}_{i \in I}) \text{ для всех } Y = \prod_{i \in I} Y_i, \ Y_i \subseteq A_i, \ i \in I, \tag{2}$$

где $E(\{Y_i\}_{i\in I})=\{y^*\in Y|(y^*, y^*\|y_i)\in\rho_i$ для всех $y_i\in Y_i,\ i\in I\}$ множество ситуаций равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре

$$\tilde{\Gamma}_Y=\langle I,\ \{Y_i\}_{i\in I},\ \{\rho_i\}_{i\in I}\rangle. \tag{3}$$

Функцию выбора, удовлетворяющую равенству (2) будем называть функцией выбора по Нэшу относительно игры Г (1) и обозначать $c^H(\{A_i\}_{i\in I},\ \{\rho_i\}_{i\in I},\ \{Y_i\}_{i\in I})$.

Если имеем систему бескоалиционных игр

$$\Gamma^k=\langle I^k,\ \{A_i^k\}_{i\in I^k},\ \{\rho_i^k\}_{i\in I^k}\rangle,\ k\in K, \tag{4}$$

то введем обозначение класса функций выбора по Нэшу относительно системы игр Γ^k (4), $k\in K: S^H(\{\Gamma^k\}_{k\in K},\ \{\tilde{\Gamma}_Y^k\}_{k\in K})=S^H(\{\{A_i^k\}_{i\in I^k},\ \{\rho_i^k\}_{i\in I^k},\ \{\{Y_i^k\}_{i\in I^k}\}_{k\in K})=\{c^H(\{A_i^k\}_{i\in I^k},\ \{\rho_i^k\}_{i\in I^k},\ \{Y_i^k\}_{i\in I^k})\}_{k\in K}$.

В настоящей работе будут получены условия реализации некоторых классов графодоминантных функций выбора и функций выбора по Нэшу в подмножествах пространств линейных преобразований B—пространств и пространства $R([0,1])$.

3. Реализация задач принятия решений

Пусть множество альтернатив A задачи принятия решений (A,ρ) является бикомпактным топологическим пространством. Через $R(A)$ обозначим множество всех непрерывных на A функций. Введем норму $\|f\|=\max_{x\in A}|f(x)|$. Тогда $R(A)$ станет B-пространством относительно нормы $\|f\|$. Пусть a—некоторый элемент из A. Поставим ему в соответствие функцию f_a, определенную следующим образом: $f_a(x)= =f(a)\cdot f(x)$. Пусть далее $R_f=\{f_a\}_{a\in A}$, а функция f такая, что $f(a)\neq f(b)$ для любых $a\neq b$. Положим $R_f^a=\{f_a\cdot f_{a'}\}_{a'\in A}$. Через $L(R_f)$, $L(R_f^a)$ обозначим линейные оболочки множеств R_f и R_f^a соответственно. Поставим в соответствие элементу $a\in A$ отображение $t_a: L(R_f)\to L(R_f^a)$, определенное следующим образом: $t_a(\sum_{i=1}^n\lambda_i f_{a_i})=f_a\cdot\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot f_{a_i}$.

Покажем, что t_a—линейный оператор.

Покажем, что t_a—аддитивный оператор. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in L(R_f)$. Тогда $t_a(\varphi_1+\varphi_2)=f_a\cdot(\varphi_1+\varphi_2)=f_a\cdot\varphi_1+f_a\cdot\varphi_2=t_a(\varphi_1)+t_a(\varphi_2)$.

Покажем, что t_a непрерывный оператор. Пусть φ_1, φ_2 такие функции из $L(R_f)$, что $\|\varphi_1-\varphi_2\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\|f_a\|}$. Тогда $\|t_a(\varphi_1)-t_a(\varphi_2)\|=$ $=\|t_a(\varphi_1-\varphi_2)\|=\|f_a\cdot(\varphi_1-\varphi_2)\|\leqslant\frac{\varepsilon\cdot\|f_a\|}{\|f_a\|}=\varepsilon.$

Следовательно t_a линейный оператор. Положим норму

$$\|f_a\|=f(a)\cdot\max_{x\in A}|f(x)|,\quad \|t_a(\varphi)\|=|f(a)|\cdot\max_{x\in A}|\varphi(x)|.$$

Покажем, что t_a ограниченный. В самом деле,

$$\|t_a(\varphi)\| = |f(a)| \cdot \max_{x\in A} |\varphi(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|\varphi\|.$$

Обозначим замыкание $L(R_f)$ через $\overline{L}(R_f)$. Так как $L(R_f^a)$ полнее для любого $a \in A$, оператор t_a линейный, то по теореме 2 (1.IV) [7] он допускает единственное распространение на все $\overline{L}(R_f)$ с сохранением нормы. Распространение оператора t_a на все $\overline{L}(R_f)$ также обозначим через t_a.

Положим $T_f = \{t_a\}_{a\in A}$. Определим топологию в T_f следующим образом: под ε-окрестностью $N(t_a, \varphi, \varepsilon)$ оператора t_a будем понимать множество $N(t_a, \varphi, \varepsilon) = \{t_{a'} | \|(t_a - t_{a'})\varphi\| < \varepsilon\}$, где φ—произвольный элемент из $L(R_f)$, а $\varepsilon > 0$ произвольное.

Лемма 1. Если (A, ρ) и (B, σ) такие задачи принятия решения, что A компактное топологическое пространство, ρ непрерывное отношение, B пространство Хаусдорфа, отображение $f:(A,\rho)\to(B,\sigma)$ является непрерывным взаимным гомоморфизмом, то B также является компактным пространством, а σ непрерывным отношением.

Лемма 2. Пусть (A, ρ) такая задача принятия решения, что A компактное пространство, ρ непрерывное отношение. Тогда в задаче (T_f, λ), где $\lambda = \{(t_a, t_{a'})\}_{(a, a')\in\rho}$, T_f также является компактным пространством, а λ—непрерывным отношением.

Лемма 3. R_f компактное пространство.

Следствие. $\overline{L}(R_f)$ сепарабельное B-пространство.

Теорема 1. Задача принятия решения (T_f, λ) является реализацией (A, ρ).

Пусть дана задача принятия решения (A, ρ). Тогда функция $f: A \to E^1$ называется функцией, сохраняющей порядок ρ, если $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $f(a) \geqslant f(b)$ для всех $a, b \in A$.

Лемма 4. Если (A, ρ) такая задача принятия решения, что A компактное топологическое пространство, ρ—непрерывное отношение и существует сохраняющая отношение ρ непрерывная функция $f(a)$, то существует положительная на всем A непрерывная, сохраняющая порядок функция.

Теорема 2. Если (A, ρ) такая задача принятия решения, что множество A является топологическим компактным пространством, отношение ρ является непрерывным отношением слабого порядка, то (A, ρ) реализуется задачей принятия решения со множеством альтернатив, являющимся подмножеством пространства линейных преобразований сепарабельных B-пространств.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 (A, ρ) реализуется задачей принятия решения со множеством альтернатив, являющимся подмножеством пространства линейных преобразований подпространств пространства $R([0, 1])$.

Пусть ρ_k, $k \in K$ система бинарных отношений, заданная на A_k, $k \in K$. Под композицией отношений ρ_k, $k \in K$ будем понимать отношение $\rho = \underset{k\in K}{\square} \rho_k$, заданное на $A = \prod_{k\in K} A_k$ и определенное следующим образом:

$(a, b)\in\rho$ тогда и только тогда, когда существует такое $k'\in K$. что $(a_{k'}, b_{k'})\in\rho_{k'}$ и $a_k=b_k$ для любого $k\neq k'$.

Лемма 5. Композиция ρ непрерывных отношений ρ_k, $k\in K$ также является непрерывным отношением.

Теорема 4. Если $\widetilde{A}=\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K}$ такая система задач принятия решения, что множества A_k являются связными компактными топологическими пространствами, ρ_k, $k\in K$ являются непрерывными отношениями слабого порядка, то класс $\widetilde{A}$ реализуется задачей принятия решений со множеством альтернатив, являющимся декартовым произведением подмножеств пространства линейных преобразований сепарабельных B-пространств.

Теорема 5. В условиях теоремы 4 существует реализующая класс $\{A_k, \rho_k)\}_{k\in K}$ задача принятия решений со множеством альтернатив, являющимся декартовым произведением подмножеств пространства линейных преобразований подпространств пространства $R([0, 1])$.

На множестве X^m $(m=2, 3\ldots)$, где X^m есть m-кратное произведение одинаковых сомножителей $X\subset\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, определим отношение γ^m (см. [8]) следующим образом: $((x^1, \ldots, x^m), (y^1, \ldots, y^m))\in\gamma^m$ тогда и только тогда, когда $m>1$, x^j, $y^j\in X$ для $j=1, \ldots, m$, набор $x_i^1, \ldots, x_i^{m_i}$ является перестановкой набора $y_i^1, \ldots, y_i^{m_i}$ для любого $i=1, \ldots, n$.

Теорема 6. Пусть $\{(A_i^k, \rho_i^k)\}_{i\in N, k\in K}$, где $N=\{1, \ldots, n\}$ система непрерывных задач принятия решения и (A_k, ρ_k) композиция $\{(A_i^k, \rho_i^k)\}_{i\in N, k\in K}$. Тогда, если

1) из $((a, b), (c, d))\in\gamma^2$; $(c, a)\in\rho_k$ или $(c, a)\in\varepsilon_k$, где ε_k—отношение эквивалентности на A_k следует $(d, b)\notin\rho_k$ для любого $k\in K$,

2) A_i^k компактные, связные топологические пространства для любых $k\in K$, $i\in N$,

3) отношения ρ_k являются отношениями слабого порядка для любого $k\in K$, то существует реализующая класс $\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K}$ задача принятия решения со множеством альтернатив, являющимся подмножеством множества линейных преобразований декартова произведения подпространств пространства $R([0, 1])$.

4. Реализация некоторых классов графодоминантных функций выбора

Пусть $(T_f, \geqslant)$ и $(L, \geqslant)$ задачи принятия решения со множествами альтернатив, являющимися подмножествами пространств линейных преобразований сепарабельных B-пространств $R([0, 1])$ соответственно.

Обозначим через $c_{\geqslant}^{\text{гд}}(T_f, T)$ и $c_{\geqslant}^{\text{гд}}(L, L')$ графодоминантные функции выбора относительно $(T_f, \geqslant)$ и $(L, \geqslant)$ соответственно.

Теорема 7. Если (A, ρ) такая задача принятия решения, что A компактное пространство, ρ непрерывное отношение слабого порядка, то существует функция выбора $c_{\geqslant}^{\text{гд}}(T_f, T)$, реализующая $c_{\rho}^{\text{гд}}(A, X)$.

Теорема 8. В условиях теоремы 7 существует функция выбора $c^{\text{гд}}_{\geqslant}(L, L')$, реализующая $c^{\text{гд}}_{\rho}(A, Y)$.

Теорема 9. Если $\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K}$ такая система задач принятия решения, что множества A_k являются связными компактными топологическими пространствами, ρ_k непрерывные отношения слабого порядка, $k\in K$, то существует функция выбора $c^{\text{гд}}_{\geqslant}(T_f, T)$, реализующая $S^{\text{гд}}(\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K})$.

Теорема 10. В условиях теоремы 9 существует функция выбора $c^{\text{гд}}_{\geqslant}(L, L')$, реализующая $S^{\text{гд}}(\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K})$.

5. Реализация некоторых классов функций выбора по Нэшу

Теорема 11. Если

$$\Gamma = \langle I, \{A_i\}_{i\in I}, \{\rho_i\}_{i\in I}\rangle$$

такая общая бескоалиционная игра, что пространства стратегий A_i являются связными компактными пространствами, отношения предпочтения ρ_i являются непрерывными отношениями $i\in I$, то существует функция выбора $c^{\text{н}}_{\geqslant}(\{T_i\}_{i\in I}, \{T'_i\}_{i\in I})$, реализующая $c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I}}(\{A_i\}_{i\in I}, \{A'_i\}_{i\in I})$.

Теорема 12. Если

$$\Gamma^k = \langle I^k, \{A^k_i\}_{i\in I^k}, \{\rho^k_i\}_{i\in I^k}\rangle, \ k\in K$$

такая система общих бескоалиционных игр, что пространства A^k_i являются связными компактными топологическими пространствами, ρ^k_i непрерывные отношения слабого порядка $i\in I^k$, $k\in K$, то существует функция выбора $c^{\text{н}}_{\geqslant}(T, T')$, реализующая $S^{\text{н}}(\{\Gamma^k\}_{k\in K}, \{\tilde{\Gamma}^k\}_{k\in K})$.

Теорема 13. В условиях теоремы 12 существует функция выбора $c^{\text{н}}_{\geqslant}(L, L')$, реализующая $S^{\text{н}}(\{\Gamma^k\}_{k\in K}, \{\tilde{\Gamma}^k_Y\}_{k\in K})$.

Приложение

Доказательство леммы 1. Пусть $(a', b')\in\sigma$ и $(a', b')\in W'\subset\sigma$. Тогда для любой пары $(a, b)\in \overline{\overset{-1}{f}\square f}\,(a', b')$ имеет место $(a, b)\in\rho$, так как f—взаимный гомоморфизм. Пусть W такая окрестность (a, b), что $\overline{\overset{-1}{f}\square f}\,(W') = W$. Так как ρ-непрерывное отношение порядка, то существуют такие окрестности U_a, U_b точек a и b соответственно, что $U_a\times U_b\subset\rho$. Отсюда $A\setminus U_a$, $A\setminus U_b$ замкнутые множества. Следовательно, $f(A\setminus U_a)$, $f(A\setminus U_b)$ также замкнутые. Таким образом, $U' = B\setminus f(A\setminus U_a)$, $V' = B\setminus f(A\setminus U_b)$ открытые, $U'_{a'}\subset f(U_a)$, $U'_{b'}\subset f(U_b)$. Отсюда $U'_{a'}\times U'_{b'}\subset f\square f(U_a\times U_b)\subset f\square f(W) = W'\subset\sigma$. Следовательно, отношение σ непрерывное. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Определим отображение g_f: $A \to T_f$ следующим образом: $g_f(a)=t_a$. Очевидно, что $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(t_a, t_b) \in \lambda$. Следовательно, g_f—гомоморфизм (A, ρ) на (T_f, λ). Покажем, что g_f непрерывное отображение. Для этого достаточно показать, что прообраз $g_f^{-1}(N)$ любого открытого множества $N=N(t_a, \varphi, \varepsilon)$ является открытым. Если $a' \in g_f^{-1}(N)$, то $\|(t_a-t_{a'})\varphi\|<\varepsilon$. Последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f(a)-f(a')| \cdot |f(x)| \cdot |\varphi(x)|<\varepsilon$ для любого $x \in A$, так как $\|(t_a-t_{a'})\varphi\|=\sup\limits_{x \in A}|f(a)-f(a'))f(x)\varphi(x)|=\sup\limits_{x \in A}|f(a)-f(a')|\,|f(x)|\,|\varphi(x)|=$ $=\sup\limits_{x \in A}|f_a\varphi-f_{a'}\varphi|=\sup\limits_{x \in A}|f_a-f_{a'}|\,|\varphi(x)|<\varepsilon$. Положим $\xi=\max\limits_{x \in A}|f(x)|\,|\varphi(x)|\times$ $\times|f(a)-f(a')|$. Для $\omega<\varepsilon-\xi$ и $x \in A$ определим множество

$$W_x=\left\{(x', a'')\,|\,f(a') \cdot f(x)\varphi(x)-f(a'')f(x') \cdot \varphi(x)|<\frac{\omega}{2}\right\}.$$

Покажем, что существуют такие окрестности U_x, V_x точек x, a' соответственно, что $U_x \times V_x \subseteq W_x$. Положим функцию $\gamma(x, a')=f(a')f(x)\times$ $\times\varphi(x)$. Очевидно, что $\gamma(x, a')$ непрерывна, как функция двух переменных. Тогда из определения W_x следует, что W_x является прообразом $\omega/2$—окрестности точки $\gamma(x, a')$ при отображении γ. Отсюда существуют такие окрестности U_x, V_x точек x, a' соответственно, что $U_x \times V_x \subseteq W_x$. Таким образом, получим систему окрестностей $\{U_x\}_{x \in A}$, являющуюся покрытием A. Так как A компактное пространство, то существует конечное покрытие $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Так как $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ покрытие A, то для любого $x \in A$ существует такое U_{x_i}, что $x \in U_{x_i}$. Положим $V=\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_{x_i}$, где V_{x_i}, $i=1, 2, \ldots, n$ система окрестностей a', для которой $U_{x_i} \times V_{x_i} \subseteq W_{x_i}$. Отсюда $(x, a'') \in U_{x_i} \times V \subset U_{x_i} \times$ $\times V_{x_i} \subseteq W$. Следовательно, $|f(a')f(x)\varphi(x)-f(a'')f(x) \times \varphi(x)|=$ $=|\gamma(x, a')-\gamma(x, a'')|<\omega$. Таким образом, $|f(a)-f(a'')|\,|f(x)|\,\varphi(x)| \leqslant$ $\leqslant|f(a)-f(a')|\,|f(x)|\,|\varphi(x)|+|f(a')-f(a'')|\,|f(x)|\,|\varphi(x)|<\xi+\omega+\varepsilon$. Так как из $\|(t_a-t_{a''})\varphi\|=\sup\limits_{x \in A}|f(a)-f(a'')|\,|f(x)|\,|\varphi(x)|<\varepsilon$ следует $a'' \in g_f^{-1}(N)$, то $a' \in g_f^{-1}(N)$ вместе с некоторой окрестностью W. Отсюда g_f является непрерывным отображением. Следовательно, по лемме 1 пространство T_f является компактным, а отношение λ непрерывным. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Покажем, что отображение $f(t_a)=f_a$ топологического пространства T_f на топологичиское пространство R_f непрерывно. Рассмотрим следующие два случая:

а) пусть $\|f\| \geqslant 1$, $t_{a'} \in N(t_a, f, \varepsilon)$. Тогда $\|f(t_a)-f(t_{a'})\|=\|f_a-f_{a'}\|=$ $=|f(a)-f(a')|\,\|f\| \leqslant |f(a)-f(a')|\,\|f\|^2=\|(t_a-t_{a'})f\| \leqslant \varepsilon$.

б) пусть $0<\|f\|=\delta<1$, $t_{a'} \in N(t_a, f, \varepsilon)$ где $\varepsilon=\varepsilon'/\|f\|$. Тогда $\|f(t_a)-f(t_{a'})\|=\|f_a-f_{a'}\|=|f(a)-f(a')|\|f\|=|f(a)-f(a')|\dfrac{\|f\|^2}{\|f\|}=\dfrac{\|(t_a-t_{a'})f\|}{\|f\|}<$

$<\frac{\varepsilon'\|f\|}{\|f\|}=\varepsilon'$. Отсюда $\chi(t_a)$ непрерывное отображение T_f на R_f и следовательно R_f компактное. Лемма доказана.

Доказательство следствия. Доказательство следует из того, что R_f компакт и из [9].

Доказательство теоремы 1. По лемме 2, отображение $g_f:(A,\rho)\to(T_f,\lambda)$ является непрерывным гомоморфизмом. Следовательно, (T_f,λ) является реализацией (A,ρ). Теорема доказана.

Доказательство леммы 4. Так как A компактное пространство, а функция f-непрерывная, то существует $\overline{f}=\min\limits_{a\in A} f(a)$. Если бы $\overline{f}>0$, то утверждение леммы было бы доказано. Пусть $\overline{f}\leqslant 0$. Положим $f'(a)=f(a)-(\overline{f}-1)$, $a\in A$. Тогда очевидно, что $f'(a)>0$ для любого $a\in A$. Покажем, что $f'(a)$ сохраняет порядок. Пусть $(a,b)\in\rho$. Тогда $f(a)>f(b)$. Следовательно, $f'(a)=f(a)-(f-\overline{1})>f(b)-(\overline{f}-1)=f'(b)$. Обратно, из $f'(a)>f'(b)$ следует $f(a)-(\overline{f}-1)>f(b)-(\overline{f}-1)$. Следовательно, $f(a)>f(b)$. Отсюда $(a,b)\in\rho$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 5.1 [8] и леммы 4 следует, что если множество A компактное, связное топологическое пространство, отношение ρ на A является отношением слабого порядка, то существует вещественнозначная положительная функция $f(a)$ на A, которая непрерывна в топологии множества A и сохраняет порядок ρ. Отсюда $f_a(x)=f(x)\cdot f(a)\neq f(x)\cdot f(b)=f_b(x)$ для любого такого $x\in A$, что $f(x)\neq 0$. Следовательно,

$$t_a f(x)=f(a)\cdot f(x)\neq f(b)\cdot f(x)=t_b f(x).$$

Отсюда $t_a\neq t_b$ для любых $a\neq b$, $a,b\in A$. Если $(a,b)\in\rho$, то из $f(x)>0$ для любого $x\in A$ следует

$$t_a f(x)=f(a)\cdot f(x)\geqslant f(b)\cdot f(x)=t_b f(x).$$

Отсюда $t_a\geqslant t_b$. Следовательно, если в качестве отношения λ рассмотреть отношение $\geqslant$, то по теореме 1 задача $(T_f,\geqslant)$ является реализацией (A,ρ). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. По теореме Банаха—Мазура всякое сепарабельное нормированное пространство линейно изометрично некоторому линейному подмножеству пространства $R([0,1])$. Отсюда и из теоремы 2 следует утверждение теоремы 3. Теорема доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть $(a,b)\in\rho$. Тогда существует такой $k\in K$, что $(a_k,b_k)\in\rho_k$ и $a_{k'}=b_{k'}$ для любого $k'\neq k$, $k'\in K$. Отсюда существуют такие окрестности U_{a_k}, U_{b_k} точек a_k, b_k соответственно, что $U_{a_k}\times U_{b_k}\subset\rho_k$. Следовательно, существуют такие окрестности U_a, U_b, что $U_a=(a_{k'})_{k'\neq k}\times U_{a_k}$, $U_b=(b_{k'})_{k'\neq k}\times U_{b_k}$, $U_a\times U_b\subset\rho$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Если положить $(T^k,\lambda_k)=$

$[\{t^k_a\}_{a\in A_k}, \geqslant)$, $k\in K$, то по теоремам 1, 2 класс $\{(A_k, \rho_k)\}_{k\in K}$ будет допускать реализацию в классе $\{(T_k, \lambda_k)\}_{k\in K}$. Положим (T, λ) равной композиции $\{T^k, \lambda_k)\}_{k\in K}$. Покажем, что (T, λ) допускает реализацию для любой задачи (T^k, λ_k), $k\in K$. Определим отображение $g_k : (A_k, \rho_k) \to (T, \lambda)$ следующим образом: $g_k(a) = ((t^{k'}_{a_{k'}})_{k'\in K\setminus k}, t^k_a)$, $a\in A_k$. Очевидно, что $(a, b)\in\rho_k$ тогда и только тогда, когда $g_k\square g_k((a, b)) = [((t^{k'}_{a_{k'}})_{k'\in K\setminus k}, t^k_a), ((t^{k'}_{a_{k'}})_{k'\in K\setminus k}, t^k_b))\in\lambda$. Отсюда g_k взаимный гомоморфизм (A_k, ρ_k) в (T, λ). Покажем, что g_k непрерывное отображение. Положим

$$N_1(((t^{k'}_{a_{k'}})_{k'\in K\setminus k}, t^k_a), \varepsilon, \varphi) = \{(t^k_{a'_k})_{k\in K} \mid \sup_{k\in K}\|(t^k_{a'_k} - t^k_{a_k})\varphi_k\| < \varepsilon\}.$$

Покажем, что для любого $a'_k\in g_k^{-1}(N_1)$ существует такая окрестность V, что $V\subset g_k^{-1}(N_1)$. Так как $a'_k\in g_k^{-1}(N_1)$, то $\|(t_a - t_{a'})\varphi_k\| < \varepsilon$. Дальше доказательство продолжим аналогично лемме 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Доказательство следует из теорем 4 и 3.

Доказательство теоремы 6. Доказательство следует из теоремы 5.5 [8] и теоремы 5.

Доказательство теоремы 7. Пусть $(t_a, t_b)\in c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g(Y)}$, $g : Y \to T'\subset T_f$, где $g : Y\to T'\subset T_f$, $Y\subseteq A$. Тогда $t_a \geqslant t_b$ для любой $t_b\in T'$. Отсюда $t_a f(x) = f(a)\cdot f(x) \geqslant f(b)\cdot f(x) = t_b f(x)$ для любого $x\in Y$. Следовательно, $(a, b)\in\rho$ для любого $b\in Y$. Отсюда $(t_a, a)\in g^{-1}\wedge(a, b)\in c^{\text{гд}}_{\rho}|_Y\wedge(b, t_b)\in g$, где $\wedge$ — знак конъюнкции. Таким образом, $c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g(Y)}\subseteq g\circ c^{\text{гд}}_{\rho}\circ g^{-1}$. Так как обратное включение также имеет место, то $c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g(Y)} = g\circ c^{\text{гд}}_{\rho}\circ g^{-1}$ для любого $Y\subseteq A$. Доказательство непрерывности отображения g следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 8. Доказательство следует из теорем 7, 3.

Доказательство теоремы 9. По теореме 4, существует задача принятия решения $(T, \geqslant)$, являющаяся реализацией любой задачи (A_k, ρ_k) $k\in K$. Пусть $(t_a, t_b)\in c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g_k(Y)}$, где $g_k : Y\to T'\subset T$, $Y\subseteq A_k$ определена следующим образом: $g_k(a) = ((t^{k'}_{a_{k'}})_{k'\in K\setminus k}, t^k_a)$, $a\in A_k$. Тогда $t^k_{a_k}\geqslant t^k_{b_k}$, $t^{k'}_{a_{k'}} = t^{k'}_{b_{k'}}$, $k'\neq k$, $k'\in K$ и не существует такого $t\in T'$, что $t\geqslant t_a$. Отсюда $t^k_{a_k} f(x) = f(a)\cdot f(x) \geqslant f(b)\cdot f(x) = t^k_{b_k} f(x)$ для любого $x\in Y$. Следовательно, $(a_k, b_k)\in\rho_k$ для любого $b_k\in Y$. Отсюда $(t_{a_k}, a_k)\in g_k^{-1}\wedge(a_k, b_k)\in c^{\text{гд}}_{\rho_k}|_Y\wedge(b_k, t^k_{b_k})\in g_k$. Таким образом, $c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g_k(Y)}\subseteq g_k\circ c^{\text{гд}}_{\rho_k}\circ g_k^{-1}$. Так как обратное включение также имеет место, то $c^{\text{гд}}_{\geqslant}|_{g_k(Y)} = g_k\circ c^{\text{гд}}_{\rho_k}\circ g_k^{-1}$ для любого $Y\subset A$.

Доказательство непрерывности отображения g_k проводится аналогично доказательству теоремы 4.

Доказательство теоремы 10. Доказательство следует из теорем 8 и 9.

Доказательство теоремы 11. По теореме 5.1 [8] и лемме 4 существует вещественнозначная положительная функция $f_i(a)$ на $A=\prod_{i\in I}A_i$, которая непрерывна в топологии множества A и сохраняет порядок ρ. Каждому $a_i\in A_i$ поставим в соответствие отображение $t^i_{a_i}:\{f_i(a)\}_{a\in A}\rightarrow\{f_i(a)\}_{a\in A}$, определенное следующим образом: $t^i_{a_i}f_i(a')=$ $=f_i(a')\cdot f_i(a'\|a_i)$. Положим $T_i=\{t^i_{a_i}\}_{a_i\in A_i}$, $i\in I$, $T=\prod_{i\in I}T_i$. Определим функцию $H_i((t^i_{a_i})_{i\in I})$ следующим образом $H_i((t^i_{a_i})_{i\in I})=f_i(a)$, где $a=(a_i)_{i\in I}$. Тогда $(a,b)\in\rho_i\leftrightarrow f_i(a)\geqslant f_i(b)\leftrightarrow H_i((t^i_{a_i})_{i\in I})\geqslant H_i((t^i_{b_i})_{i\in I})$.

Таким образом, получим бескоалиционную игру

$$G=\langle I,\ \{T_i\}_{i\in I},\ \{\underset{i}{\geqslant}\}_{i\in I},\ \{H_i(t)\}_{i\in I}\rangle.$$

Определим отображение $g:A\rightarrow T$ следующим образом: $g(a)=(t^i_{a_i})_{i\in I}$, $a\in A$. Тогда аналогично лемме 2 можно доказать, что g непрерывное отображение и является взаимным гомоморфизмом игры Γ (1) на игру G.

Пусть $c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I}}(\{A_i\}_{i\in I},\{A'_i\}_{i\in I})$ есть множество ситуаций равновесия по Нэшу игры $\Gamma'=\langle I,\{A'_i\}_{i\in I},\{\rho_i\}_{i\in I}\rangle$, $A'_i\subseteq A_i$, $i\in I$ и ситуация $a^*\in c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I}}(\{A_i\}_{i\in I},\{A'_i\}_{i\in I})$. Тогда

$$(a^*,\ a^*\|a_i)\in\rho_i\leftrightarrow f_i(a^*)\geqslant f_i(a^*\|a_i)\leftrightarrow H_i(t_{a^*})\geqslant H_i(t_{a^*\|a_i})$$

для любой стратегии $a_i\in A_i$, $i\in I$. Отсюда

$$c_{\geqslant}(\{T_i\}_{i\in I},\ \{T'_i\}_{i\in I})|_{g(A')}=g\circ c_{\{\rho_i\}_{i\in I}}(\{A_i\}_{i\in I},\{A'\}_{i\in I})\circ g^{-1}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 12. По теореме 11, для любого $k\in K$ существует функция выбора $c^{\text{н}}_{\geqslant}(\{T^k_i\}_{i\in I^k},\{\tilde{T}^k_i\}_{i\in I^k})$, реализующая функцию выбора $c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I^k}}(\{A^k_i\}_{i\in I^k}\ \{A'^k_i\}_{i\in I^k})$. Определим композицию игр $\Gamma^k=\langle I^k,\ \{T^k_i\}_{i\in I^k},\ \{H^k_i(t^k_{a^k})\}_{i\in I^k}\rangle$ следующим образом. Положим $I=\bigcup_{k\in K}I^k$, $T=\prod_{k\in K}T^k$, $H_i(t_a)=H^k_i(t^k_{a^k})$, $i\in I^k$, $t^k_{a^k}=pr_{I^k}t_a$, где $pr_{I^k}t_a$ есть проекция вектора t_a по множеству I^k. Тогда игра $\tilde{G}=\langle I$, $\{\{T^k_i\}_{i\in I^k}\}_{k\in K}$, $\{H_i(t_a)\}_{i\in I}\rangle$ будет проекцией игры Γ^k, $k\in K$. Определим отображение $g_k:A^k\rightarrow A$, положив $g_k(a^k)=((t_{a^{k'}})_{k'\neq k},\ t_{a^k})$, $a^k\in A^k$, $k\in K$. Тогда отображение g_k будет непрерывным взаимным гомоморфизмом Γ^k на Γ, $k\in K$. Следовательно $(t_a,\ t_a\|t_{\bar{a}^k_i})\in c^{\text{н}}_{\geqslant}(T,T')$ тогда и только тогда, когда $(t_a,a^k)\in g_k^{-1}\wedge(a^k,\ a^k\|a^k_i)\in c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I^k}}(A^k,A'^k)\wedge(a^k\|\bar{a}^k_i,\ t_{a^k\|\bar{a}^k_i})\in g_k$. Отсюда $c^{\text{н}}_{\geqslant}(T,T')_{g_h(A'^k)}=g\circ c^{\text{н}}_{\{\rho_i\}_{i\in I^k}}(A^k,\ A'^k)\circ g_k^{-1}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 13. Доказательство следует из теоремы 12 и теоремы 3.

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆՄԱՆ ԵՎ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՐԱՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է լուծումներ ընդունելու խնդիրների և ընտրության ֆունկցիաների ներկայացմանը։ Ապացուցվում է, որ եթե լուծումներ ընդունելու խնդրի ալտեռնատիվների բազմությունը կոմպակտ է, գերադասելիության հարաբերությունը անընդհատ է, ապա այն կարելի է ներկայացնել մի որ լուծումներ ընդունելու խնդրի միջոցով, որի ալտեռնատիվների բազմությունը սեպարաբել—տարածության գծային ձևափոխությունների տարածություն է։

Ստացված արդյունքները կիրառվում են լուծումներ ընդունելու խնդիրների բազմության և ընտրության ֆունկցիաների ներկայացմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Айзерман, А. В. Малишевский.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов. Препринт Ин-та проблем управления АН СССР, М., 1980.
2. *Б. А. Березовский, В. И. Борзенко, Л. М. Кемпнер.* Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М., Наука, 1981.
3. *Л. М. Кемпнер.* О реализации бинарных отношений в критериальном пространстве.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 4, с. 153—156.
4. *А. А. Аракелян.* О представлении задач принятия решений.—ДАН АрмССР, т. 49, № 3, 1979, с. 135—139.
5. *Е. В. Бауман.* Выбор на графе и в многокритериальном пространстве.—Автоматика и телемеханика, 1977, № 5, с. 114—126.
6. *Е. Б. Яновская.* Выявленное предпочтение в бескоалиционных играх. Сб. Математические методы в социальных науках, вып. 13. Ин-тут математики и кибернетики АН ЛитССР. Вильнюс, 1980, с. 73—81.
7. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ. М., Наука, 1977.
8. *П Фишберн.* Теория полезности для принятия решений. М., 1978.
9. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы. М., ИЛ, 1962.