А. А. АРАКЕЛЯН

ГОМОМОРФИЗМЫ И РЕШЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РЕЛЯТИВОВ

Задача существования решений релятивов была сформулирована в [2] и решена для случая конечных релятивов. В дальнейшем [3, 4] эта задача была обобщена на случай некоторых счетных релятивов.

Известно [10], что любая задача принятия решений может быть представлена в виде релятива. В частности [8, 9], любую игру можно рассматривать как полирелятив, что позволяет перенести алгебраические конструкции произведения на игры. Отсюда следует возможность разложения релятива в произведение более простых релятивов и изучение решений релятивов — сомножителей.

Задача существования решений произведения и композиции релятивов поставлена в [5] и получено условие существования решения для композиции релятивов. Представление решений произведения релятивов при помощи решений релятивов — сомножителей получено в [7]. Известно, что D-произведение релятивов является обобщением прямого произведения.

В данной работе рассматривается задача представления решений D-произведения и композиции релятивов при помощи решений релятивов—сомножителей, операции на полугруппах гомоморфизмов произведения (композиции) релятивов и поведение решений при гомоморфизмах.

1. Определения.

Полирелятивом [1] называется система $(A, (\rho_i)_{i\in I})$, где A множество элементов произвольной природы, называемое полем релятива, $\rho_i\subset A\times A$, $i\in I$ бинарные отношения. Всюду далее отношения будем предполагать нерефлексивными.

Подмножество $V_\rho\subset A$ (см. [2]) называется решением релятива (A, ρ), если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) внутренней устойчивости, т. е. не существует таких $a, b\in V_\rho$, что $(a, b)\in\rho$,

б) внешней устойчивости, т. е. для любого $b\notin V_\rho$ существует такой $a\in V_\rho$, что $(a, b)\in\rho$.

В теории моделей рассматривается D-произведение моделей [6].

В терминах теории релятивов его можно определить следующим образом. Положим для множества X множество $S(X)=\{Y|Y\subset X\}$.

Определение 1.1. Пусть I—некоторое множество. D называется фильтром над множеством I, если

а) $D\subset S(I)$, $\varnothing\neq D\neq S(I)$,

б) $X\in D$ и $X\subset Y$ влекут $Y\in D$,

в) X, $Y\in D$ влекут $X\cap Y\in D$.

Пусть $I\neq\varnothing$, (A_i, ρ_i), $i\in I$ релятивы. Положим $A=\prod\limits_{i\in I}A_i$. Будем говорить, что $a_1\in A$ эквивалентно $a_2\in A$, $a_1\sim a_2$, если $\{i\in I|a_1(i)=a_2(i)\}\in D$. Положим $a^{\sim}=\{a_1\in A|a\sim a_1\}$, $A^{\sim}=\{a^{\sim}|a\in A\}$. Под D-произведением релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$ понимаем релятив $(A^{\sim}, \rho)$, определенный следующим образом: $(a_1^{\sim}, a_2^{\sim})\in\rho$ тогда и только тогда, когда $\{i\in I/(a_1(i), a_2(i))\in\rho_i\}\in D$.

Если положить $D=\{I\}$, $a^{\sim}=a$ для любого $a\in A$, то D-произведение релятивов совпадает [1] с их прямым произведением. Прямое произведение отношений $\{\rho_i\}_{i\in I}$ обозначим через $\rho=\mathop{\square}\limits_{i\in I}\rho_i$.

2. Решение D-произведения релятивов

Пусть V_{ρ_i}—решение релятива (A_i, ρ_i), $i\in I$. Положим $W_L=(\prod\limits_{i\in L}V_{\rho_i})\times(\prod\limits_{i\in I\setminus L}(A_i\setminus V_{\rho_i}))$, $W_L^{\sim}=\{w^{\sim}|w W_L\}$, $L\subseteq I$. Положим далее $L_1=\{L\subset I\,|\,I\setminus L\in D\}$, $L_2=\{L\subset I|I\setminus L\notin D\}$. Пусть $L_1=\{i_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$ такое подмножество из I, принадлежащее L_2, что $\{i_j\}\in D$, $j=1, 2, \ldots, l$. Положим $L(L_1)=\{L_k\}_{k=1,2,\ldots,p}$, где $L_k\subset L_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots, p-1$.

Лемма 2.1. $L\in L_1$ влечет $W_L^{\sim}\subset\rho(W_I^{\sim})$.

Доказательство. Если $a^{\sim}\in W_L^{\sim}$, то $a^{\sim}=((a(i))_{i\in L}, (a(i)_{i\in I\setminus L})^{\sim}$, где $a(i)\in V_{\rho_i}$, $i\in L$, $a(i)\in A_i\setminus V_{\rho_i}$, $i\in I\setminus L$. Следовательно существуют такие $v(i)\in V_{\rho_i}$, $i\in I\setminus L$, что $(v(i), a(i))\in\rho_i$, $i\in I\setminus L$. Отсюда $\{i\in I|(v(i), a(i))\in\rho_i\}=I\setminus L\in D$ влечет $(v_1^{\sim}, a^{\sim})\in\rho$ для любого такого $v_1^{\sim}W_I^{\sim}$, что $v_1(i)=v(i)$, $i\in I\setminus L$.

Лемма 2.2. $L\notin D$, $L\cap L'=\varnothing$ для некоторого $L'\in L(L_1)$ влекут $W_L^{\sim}\subset\rho(W_{L'}^{\sim})$.

Доказательство. Если $a^{\sim}\in W_L^{\sim}$, то $a^{\sim}=((a(i))_{i\in L}, (a(i))_{i\in I\setminus L})^{\sim}$, где $a(i)\in V_{\rho_i}$, $i\in L$, $a(i)\in A_i\setminus V_{\rho_i}$, $i\in I\setminus L$. Так как $L'\cap L=\varnothing$, $L'\in L(L_1)$, то существуют такие $v(i)\in V_{\rho_i}$, $i\in L'$, что $(v(i), a(i))\in\rho_i$, $i\in L'$. Так как $L'\in D$, то существует такой $w^{\sim}\in W_{L_1}^{\sim}$, где $w(i)=v(i)$, $i\in L'$, $w(i)\in A_i\setminus V_{\rho_i}$, $i\in I\setminus L'$, что $(w^{\sim}, a^{\sim})\in\rho$.

Лемма 2.3. $L'\in L_2$ влечет $L'\cap L''\neq\varnothing$ для любого $L''\in L(L_1)$.

Доказательство. Если бы $L'\cap L''=\varnothing$ для некоторого $L''\in L(L_1)$, то $L''\subset I\setminus L'\notin D$. Отсюда $L''\notin D$ и мы получили бы противоречие с тем что $L''\in D$.

Лемма 2.4. $W_L^{\sim}\cap\rho(W_{L'})=\varnothing$ для любых $L, L'\in \mathbf{L}(L_1)$.

Доказательство. Если бы $(w^-, a^-)\in\rho$, $w^-\in W_{L'}^{\sim}$, $a^-\in W_L^{\sim}$, то $\{i\in I\setminus L_1|(w(i), a(i))\in\rho_i\}\in D$. Следовательно $I\setminus L_1\in D$ и мы получили бы противоречие с тем, что $L_1\in\mathbf{L}_2$.

Лемма 2.5. $L\in\mathbf{L}_2\setminus\mathbf{L}(L_1)$ влечет $W_L^{\sim}\subset\rho(W_{L_1\setminus L}^{\sim})$.

Доказательство. Так как $L_1\not\subset L$, то $L_1\setminus L\in D$, $w(i)\in A_i\setminus V_{\rho_i}$, $i\in L_1\setminus L$, $w^-\in W_L^{\sim}$. Отсюда $w^-\in\rho(W_{L_1\setminus L}^{\sim})$.

Лемма 2.6. $W_L^{\sim}\subset\rho(W_{L_1}^{\sim})$ для любого $L\subset L_1$.

Доказательство. Так как $L_1\setminus L\in D$, то $w^-\in\rho(W_{L_1}^{\sim})$ для любого $w^-\in W_L^{\sim}$.

Лемма 2.7. $W_L^{\sim}\cap\rho(W_{L_1}^{\sim})=\varnothing$ для любых $L, L'\in\mathbf{L}(L_1)$.

Доказательство следует из того, что $I\setminus(L\cap L')\notin D$ для любых $L\neq L'$, $L, L'\in\mathbf{L}(L_1)$.

Теорема 2.1. Пусть (A_i, ρ_i), $i\in I$ некоторое множество релятивов, V_{ρ_i} решение релятива (A_i, ρ_i), $i\in I$. Если существует такой $L_1\in D$, что $L_1=\{i_j\}_{j=1,2,\ldots,l}; \{i_j\}\in D, j=1, 2, \ldots, l, \mathbf{L}(L_1)=L_k, k=1, 2, \ldots, p\setminus L_k\subset L_{k+1}, k=1, 2, \ldots, p-1\}$, то $V=\bigcup\limits_{L\in\mathbf{L}(L_1)} W_L^{\sim}$ решение релятива (A^-, ρ).

Доказательство. Из леммы 2.7 следует внутренняя устойчивость множества V. Внешняя устойчивость следует из лемм 2.1—2.6.

3. Решения композиции релятивов

Пусть (A_i, ρ_i), $i\in I$ некоторое множество релятивов. Положим $A=\prod\limits_{i\in I} A_i$. Определим отношение $\pi_i\subset A\times A_i$ следующим образом: $(a, a_i)\in\pi_i$ тогда и только тогда, когда $pr_i a=a_i$. Релятив (A, ρ) называется композицией релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$, если $(a, b)\in\rho$ тогда и только тогда, когда существует такое $i\in I$, что $(\pi_i\langle a\rangle, \pi_i\langle b\rangle)\in\rho_i$, $(\pi_j\langle a\rangle, \pi_j\langle b\rangle)\in\Delta_{A_j}$ для любого $j\neq i$, где $\Delta_{A_j}=\{(a, a)\}_{a\in A_j}$, $j\in I$.

Положим $W_L=\prod\limits_{i\in L} V_{\rho_i}\times\prod\limits_{i\in I\setminus L}(A_i\setminus V_{\rho_i})$, $L\subset I$, $I_{i_1, i_2, \ldots, i_k}=I\setminus\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $\mathbf{n}^k=\{I_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}_{i_1, i_2, \ldots, i_k\in I}$, $k\neq 0$, $\mathbf{n}^0=I$.

Лемма 3.1. $W_{L'}\cap\rho(W_L)=\varnothing$ для любых таких $L\in\mathbf{n}^k$, $L'\in\mathbf{n}^{k'}$, что $|L\setminus L'|+|L'\setminus L|\geqslant 2$.

Доказательство. Если бы $|L\setminus L'|+|L'\setminus L|\geqslant 2$ и существовали такие $L\in\mathbf{n}^k$, $L'\in\mathbf{n}^{k'}$, $a\in W_L$, $b\in W_{L'}$, что $(a, b)\in\rho$, то существовал бы такой $i\in I$, что $(\pi_i\langle a\rangle, \pi_i\langle b\rangle)\in\rho_i$, $(\pi_j\langle a\rangle, \pi_j\langle b\rangle)\in\Delta_{A_j}$, $j\neq i$. Отсюда $\pi_k\langle a\rangle\in A_k\setminus V_{\rho_k}$, $\pi_k\langle b\rangle\in V_{\rho_k}$, $k\in L'\setminus L$ и $\pi_k\langle a\rangle\in V_{\rho_k}$, $\pi_k\langle b\rangle\in A_k\setminus V_{\rho_k}$, $k\in L\setminus L'$. Следовательно,

а) $i\in(L\setminus L')\cup(L'\setminus L)$ влекло бы существование такого $k\in(L\setminus L')\cup(L'\setminus L)$ $k\neq i$, что $(A_k\setminus V_{\rho_k})\cap V_{\rho_k}\neq\varnothing$,

б) $i\notin(L\setminus L')\cup(L'\setminus L)$ влекло бы $(A_k\setminus V_{\rho_k})\cap V_{\rho_k}\neq\varnothing$ для любого $k\in(L\setminus L')\cup(L'\setminus L)$ и мы получили бы противоречие с тем, что V_{ρ_k} решения релятива (A_k, ρ_k).

Лемма 3.2. Для любого $L\in n^k$ существует такой $L'\in n^{k-1}$, что $W_L\subset\rho(W_{L'})$.

Доказательство. Если $b\in W_L$, то $\pi_i\langle b\rangle\in V_{\rho_i}$, $i\in L$, $\pi_i\langle b\rangle\in\in A_i\setminus V_{\rho_i}$, $i\in I\setminus L$. Следовательно, если определить $a\in A$ следующим образом: $\pi_i\langle a\rangle=\pi_i\langle b\rangle$, $i\in L\cup(I\setminus L\setminus\{j\})$, $(\pi_j\langle a\rangle, \pi_j\langle b\rangle)\in\rho_j$, $\pi_j\langle a\rangle\in V_{\rho_j}$, то $(a, b)\in\rho$, $a\in W_{L'}$, где $L'\in n^{k-1}$.

Лемма 3.3. $W_L\cap\rho(W_{L'})=\varnothing$ для любых $L, L'\in n^k$.

Доказательство. Так как $|L\setminus L'|\geqslant 1$, $|L\setminus L'|\geqslant 1$, то для множества $P=\{j\in I|\pi_j\langle a\rangle\neq\pi_j\langle b\rangle\}$ будет иметь место $|P|\geqslant 2$ для любых $a\in W_L$, $b\in W_{L'}$. Отсюда $(a, b)\notin\rho$ для любых $a\in W_L$, $b\in W_{L'}$.

Лемма 3.4. Если $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$, $i\in I$, то $W_L\cap\rho(W_L)=\varnothing$ для любого $L\in 2^I$.

Доказательство. Если бы $a, b\in W_L$ и $(a, b)\in\rho$, то $(\pi_i\langle a\rangle, \pi_i\langle b\rangle)\in\rho_i$, $(\pi_j\langle a\rangle, \pi_j\langle b\rangle)\in\Delta_{A_j}$, $j\neq i$, $i\notin L$. Отсюда, так как $i\in I\setminus L$, то $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})\neq\varnothing$ и мы получили бы противоречие с тем, что $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$.

Лемма 3.5. Пусть (A, ρ) некоторый релятив и V_ρ его решение. Для того, чтобы $\rho(A\setminus V_\rho)\cap(A\setminus V_\rho)=\varnothing$ достаточно, чтобы релятив (A, ρ) был четным в смысле Ричардсона [3].

Доказательство следует из определения четности релятива (A, ρ).

Всюду далее четность релятива будем понимать в смысле [3].

Теорема 3.1. Пусть $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ и релятивы (A, ρ_i), $i\in I$ четные. Тогда множество $V=\bigcup\limits_{k=0}^{\left[\frac{|I|}{2}\right]}\bigcup\limits_{L\in n^{2k}} W_L$, где $\left[\frac{|I|}{2}\right]$ целая часть от $\frac{|I|}{2}$, решение композиции (A, ρ) релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$.

Доказательство. Внутренняя устойчивость V следует из лемм 3.1; 3.3—3.5. Внешняя устойчивость V следует из леммы 3.2.

Определим операцию суперпозиции бинарных отношений $\sigma_i\subset\subset A\times A$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_n$ следующим образом: $(a, b)\in\in\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_n$ тогда и только тогда, когда существуют такие $c_i\in A$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, что $(a, c_1)\in\sigma_1$, $(c_1, c_2)\in\sigma_2$, $\ldots, (c_{n-1}, b)\in\sigma_n$. Если $\sigma_j=\rho$, $j=1, 2, \ldots, n$, то суперпозицию обозначим через $\overset{n}{\rho}$.

Можно показать, что для того, чтобы нерефлексивное, асимметричное отношение $\rho\subset A\times A$ было ациклическим необходимо, чтобы

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \qquad \text{для любого } n$$

и достаточно, чтобы

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \qquad \text{для любого } n>2.$$

Отсюда для того, чтобы отношение $\rho\subset A\times A$ было ациклическим, нерефлексивным и асимметричным, ациклическим, нерефлексивным и симметричным, ациклическим, рефлексивным и асимметричным необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \quad \text{для любого } n,$$

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \quad \text{для любого } n\neq 2,\ \Delta_A\subset\overset{2}{\rho},$$

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \quad \text{для любого } n>2,\ \Delta_A\subset\overset{2}{\rho}\cap\rho$$

соответственно.

Отношение $\rho\subset A\times A$ назовем вполне циклическим, если для любого $a\in A$ существует цикл, содержащий a. Можно показать, что ρ является вполне циклическим тогда и только тогда, когда $\Delta_A=\bigcup\limits_{n<\infty}\overset{n}{\rho}$.

Под звездой отношения $\rho\subset A\times A$ через элемент $a\in A$ будем понимать множество $(\rho\cap\overset{-1}{\rho})<a>$. Отношение $\rho\subset A\times A$ называется звездно-конечным, если $|(\rho\subset\overset{-1}{\rho})<a>|<\infty$ для любого $a\in A$.

Пусть (A_i,ρ_i), $i\in I$ четные, регрессивно ограниченные релятивы и элементы полей A_i, $i\in I$ перенумерованы не более чем счетными кардинальными числами. Тогда из [4] будет следовать существование базиса $U_{\rho_i^0}$ для (A_i,ρ_i), $i\in I$. Положим $A_i^1=A_i\setminus(U_{\rho_i^0}\cup\rho_i(U_{\rho_i^0}))$, $\rho_i^1=\rho_i\cap(A_i^1\times A_i^1)$. Тогда по теореме Ричардсона [4] будет следовать существование базиса $U_{\rho_i^1}$ релятива (A_i^1,ρ_i^1). Если продолжить процесс построения релятивов по индукции, то для некоторого конечного k получим релятив (A_i^u,ρ_i^u), определенный следующим образом:

$$A_i^k=A_i\setminus\bigcup_{\alpha=D}^{k}(U_{\rho_i^\alpha}\cup\rho_i(U_{\rho_i^\alpha})),\quad \rho_i^u=\rho_i\cap(A_i^u\times A_i^u),\quad i\in I.$$

Релятив (A_i^k,ρ_i^k) по теореме 5 из [4] будет иметь базис $U_{\rho_i^u}$. Если релятив (A_i,ρ_i) конечный, то для некоторого $n<\infty$ множество $A_i^n=\varnothing$. Если (A_i,ρ_i) счетный релятив, то рассмотрим следующие два случая:

Случай 1. Если η такое предельное порядковое число, что $A_i^\lambda\neq\varnothing$ для любого $\lambda<\eta$, то положим $A_i^\eta=A_i/\bigcup\limits_{\lambda<\eta}(U_{\rho_i^\lambda}\cup\rho_i(U_{\rho_i^\lambda}))$, $\rho_i^\lambda=\rho_i\cap(A_i^\lambda\times A_i^\lambda)$. Так как (A_i^η,ρ_i^η) является подрелятивом четного регрессивно ограниченного релятива, то он имеет базис $U_{\rho_i^\eta}$. Отсюда получаем релятив $(A_i^{\eta+1},\rho_i^{\eta+1})$, определенный следующим образом:

$$A_i^{\eta+1}=\,_i^\eta\setminus(\rho_i(U_{\rho_i^\eta})\cup U_{\rho_i^\eta}),\quad \rho_i^{\eta+1}=\rho_i\cap(A_i^{\eta+1}\times A_i^{\eta+1}).$$

Случай 2. Если η изолированное порядковое число, то существует непосредственно предшествующее $\eta-1$. Если $A_i\setminus\bigcup\limits_{\lambda<\alpha}(U_{\rho_i^\lambda}\cup\rho_i(U_{\rho_i^\lambda}))\neq\varnothing$ для любого $\alpha<\eta$, то положим $A_i^\eta=A_i\setminus\bigcup\limits_{\lambda<\eta-1}(U_{\rho_i^\lambda}\cup\rho_i(U_{\rho_i^\lambda}))$, $\rho_i^\eta=\rho_i\cap(A_i^\eta\times A_i^\eta)$. Так как (A_i^η,ρ_i^η) четный релятив, являющийся регрессивно ограниченным, то он имеет базис $U_{\rho_i^\gamma}$. Положим $A_i^{\gamma+1}=A_i^\gamma\setminus(U_{\rho_i^\gamma}\cup\cup\rho_i(U_{\rho_i^\gamma}))$, $\rho_i^{\gamma+1}=\rho_i\cap(A_i^{\gamma+1}\times A_i^{\gamma+1})$. Пусть γ порядковый тип множества A_i. Тогда будет существовать такое порядковое число β, что $A_i\setminus\bigcup_{\lambda<\beta}(U_{\rho_i^\lambda}\cup\rho_i(U_{\rho_i^\lambda}))=\varnothing$.

Аналогично, используя результаты [4] можно построить индуктивным способом релятивы $(A_i^\gamma, \rho_i^\gamma)$ для звездно-конечного, четного, регрессивно конечного релятива (A_i, ρ_i), $i\in I$.

Пусть $(A_i^{\alpha_i}, \rho_i^{\alpha_i})$ релятив, полученный индукцией из релятива (A_i, ρ_i) описанным методом, $U_{\rho_i^{\alpha_i}}$— базис $(A_i^{\alpha_i}, \rho_i^{\alpha_i})$. Положим $W_L= =\{\prod_{i\in L} U_{\rho_i^{\alpha_i}}\}_{\alpha\in B_L}\times\prod_{i\in I\setminus L}(A_i\setminus V_{\rho_i})$, $W_L^\alpha=(\prod_{i\in L} U_{\rho_i^{\alpha_i}})\times(\prod_{i\in I\setminus L}(A_i\setminus V_{\rho_i})$, $\alpha=(\alpha_i)_{i\in L}$, $B=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $B_L=\{\alpha=(\alpha_i)_{i\in L}\,|\,\alpha_i\in B,\ i\in L\}$, $L\subseteq I$.

Лемма 3.6. $W_L^\alpha\cap\rho(W_{L'}^\alpha)=\varnothing$ для любых таких $L\in n^k$, $L'\in n^{k'}$, что $|L\setminus L'|+|L'\setminus L|\geqslant 2$.

Лемма 3.7. Для любого $L\in n^k$ существует такой $L'\in n^{k-1}$, что $W_L\subset\rho(W_{L'})$.

Лемма 3.8. $W_L^\alpha\cap\rho(W_{L'}^\alpha)=\varnothing$ для любых $L, L'\in n^k$.

Лемма 3.9. Если $(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$, то $W_L^\alpha\cap\rho(W_L^\alpha)=\varnothing$ для любого $L\in 2^I$, $\alpha\in B_L$.

Доказательства лемм 3.6—3.9 аналогичны доказательствам лемм 3.1—3.4 соответственно.

Лемма 3.10. $W^\alpha\cap\rho(W_{L'}^{\alpha'})=\varnothing$ для любых $L, L'\in\{n^{2k}\}_{k=0,1,\ldots,[I]}$.

Доказательство. Если бы существовали такие $w\in W_L^\alpha$, $w'\in W_{L'}^{\alpha'}$, что $(w', w)\in\rho$, то

а) в случае $\alpha=\alpha'$, $L=L'$ получили бы противоречие с леммой 3.9,

б) в случае $\alpha\neq\alpha'$, $L=L'$ либо $\rho_i(U_{\rho_i^{\alpha'_i}})\cap U_{\rho_i^{\alpha'_i}}\neq\varnothing$, либо $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})\neq\varnothing$, и мы получили бы противоречие с тем, что $\rho_i(U_{\rho_i^{\alpha'_i}})\cap U_{\rho_i^{\alpha'_i}}=\varnothing$, $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$,

в) в случае $\alpha=\alpha'$, $L\neq L'$ получили бы противоречие с леммами 3.6, 3.8,

г) в случае $\alpha\neq\alpha'$, $L\neq L'$ либо $U_{\rho_i^{\alpha'_i}}\cap U_{\rho_i^{\alpha_i}}\neq\varnothing$, либо $\rho_i(U_{\rho_i^{\alpha'_i}})\cap\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})\neq\varnothing$, либо $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})\neq\varnothing$ и мы получили бы противоречие с $U_{\rho_i^{\alpha'_i}}\cap U_{\rho_i^{\alpha_i}}=\varnothing$, $\rho_i(U_{\rho_i^{\alpha'_i}})\cap A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$, $\rho_i(U_{\rho_i^{\alpha'_i}})\cap\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$ соответственно.

Теорема 3.2. Если релятивы (A_i, ρ_i), $i\in I$,

а) четные, регрессивно ограниченные,

б) существует такое порядковое число γ, что $A_i^\gamma=\varnothing$ и $A_i^\beta\neq\varnothing$ для любого $\beta<\gamma$, $i\in I$, то множество $V=\bigcup_{k=0}^{[\frac{I}{2}]}\bigcup_{L\in n^{2k}} W_L$ является решением (A, ρ) релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$.

Доказательство. Доказательство внутренней устойчивости следует из лемм 3.5, 3.6, 3.8—3.10. Доказательство внешней устойчивости следует из леммы 3.7.

4. Гомоморфизмы D-произведений и композиций релятивов и решения

В приложениях к задачам принятия решений [10] нас будет интересовать существование таких решений D-произведения и композиции релятивов, что гомоморфные образы элементов решения прообраза являются элементами решения гомоморфного образа.

Пусть $a^{\sim}=\{a\}$ для любого $a\in A$. Обозначим через (A, ρ) (через (A, ρ^*)) D-произведение (композицию) релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$,

Через Φ_i обозначим множество всех гомоморфизмов (A_i, ρ_i) в себя. Через Φ (через Φ^*) множество всех гомоморфизмов (A, ρ) в себя ((A, ρ^*) в себя). Положим $A\langle a_i\rangle=\{a\in A \mid pr_i a=a_i\}$, $a_i\in A_i$, $i\in I$. Очевидно, что если $\rho=\underset{i\in I}{\square}\rho_i$, то $pr_i\rho(A\langle a_i\rangle)=\rho_i\langle a_i\rangle$, $a_i\in A_i$, $i\in I$, $pr_i\rho^*(A\langle a_i\rangle)=\{a_i, \rho_i\langle a_i\rangle\}$, $a_i\in A_i$, $i\in I$.

Пусть $\Phi'=\{\varphi\in\Phi \mid pr_i\varphi(A\langle(A\langle a_i\rangle)=\varphi_i\langle a_i\rangle, a_i\in A_i, i\in I\}$.

Если $a, b\in A$, то будем говорить, что $(a, b)\in\varphi=\underset{i\in I}{\square}\varphi_i$ тогда и только тогда, когда $(a_i, b_i)\in\varphi_i$ для любого $i\in I$.

Положим $\Psi=\{\varphi \mid \varphi=\underset{i\in I}{\square}\varphi_i,\ \varphi_i\in\Phi_i,\ i\in I\}$.

Из определения π_i следует $\overset{-1}{\pi}_j\langle\bar{a}_j\rangle\cap\overset{-1}{\pi}_j\langle a_j\rangle=\varnothing$ для любых $\bar{a}_j\neq a_j$. Очевидно, что $\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{\pi}_i\langle a_i\rangle=(a_i)_{i\in I}$. Пусть $\varphi\in\Phi'$. Можно показать, что если $\varphi_i=\pi_i\circ\varphi\circ\overset{-1}{\pi}_i$, то $\varphi_i\in\Phi_i$, $i\in I$, $\underset{i\in I}{\square}\varphi_i=\varphi$, $\Phi'\subset\Psi$.

Положим

$$\Phi'_i=\{\varphi_i\in\Phi_i \mid \varphi_i\langle a_i\rangle\in V_{\rho_i} \text{ для любого } a_i\in V_{\rho_i}\},\ i\in I,$$

$$\Psi'=\{\varphi\in\Psi \mid \varphi=\underset{i\in I}{\square}\varphi_i,\ \varphi_i\in\Phi'_i,\ i\in I\}.$$

Положим далее $L_1=\{L\subset I \mid I\setminus L\in D\}$, $L_2=\{L\subset I \mid I\setminus L\notin D\}$.

Из теоремы 2.1. следует

Теорема 4.1. Пусть (A_i, ρ_i), $i\in I$ некоторое множество релятивов, V_{ρ_i}—решение релятива (A_i, ρ_i), $i\in I$. Если D—фильтр такой, что существует $L_1\in D$, удовлетворяющий условиям: $L_1=\{i_j\}_{j=1, 2, \ldots, l}$, $\{i_j\}\in D$, $j=1, 2, \ldots, l$, то существует такое решение V D-произведения (A, ρ), что $\varphi\langle a\rangle\in V$ для любого $a\in V$ и любого $\varphi\in\Psi'$.

Из теоремы 3.1. следует

Теорема 4.2. Пусть (A_i, ρ_i), $i\in I$ такое множество релятивов, что V_{ρ_i} решение (A_i, ρ_i), $\rho_i(A_i\setminus V_{\rho_i})\cap(A_i\setminus V_{\rho_i})=\varnothing$, $i\in I$. Тогда существует такое решение V композиции (A, ρ^*), что $\varphi\langle a\rangle\in V$ для любого $a\in V$ и любого $\varphi\in\Psi'$.

Из теоремы 3.2 следует

Теорема 4.3. Если релятивы (A_i, ρ_i), $i \in I$

а) четные, регрессивно ограниченные;

б) существует такое порядковое число γ, что $A_i^{\gamma} = \varnothing$ и $A_i^{\beta} \neq \varnothing$ для любого $\beta < \gamma$, $i \in I$, то существует такое решение V композиции (A, ρ^*), что $\varphi\langle a\rangle \in V$ для любого $a \in V$ и любого $\varphi \in \Psi'$.

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՌԵԼՅԱՏԻՎՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԸ

Դիտարկվում են ռելյատիվների արտադրյալների լուծումների գոյության խնդիրները։ Ըստ մոդելների տեսության համանմանության սահմանվում է ռելյատիվների D—արտադրյալը ու նրա համար կառուցվում է համապատասխան լուծումը։

Սահմանվում է նաև ռելյատիվների կոմպոզիցիան և կոմպոզիցիայի համար որոշ պայմանների դեպքում կառուցվում է լուծում, որը ստացվում է համապատասխան արտադրիչ ռելյատիվների լուծումներից։

Հոդվածի հաջորդ թեորեմներում դիտարկվում են ռելյատիվների արտադրյալների հոմոմորֆիզմները և ապացուցվում է, որ ինչպես ռելյատիվների D—արտադրյալների, նույնպես և կոմպոզիցիայի լուծման հոմոմորֆ պատկերը պատկանում է հոմոմորֆ ռելյատիվի լուծմանը։

D—արտադրյալի լուծումը կառուցվում է D—ֆիլտրի որոշ պայմանները բավարարելու դեպքում, իսկ ռելյատիվների կոպոզիցիայի լուծումը ստացվում է զույգ կամ ացիկլիկ, վերջավոր աստղ ունեցող ռելյատիվների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. В. Шимельфениг.* Теория релятивов и ее применения. Саратов, 1971.
2. *Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн.* Теория игр и экономическое поведение, М., 1972.
3. *M. Richardson.* On weakly ordered systems, Bul. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, №2.
4. *M. Richardson.* Solutions of irreflexive relations, Ann. Math., 1953, v. 58, № 3.
5. *К. Берж.* Теория графов и ее применения, М., 1962.
6. *Г. Дж. Кейслер, Чен Чень-Чунь,* Теория непрерывных моделей. М., 1971.
7. *Л. П. Варвак.* О существовании ядра на произведении графов. Укр. мат. журн., т. 17, № 3, 1965.
8. *О. В. Шимельфениг.* Применение алгебры полирелятивов к теории игр, Сиб. мат. журн., т. XII, № 4, 1971.
9. *В. В. Розен.* Общие теоремы о достижимости и минимаксе в позиционных играх. Сб. мат. модели и методы в социальном экономических исследованиях, Новосибирск, вып. I, 1968.
10. *П. Фишберн.* Теория полезности для принятия решений. М., 1978.