С. С. АГАЯН, С. М. ИСПИРЯН, А. К. МАТЕВОСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОРТОНОРМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

За последние годы заметно возрос интерес к машинной обработке цифровых образов (помехоустойчивое и эффективное кодирование, распознавание образов, машинная графика и т. д.). Необходимость решения такого рода задач возникает в биологии, медицине, физике, астрономии, картографии и т. д. Разработано множество специальных эвристических алгоритмов, позволяющих некоторым образом, разрешить различные частные задачи. Универсальным математическим аппаратом, хорошо зарекомендовавшим себя во всех задачах, является теория алгоритмов быстрых ортогональных преобразований и быстрых сверток. Настоящая работа посвящена:

1. исследованию асимптотических распределений ограниченных ортонормальных преобразований,

2. построению единого подхода к алгоритмам быстрого вычисления моментов высшего порядка, имеющих вид сверток, и построению новых алгоритмов, превосходящих по скорости классические.

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть вектор-функция

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{bmatrix},$$

компоненты $x_j(t)$, $j=\overline{1, r}$ которой действительны, $t=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ и возникают из случайной схемы, является элементом набора векторных временных рядов (поток последовательных изображений), а

$$F_{a_1, \dots, a_k}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = P\{x_{a_1}(t_1, \theta) \leqslant x_1, \dots, x_{a_k}(t_k, \theta) \leqslant x_k\},$$

$$1 \leqslant k \leqslant r$$

конечномерные распределения процесса $x(t)$, где θ — случайный параметр, определяющий выборку. Пусть случайный вектор $(x_1, \dots, x_r)$ таков, что $E|x_j|^r < \infty$, $j = 1, \dots, r$, где

$$Ef(x(t, \theta)) = \int f(x)\, dF_a(x;\ t).$$

Определение 1 [1]. Совместный кумулянт (семиинвариант) r-го порядка $\mathrm{cum}(x_1, \dots, x_r)$ вектора $(x_1, \dots, x_r)$ называется выражение

$$\mathrm{cum}(x_1, \dots, x_r) = \sum (-1)^{p-1} (p-1)! \left(E\left(\prod_{j \in \nu_1} x_j\right)\right) \cdots \left(E \prod_{j \in \nu_p} x_j\right)\Big), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(\nu_1, \dots, \nu_p)$, $p = 1, \dots, r$ множества $(1, \dots, r)$.

Справку о кумулянтах можно найти в [1].

Определение 2. Взвешенным ортонормальным преобразованием r-компонентного ряда называется преобразование

$$R_x^{(N)}(\lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} h(t/N) \cdot x_a(t)\, Q(t, \lambda)\right]_{a=\overline{1, r}} = [R_a^{(N)}(\lambda)]_{a=\overline{1, r}}, \quad (2)$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant N-1$$

где $h(u)$ $-\infty < u < \infty$ сглаживающая функция ограничена, имеет ограниченную вариацию и обращается в нуль при $|u| > 1$, $Q(t, \lambda)$ — множество ортонормальных функций.

Одной из основных задач обработки цифровых образов, которая к тому же предварительна (в том смысле, что: а) может указать, какой дальнейший анализ может быть найден, б) позволяет провести сортировку преобразований и выбрать наиболее удобное для данной задачи) для нахождения статистических характеристик преобразованных изображений и дальнейшего изучения их поведения во время всего процесса обработки, является упрощение посредством ограниченного преобразования кумулянтов распределения исходного семейства образов.

В работе [1] показано, что для стационарных, малозависимых $\left(\sum_{u_1, \dots, u_{k-1} = -\infty}^{\infty} |C_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0)| < \infty\right)$ процессов (см. определение, например [1]) оптимальным в смысле упрощения вероятностных характеристик является преобразование Фурье, а именно, компоненты $R_x^{(N)}(\lambda)$ нормальны и асимптотически независимы.

Аналогичные результаты получены относительно синусного и косинусного преобразований [8].

Как отмечено в монографии [9], для практически используемых ортогональных преобразований (с успехом применяемых в цифровой обработке изображений), а именно, для преобразований Уолша—Адамара, ВКФ — Кронекера, Уолша—Пэли, Уолша, не удалось получить в конечной форме выражение для распределения $R_x^{(N)}(\lambda)$. В последнее время широкое применение получили m-стационарные процессы, для которых также имеет интерес рассматривать $R_x^{(N)}(\lambda)$. Все это естественным образом приводит к исследованию

Задача 1. Найти асимптотическое распределение кумулянтов величины $R_x^{(N)}(\lambda)$ для различных ортонормальных преобразований и для различных процессов (в частности стационарных и m-стационарных).

Отметим, что операции упрощения кумулянтов исходного класса образов, о которой указывалось выше, предшествует операция набора статистик-моментов исходного распределения, определение которых требует выполнения большого объема вычислений.

Пусть $a^{(i)} = [a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{N-1}^{(i)}]^T$, где T — знак транспонирования, есть N-мерный вектор, $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $x \underset{m}{\ominus} y$ обозначает поразрядное вычисление по модулю чисел x и y в смешанной системе счисления с основаниями $m_1, \ldots, m_n$.

Определение 3. Совместной $(m_1, \ldots, m_n)$-сверткой k-го порядка векторов $a^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$ назовем такую k-мерную матрицу $\{C_{t_1, t_2, \ldots, t_k}\}_{t_l=0}^{N-1}$, где

$$C_{t_1, t_2, \ldots, t_k} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(0)} a^{(1)}_{t_1 \underset{m}{\ominus} j} \cdots a^{(k)}_{t_k \underset{m}{\ominus} j}. \tag{1.2}$$

Замечание 1. Когда $k = 1$ (1.2) совпадает

а) при $n = 1$ с циклической сверткой [5],

б) при $n > 1$ с $(m_1, \ldots, m_n)$-сверткой [5],

в) при $m_l = 2$ с диадной сверткой.

Замечание 2. При $k \geqslant 1$ и $n = 1$ (2) представляют собой совместные циклические моменты.

Прямое вычисление совместной $(m_1, \ldots, m_n)$-свертки k-го порядка по (1.2) требует выполнения $k \cdot N^{k+1}$ операций умножения и $(N-1) \cdot N^k$ операций сложения, что становится практически невозможным в приложении моментов высших порядков.

Для частных случаев, отмеченных в замечании 1, построены быстрые алгоритмы вычислений $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-свертки. Заметим, что большинство из них базируется на алгоритме быстрого преобразования Фурье и Виленкина—Крестенсона [5].

Возникает также

Задача 2.

а) построение единого подхода к алгоритмам вычисления совместной $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-свертки k-го порядка за существенно меньшее число операций,

б) построение алгоритмов, превосходящих по скорости классические.

Настоящая работа посвящена исследованию задач 1 и 2. Найдены асимптотические распределения $R_x^{(N)}(\lambda)$ для стационарных и m-стационарных, малозависимых процессов для ограниченных функций $Q(t, \lambda)$, вычислены асимптотические распределения для некоторых наиболее известных преобразований (Уолша—Адамара, ВКФ, Уолша—Пэли, Уолша). Предложен единый подход к построению алгоритмов быстрого вычисления $(m_1, m_2, ..., m_n)$-сверток k-го порядка, общий метод построения быстрых алгоритмов циклических сверток 1-го порядка и циклических сверток 1-го порядка векторов длины 2^n, превосходящих по скорости классические алгоритмы.

В дальнейшем, для сокращения обозначений, индексы будут опускаться.

§ 2. Асимптотическое выражение для совместных кумулянтов преобразования $R(\lambda)$

В этом параграфе приводится асимптотическое выражение для совместных кумулянтов преобразования $R(\lambda)$ (2), когда

1) существует некоторое число M такое, что для любого $t \in \{0, \pm 1, ...\}$ и $\lambda \in [0, 1, ..., N-1]$ справедливо неравенство

$$|Q(t, \lambda)| \leqslant M,$$

и 2.1) процесс $X(t)$ малозависимый и стационарный или 2.2) процесс $X(t)$ малозависимый и m-стационарный.

Рассмотрим вышеуказанную задачу при условиях 1) и 2.1). С этой целью введем следующие обозначения

$$C_{a_1, ..., a_k}(t_1, ..., t_k) = \operatorname{cum}\{x_{a_1}(t_1), x_{a_2}(t_2), ..., x_{a_k}(t_k)\}, \tag{2.1}$$

где $1 \leqslant k \leqslant r$

$$h^{(N)}(t) = h_a(t/N) \tag{2.2}$$

$$H_{a_1, ..., a_k}(\lambda_1, ..., \lambda_k) = \sum_{u_j=-N+1}^{N-1} \cdots \sum C_{a_1, ..., a_k}(u_1, ..., u_{k-1}, 0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u_1, \lambda_1) ... Q(t, \lambda_k) \cdot h_{a_1}^{(N)}(t) ... h_{a_k}^{(N)}(t), \tag{2.3}$$

$$W = \Big| \sum_{t=-\infty}^{\infty} h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) ... h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) h_{a_k}^{(N)}(t) -$$

$$- \sum_{t=-\infty}^{\infty} h_{a_1}^{(N)}(t) .. h_{a_{k-1}}^{(N)}(t) \cdot h_{a_k}^{(N)}(t) \Big|, \tag{2.4}$$

$$E_N = \sum_{u_j=-N+1}^{N-1} \cdots \sum C_{a_1, ..., a_k}(u_1, ..., u_{k-1}, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u_1, \lambda_1) ... Q(t, \lambda_k) \times$$

$$\times [h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) ... h_{a_k}^{(N)}(t) - h_{a_1}^{(N)}(t) ... h_{a_k}^{(N)}(t)]. \tag{2.5}$$

$$X(A)=\begin{cases}1, & \text{если имеет место условие } A.\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{2.6}$$

Лемма 1. Пусть $h_a(u)$ $(a=1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют определению (2). Тогда существует некоторое постоянное число d такое, что

$$W \leqslant d(|u_1| + \cdots |u_{k-1}|).$$

Доказательство: Из (2.4) имеем

$$W \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left| h_1^{(N)}(t+u_1) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) \cdot h_{a_k}^{(N)}(t) - \right.$$

$$\left. - h_{a_1}^{(N)}(t) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)} \cdot h_{a_k}^{(N)}(t) \right| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_1^{(N)}(t+u_1) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) -$$

$$- h_{a_1}^{(N)}(t) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)}| \cdot |h_{a_k}^{(N)}(t)| \leqslant$$

Буквами d_i $i=1, 2, \ldots$ обозначим некоторые постоянные числа.

Так как h_{a_i}, $i=1, \ldots, k$ функции ограниченной вариации, то

$$\leqslant d_1 \sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) - h_{a_1}^{(N)}(t) \ldots h_{a_{k-1}}^{(N)}(t)| \leqslant$$

Прибавляя и отнимая выражение

$$h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) \ldots h_{a_{k-2}}^{(N)}(t+u_{k-2}) \cdot h_{a_{k-1}}^{(N)}(t),$$

получим

$$\leqslant d_2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) - h_{a_{k-1}}^{(N)}(t)| +$$

$$+ |h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) \ldots h_{a_{k-2}}^{(N)}(t+u_{k-2}) - h_{a^1}^{(N)}(t) \ldots h_{a_{k-2}}^{(N)}(t)| \leqslant$$

Далее, продолжая вышеуказанный процесс $k-3$ раза, придем к оценке

$$\leqslant d_3 \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_a^{(N)}(t+u_a) - h_a^{(N)}(t)| \leqslant$$

Но, так как $h_a^{(N)}(t)$ $(a=1, 2, \ldots, r)$ — функции ограниченной вариации (для удобства предположим, что $u_a > 0$. Другие случаи рассматриваются аналогично), то

$$\leqslant d_4 \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{u_a-1} |h_a^{(N)}(t+v+1) - h_a^{(N)}(t+v)| =$$

$$= d_4 \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{v=0}^{u_a-1} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_a^{(N)}(t+v+1) - h_a^{(N)}(t+v)| \leqslant$$

Так как $h_a(u)$ функции ограниченной вариации на $|u| \leqslant 1$, то при $v \neq 0$

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |h_a^{(N)}(t+v+1) - h_a^{(N)}(t+v)| \leqslant \operatorname*{Var}_{|u|<1}(h_a(u)),$$

$$\leqslant d_5 \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{v=0}^{u_a-1} \operatorname*{Var}_{|u|<1}(h_a(u)) \leqslant d_5 \max_a \operatorname*{Var}_{|u|<1}(h_a(u)) \cdot \sum_{a=1}^{k-1} |u_a| \leqslant$$

Обозначим через $d = d_5 \cdot \max\limits_a \operatorname*{Var}\limits_{|u|<1}(h_a(u))$, получим

$$\leqslant d(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{k-1}|).$$

Лемма 2. Пусть процесс $X(t)$ малозависимый, тогда

$$\lim_{N\to\infty} N^{-k/2} E_N = 0. \tag{2.7}$$

Доказательство: Рассмотрим два случая $k=1$ и $k \geqslant 2$)

а) при $k=1$ справедливость соотношения (2.7) вытекает из (2.5) (при $k=1$ $C_{a_1,\ldots,a_k}(u_1,\ldots,u_{k-1},0) = C_{a_1}(0)$).

б) при $k \geqslant 2$ покажем, что согласно (2.5) при условии 1) и по лемме 1, справедливо неравенство

$$|E_N| \leqslant \sum_{u_j=-N+1}^{N-1} \cdots \sum |C_{a_1,\ldots,a_k}(u_1,\ldots,u_{k-1},0)| \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} |Q(t+u_1,\lambda_1)\ldots Q(t,\lambda_k)|\,|h_{a_1}^{(N)}(t+u_1)\ldots h_{a_k}^{(N)}(t) -$$

$$- h_{a_1}^{(N)}(t)\ldots h_{a_k}^{(N)}(t)| \leqslant M^k \sum_{u_j=-N+1}^{N-1} \cdots \sum |C_{a_1,\ldots,a_k}(u_1,\ldots,u_{k-1},0)| \times$$

$$\times (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{k-1}|). \tag{2.8}$$

Далее докажем, что правая часть неравенства (2.8) есть $o(N)$.

Действительно

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u_j=-N+1}^{N-1} \cdots \sum |C_{a_1,\ldots,a_k}(u_1,\ldots,u_{k-1},0|)(|u_1| +$$

$$+ |u_2| + \cdots + |u_{k-1}|) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} N^{-1} |C_{a_1,\ldots,a_k}(u_1,\ldots,u_{k-1},0)| \times$$

$$\times \prod_{u_j=1}^{k-1} X[-(N-1) \leqslant u_j \leqslant (N-1)](|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{k-1}|) =$$

внутри знака суммирования слагаемые по N ограничены, следовательно,

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty} N^{-1} |C_{a_1,\dots,a_k}(u_1,\dots,u_{k-1},0)| \times$$

$$\times (|u_1| + |u_2| + \cdots u_{k-1}|) \prod_{u_j=1}^{k-1} X[-(N-1) \leqslant u_j \leqslant (N-1)] = 0.$$

Откуда, учитывая (2.8), заключаем, что $E_N = o(N)$.

Теорема 1. Пусть процесс $X(t)$ $t = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ стационарен и малозависим, пусть $h_a(u)$ удовлетворяют определению (2) $(a = 1, 2, \dots, r)$. Тогда справедливо следующее представление:

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \dots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} H_{a_1,\dots,a_k}(\lambda_1,\dots,\lambda_k) + \eta(N), \quad (2.9)$$

где $\eta(N) \to 0$ при $И \to \infty$.

Доказательство: Используя свойства кумулянтов [1] и (2.2) получаем

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), R_{a_2}(\lambda_2), \dots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \dots \sum_{t_k=0}^{N-1} h_{a_1}^{(N)}(t_1) \dots h_{a_k}^{(N)}(t_k) \times$$

$$\times Q(t_1,\lambda_1) \dots Q(t_k,\lambda_k) \cdot \operatorname{cum}\{X_{a_1}(t_1), \dots, X_{a_k}(t_k)\} =$$

из (2.1) и учитывая, что процесс стационарен, а именно,

$$C_{a_1\dots a_k}(t+u_1,\dots,t+u_{k-1},t) = C_{a_1\dots a_k}(u_1,\dots,u_{k-1},0)$$

получим

$$= N^{-k/2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \dots \sum_{t_k=0}^{N-1} h_{a_1}^{(N)}(t_1) \dots h_{a_k}^{(N)}(t_k) Q(t_1,\lambda_1) \dots Q(t_k,\lambda_k) \times$$

$$\times C_{a_1\dots a_k}(t_1 - t_k, \dots, t_{k-1} - t_k, 0) =$$

полагая, что $u_p = t_p - t_k$, $p = 1, 2, \dots k-1$

$$= N^{-k/2} \sum \dots \sum_{u_j=-N+1}^{N-l} C_{a_1\dots a_k}(u_1,\dots,u_{k-1},0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} h_{a_1}^{(N)}(t+u_1) \dots h_{a_{k-1}}^{(N)}(t+u_{k-1}) h_{a_k}^{(N)}(t) \cdot Q(t+u_1,\lambda_1) \dots Q(t,\lambda_k). \quad (2.10)$$

Далее, из (2.3) и (2.5) соотношение (2.10) примет вид

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \dots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} \cdot H_{a_1\dots a_k}(\lambda_1,\dots,\lambda_k) + N^{-k/2} \varepsilon_N. \quad (2.11)$$

Теперь, согласно лемме 2, равенство (2.11) можно переписать

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \dots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} H_{a_1\dots a_k}(\lambda_1,\dots,\lambda_k) + \eta(N),$$

где $\eta(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Следствие 1. При $k \geqslant 3$ $\lim_{N\to\infty} N^{-k/2} H_{a_1,\dots,a_k}(\lambda_1,\dots,\lambda_k) = 0.$

Доказательство: Так как $h(u)$-функция ограниченной вариации, $Q(t, \lambda)$ удовлетворяет условию 1) и процесс $X(t)$ малозависимый, то

$$N^{-k/2}|H_{a_1\dots a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)| \leqslant N^{-k/2}\cdot M^k\cdot L^k\cdot N\times$$

$$\times \sum_{u_j=-N+1}^{N-1}\cdots\sum |C_{a_1\dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0) \leqslant$$

здесь $|h_{a_i}|\leqslant L$, $i=1, \dots, k$. Учитывая, что

$$\sum_{u_j=-\infty}^{\infty}\cdots\sum |C_{a_1\dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0)| < \infty,$$

то

$$\leqslant N^{-k/2+1}\cdot B,$$

где

$$B = M^k\cdot L^k \sum_{u_j=-N+1}^{N-1}\cdots\sum |C_{a_1\dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0)|.$$

Следовательно,

$$N^{-k/2}H_{a_1\dots a_k}(\lambda_1, \dots . \lambda_k)\to 0 \quad \text{при } N\to\infty.$$

Следствие 2. Пусть

$$h(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant u\leqslant 1 \\ 0 & \text{для остальных } u. \end{cases}$$

Тогда преобразование (2) примет вид

$$R(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1} X(t)\cdot Q(t, \lambda), \tag{2.12}$$

а выражение для совместных кумулянтов преобразования (2.12)

$$\mathrm{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \dots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2}H_{a_1, \dots, a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

Теперь приведем асимптотическое выражение для совместных кумулянтов преобразования (2.12) при условиях 1) и 2.2).

Определение: Процесс назовем m-стационарным, если

$$\mathrm{cum}(t_1, \dots, t_k) = \mathrm{cum}(t_1 \underset{m}{\oplus} u, \dots, t_k \underset{m}{\oplus} u),$$

или же, другими словами, k-ый совместный кумулянт инвариантен относительно m сложения [5].

Введем следующее обозначение

$$H'_{a_1\dots a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_0^{N-1}\cdots\sum C_{a_1\dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0)\times$$

$$\times\sum_{t=0}^{N-1} Q(u_1\underset{m}{\oplus} t, \lambda_1)\, Q(u_2 \underset{m}{\oplus} t, \lambda_2)\cdots Q(t, \lambda_k). \tag{2.13}$$

Теорема 2. Пусть процесс $X(t)$ m-стационарен и малозависимый. Тогда для совместного кумулянта преобразования (2.12) справедливо следующее представление

$$\mathrm{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1),\ R_{a_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} H'_{a_1 \ldots a_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Доказательство: Используя свойства кумулянтов [1], согласно (2.1) и (2.12), получаем

$$\mathrm{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1),\ R_{a_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ R_{a_k}(\lambda_k)\} =$$

$$= N^{-k/2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{t_k=0}^{N-1} Q(t_1, \lambda_1) \cdots Q(t_k, \lambda_k) \cdot C_{a_1 \ldots a_k}(t_1, \ldots, t_k) =$$

Учитывая, что процесс m — стационарен,

$$= N^{-k/2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \sum_{t_k=0}^{N-1} Q(t_1, \lambda_1) \cdots Q(t_k, \lambda_k) \cdot C_{a_1 \ldots a_k}(t_1 \underset{m}{\oplus} t_k^*, \ldots, t_{k-1} \underset{m}{\oplus} t_k^*, 0) =$$

Далее введем обозначение $u_p = t_p \underset{m}{\oplus} t_k$. Учитывая, что

$$t_p = u_p \underset{m}{\ominus} t_k^* = u_p \underset{m}{\oplus} (t_k^*)^* = u_p \underset{m}{\oplus} t_k$$

и при $t_k \in [0, N-1]$, $t_k^* \in [0, N-1]$ следует, что $u_p \in [0, N-1]$. получаем

$$= N^{-k/2} \sum_{0}^{N-1} \cdots \sum \sum_{t=0}^{N-1} Q(u_1 \underset{m}{\oplus} t, \lambda_1)\, Q(u_2 \underset{m}{\oplus} t, \lambda_2) \cdots Q(u_{k-1} \underset{m}{\oplus} t, \lambda_{k-1}) \times$$

$$\times Q(t, \lambda_k) \cdot C_{a_1 \ldots a_k}(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0) =$$

$$= N^{-k/2} \sum_{0}^{N-1} \cdots \sum C_{a_1 \ldots a_k}(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} Q(u_1 \underset{m}{\oplus} t, \lambda_1)\, Q(u_2 \underset{m}{\oplus} t, \lambda_2) \cdots Q(t, \lambda_k). \tag{2.14}$$

Согласно (2.13) равенство (2.14) можно переписать

$$\mathrm{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \ldots, R_{a_k}(\lambda_k)\} = N^{-k/2} H'_{a_1 \ldots a_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Следствие 3. При $k \geqslant 3$

$$\lim_{N \to \infty} N^{-k/2} H'_{a_1 \ldots a_k}(a_1, \ldots, \lambda_k) = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

§ 3. Предельное распределение преобразования $R(\lambda)$

Настоящий параграф посвящается нахождению предельного распределения преобразования $R(\lambda)$ (2) при аналогичных условиях § 2.

Сначала рассмотрим эту задачу при условиях 1) и 2.1).

Введем следующие обозначения.

Обозначим через G множество t натуральных чисел, на которых функции $Q(t, \lambda)$ образуют ортонормальную систему,

$$C_x(0) = (C_{a_1}(0),\ C_{a_2}(0), \dots, C_{a_r}(0)),$$

$$C_{xr}(u, 0) = \{C_{a_l a_j}(u, 0)\}_{l=\overline{1,r}}^{j=\overline{1,r}},$$

$$C_a(0) = Ex_a(0), \tag{3.0}$$

где (E — знак математического ожидания).

$$C_{a_l a_j}(u, 0) = \operatorname{cov}\{x_{a_l}(u),\ x_{a_j}(0)\}.$$

$$C_x^\lambda(0) = (C_{a_1}^\lambda(0),\ C_{a_2}^\lambda(0), \dots, C_{a_r}^\lambda(0)), \tag{3.1}$$

где

$$C_a^\lambda(0) = C_a(0) \cdot \sum_{t=0}^{N-1} h_a^{(N)}(t)\, Q(t, \lambda).$$

Пусть существует предел $(N \in G)$

$$f'_{a_l a_j}(\lambda) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{-N+1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u, \lambda)\, Q(t, \lambda) \cdot h_{a_l}^{(N)}(t)\, h_{a_j}^{(N)}(t). \tag{3.2}$$

из-за ограниченности вариаций $h_a^{(N)}(t)$ из (3.2) вытекает, что существует и предел

$$f_{a_l a_j}(\lambda) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{-N+1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u, \lambda)\, Q(t, \lambda). \tag{3.3}$$

Предположим, что существует предел $(N \in G)$

$$V_{a_l a_j}(\lambda) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{t=0}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(u \underset{m}{\oplus} t, \lambda)\, Q(t, \lambda). \tag{3.4}$$

Обозначим через $N_r(A, B)$ r-мерное нормальное распределение с математическим ожиданием A и ковариационной матрицей B.

Утверждение 1 [1]. Пусть $y^{(T)} = \{y_1^{(T)}, y_2^{(T)}, \dots, y_r^{(T)}\}$ последовательность случайных векторов с r комплексными компонентами и и пусть кумулянты величины $\{y_1^{(T)}, \overline{y}_1^{(T)}, \dots, y_r^{(T)}, \overline{y}_r^{(T)}\}$ существуют и стремятся к кумулянтам величины $\{y_1, \overline{y}_1, \dots, y_r, \overline{y}_r\}$, определяющейся своими моментами. Тогда $y^{(T)}$ сходится по распределению к величине, имеющей компоненты $y_1, \dots, y_r$.

Теорема 3. Пусть процесс $X(t)$ — стационарный, малозависимый, удовлетворяет условию (3.2). Тогда преобразование $R(\lambda)$ будет иметь предельное нормальное распределение $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x^{\lambda}(0),\ f'_{xx}(\lambda)\right)$, когда N стремится к бесконечности в G.

Доказательство. Согласно теореме 1, имеем

$$\text{а)}\quad \operatorname{cum}\{R_a(\lambda)\} = ER_a(\lambda) = N^{-1/2} H_a(\lambda) + \eta(N) =$$

из (2,3) и (3.0)

$$= N^{-1/2} C_a(0) \sum_{t=0}^{N-1} h_a^{(N)}(t)\, Q(t, \lambda) + \eta(N)$$

то есть

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda)\} \to \sqrt{N} C_a(0) \sum_{t=0}^{N-1} h_a^{(N)}(t)\, Q(t, \lambda) =$$

из (3.1)

$$= \sqrt{N}\, C_a^{\lambda}(0).$$

$$\text{б)}\quad \operatorname{cum}\{R_a(\lambda),\ R_b(\lambda)\} = \operatorname{cov}\{R_a(\lambda),\ R_b(\lambda)\} = N^{-1} H_{ab}(\lambda) + \eta(N) =$$

из (2.3)

$$= N^{-1} \sum_{u=-N+1}^{N-1} C_{ab}(u, 0) \sum_{t=1}^{N-1} h_a^{(N)}(t)\, h_b^{(N)}(t)\, Q(t, \lambda)\, Q(t+u, \lambda) + \eta(N)$$

согласно (3.2)

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda),\ R_b(\lambda)\} \to N^{-1} f'_{ab}(\lambda).$$

в) Наконец, вновь сославшись на теорему 1 и следствие 1, увидим, что

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda), \ldots, R_{a_k}(\lambda)\} \to 0 \quad \text{при } k \geqslant 3,\ N \to \infty\ (N \in G).$$

Объединяя результаты а, б, в и утверждение, получим, что кумулянты рассматриваемых величин $(R_{a_1}(\lambda), \ldots, R_{a_k}(\lambda))$ сходятся с кумулянтам нормального распределения (у нормального распределения кумулянты выше порядка 2 равны нулю).

Иными словами, предельное нормальное распределение преобразования (2) будет $N_r\left(\sqrt{N}\ C_x^{\lambda}(0),\ f'_{xx}(\lambda)\right)$.

Следствие 4. Пусть процесс $X(t)$ стационарный и малозависимый удовлетворяет условию (3.3). Тогда преобразование (2.12) будет иметь предельное нормальное распределение:

1) $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ f_{xx}(0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2) $N_r(0,\ f_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности в G.

Согласно следствию 2

а) $\operatorname{cum}\{R_a(\lambda)\} = ER_a(\lambda) = N^{-1/2} H_a(\lambda) = N^{-1/2} C_a(0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t, \lambda).$

а$_1$) если $\lambda = 0$, то $\sum_{t=0}^{N-1} Q(t, \lambda) = N$, следовательно

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda)\} = \sqrt{N}\, C_a(0),$$

а$_2$) если $\lambda \neq 0$, то $\sum_{t=0}^{N-1} Q(t, \lambda) = 0$, следовательно

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda)\} = 0.$$

б) Далее

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda), R_b(\lambda)\} = \operatorname{cov}\{R_a(\lambda), R_b(\lambda) = N^{-1} H_{ab}(\lambda) =$$

из (2.3)

$$= N^{-1} \sum_{-N+1}^{N-1} C_{ab}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t, \lambda) Q(t+u, \lambda).$$

согласно (3,3)

$$\operatorname{cum}\{R_a(\lambda), R_b(\lambda)\} \to N^{-1} f_{ab}(\lambda).$$

в) Из следствия 2 и следствия 1 имеем

$$\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda), \ldots, R_{a_k}(\lambda)\} \to 0 \quad \text{при } k \geqslant 3,\ N \to \infty\ (N \in G).$$

Объединяя результаты а, б, в и вышеуказанное утверждение, получим, что предельное нормальное распределение для преобразования (2.12) будет $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0), f_{xx}(0)\right)$ при $\lambda = 0$ и $N_r(0, f_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$.

Теорема 4. Пусть для стационарного и малозависимого процесса $X(t)$ $\operatorname{cov}\{x_a(t_1), x_b(t_2)\} = 0$ при $t_1 \neq t_2$, тогда преобразования $R(\lambda_j)$ (2.12) $j = 1, \ldots, J$ асимптотически независимы и $R(\lambda)$ будет иметь предельное нормальное распределение:

1) $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0), C_{xx}(0, 0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2) $N_r(0, C_{xx}(0, 0))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности в G.

Доказательство: Сначала заметим, что условие (3.3) выполняется. Действительно,

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{-N-1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} N^{-1} C_{a_l a_j}(0, 0) \sum_{t=0}^{N-1} [Q(t, \lambda)]^2 = C_{a_l a_j}(0, 0).$$

Далее, из (3.0) получим, что предельное нормальное распределение $R(\lambda)$ будет $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0), C_{xx}(0, 0)\right)$ при $\lambda = 0$ и $N_r(0, C_{xx}(0, 0))$ при $\lambda \neq 0$.

Утверждение 2. Если ковариационная матрица нормального распределения вектора-столбцов блочно-диагональна, то компоненты-столбцы будут статистически независимы.

Независимость столбцов $R(\lambda_j)$, $j=1,\ldots,j$ вытекает из того, что при $\lambda_l \neq \lambda_j$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cum}\{R_a(\lambda_l),\ R_b(\lambda_j)\} = \lim_{N\to\infty} N^{-1} C_{a_l a_j}(0,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t,\ \lambda_l)\, Q(t,\ \lambda_j) = 0. \tag{3,5}$$

Действительно:

Если составить один столбец из столбцов $R(\lambda_j)$ $j=1,\ldots,l$, то новый случайный вектор будет иметь асимптотически нормальное распределение в G, благодаря тому, что $\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1),\ldots,R_{a_k}(\lambda_k)\} \underset{N\to\infty}{\to} 0$ для любых $k \geqslant 3$, λ_j и a_j, а из (3.5) ковариационная матрица этого вектора-столбца стремится к блочно-диагональной матрице.

Согласно утверждению 2, $R(\lambda_j)$ $j=1,\ldots,j$ будут асимптотически независимы.

Теорема 5. Пусть процесс $X(t)$, m-стационарный, малозависимый и удовлетворяет условию (3.4), тогда преобразование (2.12) будет иметь предельное нормальное распределение:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ V_{xx}(0)\right)$ при $\lambda=0$,
2. $N_r(0,\ V_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности в G.

Доказывается аналогично следствию 4.

Теорема 6. Пусть процесс $X(t)$ m — стационарный, малозависимый и $Q(t,\ \lambda) = \text{ВКФ}(t,\ \lambda)$, тогда преобразования $R(\lambda_l)$ $l=1,\ldots,I$ асимптотически независимы и соответственно имеют предельно нормальное распределение:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ \left\{\sum_{u=0}^{\infty} C_{a_l a_j}(u,\ 0)\right\}_{l=\overline{1,r}}^{j=\overline{1,r}}\right)$ при $\lambda=0$,

2. $N_r\left(0,\ \left\{\sum_{u=0}^{\infty} C_{a_l a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda)\right\}_{l=\overline{1,r}}^{j=\overline{1,r}}\right)$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности в G.

Доказательство: Сначала покажем, что условие (3.4) выполняется при $Q(t,\ \lambda) = \text{ВКФ}(t,\ \lambda)$.

Действительно,

$$V_{a_l a_j}(\lambda) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} \text{ВКФ}(u \underset{m}{\oplus} t,\ \lambda)\,\text{ВКФ}(t,\ \lambda) =$$

Используя свойство

$$\text{ВКФ}(u \oplus t,\ \lambda) = \text{ВКФ}(u,\ \lambda)\cdot\text{ВКФ}(t,\ \lambda),$$

получаем

$$= \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda) \sum_{t=0}^{N-1} [\text{ВКФ}(t,\ \lambda)]^2 =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda) = \sum_{u=0}^{\infty} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda).$$

Следовательно, имеет место теорема 4, то есть предельно нормальное распределение будет

$$N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ \left\{\sum_{u=0}^{\infty} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\right\}_{i=\overline{1,\ r}}^{j=\overline{1,\ r}}\right) \quad \text{при } \lambda = 0$$

и

$$N_r\left(0,\ \left\{\sum_{u=0}^{\infty} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda)\right\}_{i=\overline{1,\ r}}^{j=\overline{1,\ r}}\right) \quad \text{при } \lambda \neq 0.$$

Асимптотически независимость столбцов $R(\lambda_i)$ $i = 1, \ldots, I$ вытекает из того, что при $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{cum}\{R_a(\lambda_i),\ R_b(\lambda_j)\} = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u,\ 0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} \text{ВКФ}(u \underset{m}{\oplus} t,\ \lambda_i)\,\text{ВКФ}(t,\ \lambda_j) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\,\text{ВКФ}(u,\ \lambda_i) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} \text{ВКФ}(t,\ \lambda_i)\,\text{ВКФ}(t,\ \lambda_j) = 0. \tag{3.6}$$

Действительно: Столбец, образованный из столбцов $R(\lambda_i)$ $i = 1, \ldots, I$, будет иметь асимптотически нормальное распределение в G, так как $\operatorname{cum}\{R_{a_1}(\lambda_1), \ldots, R_{a_k}(\lambda_k)\} \underset{N \to \infty}{\to} 0$ для любого $k \geqslant 3$, β_λ, a_j и из (3.6) ковариационная матрица этого столбца стремится к блочнодиагональной матрице. Согласно утверждению 2, компоненты столбца $R(\lambda_i)$ $i = 1, \ldots, I$ будут асимптотически независимы.

Замечание. Теоремы 1, 2, 3, 4, 5, 6, следствие 4, которые были верны для ортонормальной системы, элементы которых не зависели от N $(Q(t,\ \lambda))$, верны и для случая, когда элементы ортонормальной системы зависят от N $(Q^{(N)}(t,\ \lambda))$, только чтобы $|Q^{(N)}(t,\ \lambda)| < L$, для любого t и λ, где L некоторое постоянное. (Вытекает из того, что в доказательствах требовалось от $Q(t,\ \lambda)$ только, чтобы $|Q(t,\ \lambda)| < M$, что и требуется от $Q^{(N)}(t,\ \lambda)$).

§ 4. Предельное распределение быстрых ортогональных преобразований Уолша—Адамара, ВКФ—Кронекера, Уолша—Пэли, Уолша

Перейдем к нахождению предельных распределений для наиболее часто используемых в обработке изображений преобразований.

Обозначим через

$$Y_{a_l a_j}(\lambda) = 2 \cdot \sum_{q=0}^{2^k-1} \frac{S_\lambda^{(q)}}{2^k} \sum_{\substack{u=2^k l+q \\ l=0,\,1,\,2,\,\ldots}}^{\infty} C_{a_l a_j}(u,\ 0), \qquad (4.11)$$

где $2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k$.

Утверждение 5. Пусть процесс $X(t)$ стационарный и малозависимый, пусть ортонормальные системы будут функции Уолша—Адамара. Тогда предельное распределение преобразования (2.12) будет:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ 2 \cdot \sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u,\ 0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2. $N_r(0,\ Y_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности.

Доказательство: Функции Уолша—Адамара имеют вид

$$Q(t,\ \lambda) = (-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n} t_l \lambda_l}, \qquad (4.12)$$

где t_l, λ_l — разрядные коэффициенты в двоичном представлении чисел t и λ.

Сначала покажем, что условие (3.3) при (4.12), $N = 2^n$ имеет место для преобразования (2.12) и что предел (3.3) равняется выражению (4.12).

С этой целью преобразуем выражение

$$\sum_{-N+1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) =$$

$$= \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_l a_j}(-u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t-u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) =$$

Так как $C_{a_l a_j}(u,\ 0) = C_{a_l a_j}(-u,\ 0)$, то

$$= \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t-u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) =$$

так как $Q(t,\ \lambda)$ определена на $[0,\ N-1]$

$$= \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) +$$

$$+\sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=u}^{N-1} Q(t-u, \lambda) Q(t, \lambda) = \sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda) + \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t, \lambda) Q(t+u, \lambda) =$$

$$= 2 \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda) + C_{a_i a_j}(0, 0). \quad (4.13)$$

Из (4.12) видно, что при

$$2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

справедливо $Q(t+2^k l, \lambda) = Q(t, \lambda)$ для любого

$$t \in [0, N-1] \text{ и } l = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, столбец λ есть чередование блока

$$\begin{matrix} Q(0, \lambda) \\ Q(1, \lambda) \\ \vdots \\ Q(2^k - 1, \lambda). \end{matrix}$$

Сумму $\sum_{u=0}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda)$ разделим на 2^k слагаемых $(0 \leqslant q \leqslant 2^k - 1)$ в каждой из которых и бегает по точкам $2^k l + q$, $l = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda) =$$

$$= \sum_{q=0}^{2^k-1} \sum_{2^k l+q}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda). \quad (4.14)$$

(элемент при $q = 0$, $l = 0$ есть $Q_{a_i a_j}(0, 0)$). Из-за периодичности $Q(t, \lambda)$ по t периодично будет и $Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda)$ периодом 2^k, если $2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k$.

Пусть сумма элементов $Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda)$ в каждом периоде (кроме, может быть, последнего неполного периода в промежутке $t \in [0, N-1-u]$) для данного λ и данного q будет $S_\lambda^{(q)}$. Пусть количество элементов в последнем неполном периоде будет $\alpha_\lambda^{(q)}$, а сумма этих элементов $-\beta_\lambda^{(q)}$.

Тогда

$$\sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda) Q(t, \lambda) = S_\lambda^{(q)} \left(\frac{N-u-\alpha_\lambda^{(q)}}{2^k} \right) + \beta_\lambda^{(q)}. \quad (4.15)$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=-N+1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) =$$

Из (4.13) и (4.14) получаем

$$= 2 \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{q=0}^{2^k-1} \sum_{2^k l+q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda) - \lim_{N\to\infty} N^{-1} C_{a_l a_j}(0,\ 0) =$$

согласно (4.15)

$$= 2 \sum_{q=0}^{2^k-1} \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{2^k l+q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \left[S_\lambda^{(q)} \left(\frac{N-u-\alpha_\lambda^{(q)}}{2^k} \right) + \beta_\lambda^{(q)} \right] =$$

$$= 2 \sum_{q=0}^{2^k-1} \frac{S_\lambda^{(q)}}{2^k} \sum_{2^k l+q}^{\infty} C_{a_l a_j}(u,\ 0) -$$

$$- 2 \sum_{q=0}^{2^k-1} \frac{S_\lambda^{(q)}}{2^k} \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{2^k l+q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \cdot u -$$

$$- 2 \sum_{q=0}^{2^k-1} \left[\beta_\lambda^{(q)} - \frac{S_\lambda^{(q)} \alpha_\lambda^{(q)}}{2^k} \right] \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{2^k l-q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) =$$

Используя ход доказательства леммы 2, получим

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{2^k l+q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) \cdot u = 0.$$

Учитывая, что процесс $X(t)$ малозависимый, имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{t=2^k l+q}^{N-1} C_{a_l a_j}(u,\ 0) = 0,$$

откуда

$$= 2 \sum_{q=0}^{2^k-1} \frac{S_\lambda^{(q)}}{2^k} \sum_{2^k l+q}^{\infty} C_{a_l a_j}(u,\ 0), \qquad l = 0,\ 1,\ \ldots \tag{4.16}$$

т. е. условие (3.3) выполняется, а предел имеет вид (4.11).

Теперь, принимая во внимание, что $Q(t,\ 0) = 1 \quad t \in [0,\ N-1]$, (4.13) и следствие 4, заключаем, что распределение преобразования (2.12) имеет вид

1. $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ 2\sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u,\ 0)\right)$ при $\lambda = 0$

2. $N_r(0,\ Y_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда $2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k$.

Утверждение доказано.

4.2. *Предельное распределение для преобразования системы ВКФ—Кронекера*

Обозначим через

$$Z_{a_i a_j}(\lambda) = 2\sum_{q=0}^{m^k} \frac{S_\lambda^{(q)}}{m^k} \sum_{\substack{u = m^k l + q \\ l = 0, 1, 2, \ldots}}^{\infty} C_{a_i a_j}(u,\ 0), \tag{4.21}$$

где $m^{k-1} \leqslant \lambda < m^k$.

Утверждение 6. Пусть процесс $X(t)$ стационарный и малозависимый, пусть ортонормальные системы будут функции ВКФ—Кронекера. Тогда предельное распределение преобразования (2.12) будет:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ 2\sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u,\ 0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2. $N_r(0,\ Z_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности.

Доказательство: Матрица системы ВКФ—Кронекера, которую обозначим H_m^n, есть n-я кронекеровская степень матрицы ДЭФ размером $m \times m$ (E_m), элементы которой являются дискретными экспоненциальными функциями,

$$\operatorname{def}(p,\ x) = \exp[i(2\pi/m)px] = \cos[(2\pi/m)px] + i\sin[(2\pi/m)px],$$

где $$p,\ x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

(если обозначить $w = \exp i(2\pi/m)$, тогда $\operatorname{def}(p,\ x) = w^{px}$), то есть

$$H_{m^n} = E_m^{[n]}.$$

В нашем случае

$$Q(t,\ \lambda) = H_{m^n}(t,\ \lambda).$$

При $m^{k-1} \leqslant \lambda < m^k$, так как $w^0 = 1$, элементы в таблице λ повторяются через m^k шагов (период m^k), следовательно, и у элементов $Q(t+u,\ \lambda)\,Q(t,\ \lambda)$ период повторения m^k. Такими же рассуждениями, что и в следствии 6, получим, что условие (3.3) выполняется и асимптотическая ковариационная матрица будет (4.21).

Принимая во внимание, что $Q(t,\ 0) = 1$ $t \in [0,\ N-1]$ (4.13) и следствие 4, заключаем, что предельное распределение преобразования (2.12) будет:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\,C_x(0),\ 2\sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u,\ 0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2. $N_r(0,\ Z_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда $m^{k-1} \leqslant \lambda < m^k$.

Обозначим через

$$\Pi_{a_i a_j}(\lambda) = 2\,[2^{-k}+1] \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_i a_j}(u,\ 0)\, Q(u,\ \lambda), \tag{4.31}$$

где

$$2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k.$$

Под $Q(t,\ \lambda)$ в дальнейшем будем подразумевать $Q^{(N)}(t,\ \lambda)$.

Утверждение 7. Пусть процесс $X(t)$ стационарный и маловависимый, пусть ортонормальные системы будут функции Уолша—Пэли. Тогда предельное распределение преобразования (2.12) будет:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ 2 \cdot \sum\limits_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u,\ 0)\right)$ при $\lambda = 0$,

2. $N_r(0,\ \Pi_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности.

Доказательство: Система Уолша—Пэли имеет вид

$$\mathrm{Pal}(t,\ \lambda) = (-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n} t_{n+1-l}\lambda_l}, \tag{4.32}$$

где t_l, λ_l — разрядные коэффициенты в двоичном разложении чисел t и λ. Сначала покажем, имея в виду замечание § 3, что (3.3) выполняется для преобразования (2.12) при (4.32), $N = 2^n$ и что предел (3.3) принимает вид (4.31).

Действительно, пусть $2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k$, тогда промежутки в столбце λ, где сохраняется знак $Q(t,\ \lambda)$, есть „отрезок" длиной 2^{n-k}, так как разрядные коэффициенты в двоичном представлении λ больше k, нули. Напишем сумму $\sum\limits_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u,\ \lambda)\, Q(t,\ \lambda)$ иначе, исходя из того, что знак $Q(t,\ \lambda)$ сохраняется на промежутках длиной 2^{n-k}, считая $t = 0$.

С этой целью введем следующие обозначения:

$[A]$ — есть целая часть от A.

Обозначим через γ_1

$$\gamma_1 = u - \left[\frac{u}{2^{n-k}}\right] \cdot 2^{n-k} \underset{N\to\infty}{\to} u, \tag{4.33}$$

а через γ_2,

$$\gamma_2 = 2^{n-k} - \gamma_1 \underset{N\to\infty}{\to} \frac{N}{2^k} - u \tag{4.34}$$

количество промежутков длиной 2^{n-k}, где $Q(t,\ \lambda)$ сохраняет знак в $t \in [0,\ N-1-u]$, через γ_3

$$\gamma_3 = \left[\frac{2^n - u + 1}{2^{n-k}}\right], \quad \text{причем} \quad \gamma_3 \to \frac{1}{2^{-k}} = 2^k,$$

при $N \to \infty$ (4.35)

Из (4.33), (4.34), (4.35) можно написать

$$\sum_{t=0}^{N-1-u} Q(t+u, \lambda)\, Q(t, \lambda) = Q(u, \lambda)\, Q(0, \lambda) \cdot \gamma_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda)\, Q(2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda) \cdot \gamma_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k} i, \lambda)\, Q(2^{n-k} i, \lambda) \cdot \gamma_2. \tag{4.36}$$

Подставляя (4.36) в (4.13), покажем, что существует предел (3.3)

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=-N+1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u, \lambda)\, Q(t, \lambda) =$$

$$= 2 \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \Big[Q(u, \lambda)\gamma_2 + \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda) \times$$

$$\times Q(2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda) \cdot \gamma_1 + \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k} i, \lambda)\, Q(2^{n-k} i, \lambda)\, \gamma_2 \Big]. \tag{4.37}$$

Рассмотрим отдельные слагаемые

а) $$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \cdot Q(u, \lambda)\gamma_2 =$$

из (4.34)

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_i a_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda) - \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda)\gamma_1 =$$

по (4.33)

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_i a_j}(u, 0) \cdot Q(u, \lambda). \tag{4.38}$$

б) $$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda) \times$$

$$\times Q(2^{n-k}(i-1) + \gamma_2, \lambda) \cdot \gamma_1 =$$

согласно (4.33) и (4.35),

$$= 0 \tag{4.39}$$

с) $$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_i a_j}(u, 0) \sum_{i=1}^{\gamma_3} Q(u + 2^{n-k} i, \lambda)\, Q(2^{n-k} i, \lambda)\, \gamma_2 =$$

из (4.34), (4.33) и (4.35) имеем

$$= \frac{1}{2^k} \lim_{N\to\infty} \sum_{u=l}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{l=1}^{T_s} Q(u + 2^{n-k} i, \lambda)\, Q(2^{n-k} i, \lambda) =$$

n можно брать настолько большое для данного u, что если $2^{n-k} i$ имеет разложение $(q_1, \dots, q_n)$, а u разложение $(p_1, \dots, p_n)$, то $u+2^{n-k} i$ будет иметь разложение $(p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$. Тогда

$$Q(u + 2^{n-k} i, \lambda) = (-1)^{\sum_{l=1}^{n} (p_{n+1-i} + q_{n+1-i}) \lambda^i} = Q(2^{n-k} i, \lambda)\, Q(u, \lambda),$$

следовательно

$$= \frac{1}{2^k} \lim_{N\to\infty} \sum_{u=1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{l=1}^{T_s} Q(u, \lambda) =$$

из (4.35)

$$= \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_l a_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda) \tag{4.40}$$

Согласно (4.38), (4.39), (4.30), предел (4.37) примет вид

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{u=-N+1}^{N-1} C_{a_l a_j}(u, 0) \sum_{t=0}^{N-1} Q(t+u, \lambda)\, Q(t, \lambda) =$$

$$= 2\,[2^{-k} + 1] \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_l o_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda). \tag{4.0}$$

то есть условие (3.3) выполняется и (4.0) имеет вид (4.31). Принимая во внимание, что $Q(t, 0) = 1$ $t \in [0, N-1]$, (4.13) и следствию 4, заключаем, что предельное распределение преобразования (2.12) будет

1. $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ 2 \sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u, 0)\right)$ при $\lambda = 0$,
2. $N_r(0, \Pi_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда $2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k$.

4.4. *Предельное распределение преобразования системы Уолша*

Обозначим через

$$W_{a_l a_j}(\lambda) = 2\,[2^{-k-1} + 1] \sum_{u=1}^{\infty} C_{a_l a_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda), \tag{4,41}$$

где

$$2^{k-1} \leqslant \lambda < 2^k.$$

Утверждение 8. Пусть процесс $X(t)$ стационарный и малозависимый и пусть ортонормальные системы функции Уолша. Тогда предельное распределение преобразования (2.12) будет:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ 2 \sum_{u=1}^{\infty} C_{xx}(u, 0)\right)$ при $\lambda = 0$,
2. $N_r(0, W_{xx}(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности.

Доказательство: Система Уолша имеет вид

$$\mathrm{Wal}(t, \lambda) = (-1)^{\sum_{l=1}^{n}((t_{n-l} + t_{n+1-l}))_2 \lambda_l}, \quad t_0 = 0$$

где t_l, λ_l — разрядные коэффициенты в двоичном представлении чисел t и λ.

Так как λ_k умножается на $((t_{n-k} + t_{n+1-k}))_2$, то промежуток, где $Q(t, \lambda)$ сохраняет знак, будет 2^{n-k-1}.

Аналогичными рассуждениями, как в 4.3, получим, что условие (3.3) выполняется и предел (3.3) имеет вид (4.41). Принимая во внимание, что $Q(t; 0) = 1$ $t \in [0, N-1]$ $(N = 2^n)$; (4.13) и следствие 4, заключаем, что предельное распределение будет искомое.

В заключение отметим, что при $m = 2$, то есть процесс $X(t)$ диадно-стационарен, для всех $Q(t, \lambda)$ Уолша-подобных ортонормальных систем (Уолш—Адамар, Уолш—Пэли, Уолш) справедливо утверждение 9, доказательство которого опирается на соотношение

$$Q(t \underset{2}{\oplus} u, \lambda) = Q(t, \lambda) \cdot Q(u, \lambda)$$

и на ход доказательства теоремы 6.

Утверждение 9. Пусть процесс $X(t)$ диадно-стационарен, малозависим, пусть ортонормальные системы $Q(t, \lambda)$ Уолша-подобные. Тогда преобразования $R(\lambda_i)$ (2.12) $i = 1, \ldots, I$ асимптотически независимы и имеют предельно нормальное распределение:

1. $N_r\left(\sqrt{N}\, C_x(0),\ 2\sum_{u=0}^{\infty} C_{xx}(u, 0)\right)$ при $\lambda = 0$

2. $N_r(0, S_{xx}(\lambda))$ при $\lambda \neq 0$, когда N стремится к бесконечности в G, где

$$S_{a_i a_j}(\lambda) = \sum_{u=0}^{\infty} C_{a_i a_j}(u, 0)\, Q(u, \lambda).$$

§ 5. Быстрые алгоритмы вычисления совместных $(m_1, \ldots, m_n)$-сверток k-го порядка

5.1. Перейдем к исследованию задачи 2—построению быстрых алгоритмов вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-сверток k-го порядка (см. § 1); Пусть $N = p_0^{\alpha_0}, \ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_0, \ldots, p_s$ — взаимно простые числа, а $M(N)$ и $S(N)$ есть характеристики (число операций умножения и сложения) алгоритма быстрого преобразования Виленкина—Крестенсона (ПВК) в базисе с основаниями $m_2, \ldots, m_n$ [5]:

$$M(N),\ S(N) \leqslant N \cdot \sum_{l=0}^{s} \alpha_l \cdot p_l \tag{5.1}$$

Обозначим через $F(a)=[F(a)_0, \dots, F(a)_{N-1}]^T$ ПВК-вектора $a = [a_0, \dots, a_{N-1}]^T$ в соответствующем $(m_1, \dots, m_n)$-базисе [5]:

$$F(a)_\lambda = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} a(t) \cdot \overline{\mathrm{Pal}}(\lambda, t), \quad \lambda = 0, 1, \dots, N-1, \qquad (5.2)$$

где $\mathrm{Pal}(\lambda, t) = \exp\left(i2\pi \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n+1-j} t_j}{m_j}\right)$, λ_j и t_j — координаты чисел λ и t в смешанной системе с основаниями $m_1, \dots, m_n$ [5]. Обратное преобразование ВК имеет вид:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=0}^{N-1} F(a)_\lambda \mathrm{Pal}(\lambda, t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \qquad (5.3)$$

Определение 4. Преобразованием ВК k-го порядка называется преобразование k-мерной матрицы

$$S_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = \sum_{t_1, \dots, t_k = 0}^{N-1} C_{t_1, \dots, t_n} \prod_{j=1}^{k} \overline{\mathrm{Pal}}(\lambda_j, t_j). \qquad (5.4)$$

Теорема 7. k-мерное преобразование ВК совместной $(m_1, \dots, m_n)$-свертки k-го порядка векторов $a^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$ и их одномерные преобразования ВК связаны соотношением:

$$S_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = F(a^{(1)})_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot F(a^{(k)})_{\lambda_k} \cdot F(a^{(0)})_{\lambda_1 \underset{m}{\oplus} \dots \underset{m}{\oplus} \lambda_k} \qquad (5.5)$$

Для доказательства этого соотношения достаточно подставить в выражения для $C_{t_1, \dots, t_k}$ вместо $a_j^{(i)}$ их значения, выраженные через спектры $F(a^{(i)})_\lambda$ посредством обратных ПВК, и воспользоваться групповыми свойствами функций Виленкина—Крестенсона [5].

Соотношение (5.5) задает единый алгоритм быстрого вычисления $(m_1, \dots, m_n)$-свертки k-го порядка, основанный на быстрых алгоритмах одномерного и k-мерного ПВК [5].

Следствие 5. Алгоритм (5.5) вычисления совместной $(m_1 \dots, m_n)$-свертки k-го порядка требует выполнения $(k+1+k \cdot N^{k-1}) \cdot M(N) + k \cdot N^k$ операций умножения и $(k+1+k \cdot N^{k-1}) \cdot S(N)$ операций сложения.

В силу оценок (5.1) по сравнению с прямым вычислением достигается быстродействие в $N/\log N$ раз.

При $k = 1$ алгоритм (5.5) совпадает с классическими алгоритмами вычисления сверток типов а, б, в, отмеченных в замечании 1.

5.2. *Алгоритмы быстрого вычисления циклических сверток векторов размерности* p^m

Перейдем к построению быстрых алгоритмов вычисления циклических сверток, отмеченных в замечании 1, а.

Пусть вектор $C=[c_0, \dots, c_{N-1}]^T$ является результатом циклической свертки векторов $X=[x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ и $Y=[y_0, \dots, y_{N-1}]^T$:

$$c_i = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot y_{i-n}, \qquad i=0,\ 1, \dots, N-1, \tag{5.6}$$

или

$$C = X * Y,$$

где

$$N = p^m.$$

Для простоты приведем метод построения алгоритма для случая $p=3$. Произведя разбиение в (5.6) по i и n, перепишем компоненты вектора c следующим образом:

$$c_{3i+j} = \sum_{n=0}^{3^{m-1}-1} (x_{3n}\cdot y_{3i+j-3n} + x_{3n+1}\cdot y_{3i+j-3n-1} + x_{3n+2}\cdot y_{3i+j-3n-2}),$$

$$i=0,\ 1, \dots, 3^{m-1}-1, \quad j=0,\ 1,\ 2,$$

или

$$c_{3i} = x_{3n} * y_{3n} + x_{3n+1} * y_{3n+1} + x_{3n+2} * y_{3n+2},$$

$$c_{3i+1} = x_{3n} * y_{3n-1} + x_{3n+1} * y_{3n} + x_{3n+2} * y_{3n+1},$$

$$c_{3i+2} = x_{3n} * y_{3n-2} + x_{3n+1} * y_{3n-1} + x_{3n+2} * y_{3n}.$$

На основе полученных рекуррентных формул приведем описание алгоритма:

ш а г 1. вычислить вектора

$$d_{3i} = x_{3n} * y_{3n} + x_{3n+1} * y_{3n+1} + x_{3n+2} * y_{3n+2},$$

$$d_{3i+1} = x_{3n} * y_{3n+2} + x_{3n+1} * y_{3n} + x_{3n+2} * y_{3n+1},$$

$$d_{3i+2} = x_{3n} * y_{3n+1} + x_{3n+1} * y_{3n+2} + x_{3n+2} * y_{3n},$$

по некоторому алгоритму вычисления свертки векторов размерности 3,

ш а г 2. вычислить вектора

$$a_1 = x_{3n} * (y_{3n-1} - y_{3n+2}),$$

$$a_2 = x_{3n} * (y_{3n-2} - y_{3n+1}) + x_{3n+1} * (y_{3n-1} - y_{3n+2}),$$

ш а г 3. найти искомый вектор

$$c_{3i} = d_{3i}, \qquad c_{3i+1} = d_{3i+1} + a_1, \qquad c_{3i+2} = d_{3i+2} + a_2.$$

Нетрудно обобщить этот алгоритм на случай любого p, тем самым доказать следующий факт.

Теорема 8. Пусть построен алгоритм вычисления циклической свертки векторов размерности p с характеристиками $M(p)$ и $S(p)$, а $A(p)$ и $B_n(p)$ обозначают константы

$$A(p)=\frac{S(p)+p^2-p}{M(p)+(p^2-3p)/2}, \qquad B_n(p)=\left(M(p)+\frac{p^2-p}{2}\right)^n.$$

Тогда может быть построен алгоритм вычисления циклической свертки векторов размерности p^n с характеристиками

$$M(p^n)=M(p)\cdot B_{n-1}(p),$$

$$S(p^n)=(S(p)+A(p)\cdot p)\cdot B_{n-1}(p)-A(p)\cdot p^n.$$

В частном случае, для $p=3$ и начального алгоритма [6] с характеристиками $M(3)=4$ и $S(3)=21$ построенный алгоритм будет иметь характеристики $M(3^n)=4\cdot 7^{n-1}$ и $S(3^n)=42\cdot 7^{n-1}-7\cdot 3^n$, В табл. 1 для сравнения приведены характеристики классического алгоритма, основанного на быстром преобразовании Фурье [7].

N	N^2	$M(N)$	$M_F(N)$	$M(N)/M_F(N)$
27	729	196	2.484	0,079
81	6.561	1.372	10.044	0,137
243	59.049	9.604	37.808	0,254
729	531.441	67.228	137.052	9,491
2.187	4.782.969	470.596	481.040	0,978
6.561	43.046.721	3.294.172	1.653.372	1,992

5.3. Матричное представление быстрых алгоритмов вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-сверток k-го порядка

Анализ известных и приведенных алгоритмов вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-сверток k-го порядка показывает, что они имеют следующую структуру:

этап 1. переход в «частотную» область-вычисление векторов и матрицы

$$A^{(0)}_{p_1,\ldots,p_k}=\sum_j Z^{(0)}_{p_1,\ldots,p_k,j}\cdot a^{(0)}_j,$$

$$A^{(i)}_{p_i}=\sum_j Z^{(i)}_{p_i,j}\cdot a^{(i)}_j, \quad i=1,2,\ldots,k,$$

этап 2. поэлементное умножение «спектров»

$$C_{p_1,\ldots,p_k}=A^{(0)}_{p_1,\ldots,p_k}\cdot A^{(1)}_{p_1}\cdot\ldots\cdot A^{(k)}_{p_k}, \tag{5.8}$$

этап 3. обратный переход во временную область — вычисление свертки

$$C_{t_1, \ldots, t_k} = \sum_p W_{t_1, \ldots, t_k, p_1, \ldots, p_k} C_{p_1, \ldots, p_k}, \tag{5.9}$$

где $Z^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — $(N_1 \times N)$ матрицы, $Z^{(0)}$ — $(N_1, N_1, \ldots, N_1, N)$ — матрицы k-го порядка, а W — $(N, N, \ldots, N_1)$ — матрица $2k$-го порядка.

Теорема 9. Для того, чтобы матрицы $Z^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и W при подстановке (5.7)—(5.9) приводили к алгоритму вычисления $(m, \ldots, m_n)$-свертки k-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_p Z^{(0)}_{p_1, \ldots, p_k, j_0} \cdot Z^{(1)}_{p_1, j_1} \cdot \ldots \cdot Z^{(k)}_{p_k, j_k} \cdot W_{t_1, \ldots, t_k, \ldots, p_k} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } t_1 \underset{m}{\ominus} j_0 = j_1, \ldots, t_k \underset{m}{\ominus} j_0 = j_k, \\ 0. & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5.10}$$

Необходимость. По условию теоремы

$$\sum_j a^{(0)}_j \Big[a^{(1)}_{t_1 \underset{m}{\ominus} j} \cdot \ldots \cdot a^{(k)}_{t_k \underset{m}{\ominus} j} - \sum_{j_1, \ldots, j_k} a^{(1)}_{j_1} \times \ldots \times a^{(k)}_{j_k} \times$$

$$\times \Big\{ \sum_p Z^{(0)}_{p_1, \ldots, p_k, j} \cdot Z^{(1)}_{p_1, j_1} \cdot \ldots \cdot Z^{(k)}_{p_k, j_k} \cdot W_{t_1, \ldots, t_k, p_1, \ldots, p_k} \Big\} \Big] = 0.$$

Поскольку тождество должно выполняться для каждых векторов $a^{(i)}$, $i = 0, \ldots, k$, то выражение в фигурных скобках должно удовлетворять равенству (5.10).

Достаточность. Показывается обратными рассуждениями.

Утверждение 10. Пусть матрицы Z_1, Z_2 и Z_3 с элементами $Z^{(1)}_{ij}$, $Z^{(2)}_{ij}$, $Z^{(3)}_{ij}$ приводят к алгоритму вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-свертки 1-го порядка, тогда матрицы U, V и W с элементами

$$U_{p_1, \ldots, p_k, j} = Z^{(1)}_{p_1, j} \cdot \ldots \cdot Z^{(1)}_{p_k, j},$$

$$V_{i, j} = Z^{(2)}_{ij} \tag{5.11}$$

$$W_{t_1, \ldots, t_k, p_1, \ldots, p_k} = Z^{(3)}_{t_1, p_1} \ldots Z^{(3)}_{t_k, p_k}.$$

приводят к алгоритму вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-свертки k-го порядка.

Доказательство проводится непосредственной проверкой выполнения условия (5.10) для матриц U, V и W.

Соотношения (5.11) раскрывают связь между алгоритмами вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-сверток различных порядков.

Непосредственной проверкой выполнения условия (5.10) доказывается и следующая теорема.

Теорема 10. Пусть U_k и V_k — матрицы порядка $p_k \times m_k$, а W_k — порядка $m_k \times p_k$, которые приводят к алгоритмам вычисления циклических сверток векторов размерности m_k, тогда матрицы

$$U = \left\{ \prod_{l=n-1}^{1} I_{p_{n-l+1}\cdots p_n} \otimes U_{m_{n-l}} \otimes I_{m_1\cdots m_{n-l-1}} \right\} \cdot \left\{ U_{m_n} \otimes I_{m_1\cdots m_{n-1}} \right\}, \tag{5.12}$$

$$V = \left\{ \prod_{l=n-1}^{1} I_{p_{n-l+1}\cdots p_n} \otimes V_{m_{n-l}} \otimes I_{m_1\cdots m_{n-l-1}} \right\} \cdot \left\{ V_{m_n} \otimes I_{m_1\cdots m_{n-1}} \right\}$$

порядка $p_n \cdot \ldots \cdot p_1 \times m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$

$$W = \left\{ W_{m_n} \otimes I_{m \ldots m_{n-1}} \right\} \cdot \left\{ \prod_{l=1}^{n-1} I_{p_{n-l+1}\cdots p_n} \otimes W_{m_{n-l}} \otimes I_{m_1\cdots m_{n-l-1}} \right\},$$

порядка $m_1 \ldots m_n \times p_1 \ldots p_n$ приводят к алгоритму вычисления $(m_1, \ldots, m_n)$-свертки I-порядка.

Если в качестве матриц U_l, V_l, W_l выбрать матрицы Фурье порядка m_l, то разложение (5.12) переходит в быстрый алгоритм ВК, на основе которого вычисляется $(m_1, \ldots, m_n)$-свертка I-порядка в классическом случае [5].

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ, Ս. Մ. ԽՍՊԻՐՅԱՆ, Ա. Կ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՕՐԹՈՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԲԱՇԽՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԱՐԱԳ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԸ

Աշխատանքում գտնված են ստացիոնար, նաև m-ստացիոնար, էլեմենտների քիչ կախվածությամբ պրոցեսների օրթոգոնալ ձևափոխությունների ասիմպտոտիկ բաշխումները, երբ օրթոգոնալ ֆունկցիաները սահմանափակ են։ Որոշված են առավել հայտնի ձևափոխությունների (Ուոլշ-Հադամար, ՎԿՖ, Ուոլշ-Պելի, Ուոլշ) ասիմպտոտիկ բաշխումները։ Առաջադրված է փաթեթների արագ հաշվման ալգորիթմների միասնական մոտեցում, ցիկլիկ փաթեթների արագ ալգորիթմների կառուցման ընդհանուր մեթոդ, որոնք արագությամբ գերազանցում են կլասիկ ալգորիթմներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бриллинджер Д. Р.* «Временные ряды. Обработка данных и теория». М., «Мир», 1980.
2. *Гнеденко Б. В.* «Курс теории вероятностей».
3. Цифровая обработка сигналов и ее применения. М., «Наука», 1981.
4. *Бендат Д., Пирсол А.* «Измерение и анализ случайных процессов», М., «Мир», 1974.
5. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* «Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах», М., «Сов. радио», 1975.
6. *Winograd S.* On Computing the Discrete Fourier Transform. Math. of Comp., v. 30, 141.
7. *Cooley J. W., Tuekey J. W.* An algorithm for the machine calculation of Complex Fourier series. "Math. Comp.", 1965, v. 19.
8. *Yechiam I.. Judea P.* Asimptotic properties of discrete unifary transformations. "IEEE Trans. Pat." Anal. and Math, Intel,", 1979, 1, № 4, 366—371.
9. *Прэтт У.* «Цифровая обработка изображений». М., «Мир», 1982, 1 том.