МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Н. П. ТЕР-ЗАХАРЯН

О ВОЗМОЖНОСТЯХ КОДИРОВАНИЯ СООБЩЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ЯЗЫКАХ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

Введение

В работах [1] и [2] разработаны понятия, связанные с кодированием сообщений в алгорифмических языках. Такая точка зрения позволила по-новому взглянуть на свойства алгорифмических языков. В частности, оказалось, что свойства языка нормальных алгорифмов и языка рекурсивных функций принципиально различны. Естественным образом возникает вопрос об исследовании логических и логико-математических языков с аналогичных позиций. В качестве формального уточнения понятия сообщения в логическом языке выступает понятие формулы (или иного формального объекта, предназначенного для выражения суждений). Понятие транслятора из одного логико-математического языка в другой допускает различные уточнения. Естественно считать, что транслятор из одного языка в другой—это алгорифм, перерабатывающий всякую формулу первого языка в эквивалентную ей (в каком-то смысле) формулу второго языка. Для того, чтобы естественным образом вводить понятие эквивалентности формул, приходится рассматривать оба языка, как части некоторого третьего языка, «включающего» в себя оба исходных. Наиболее просто трактуется тот случай, когда один из исходных языков является расширением другого. В этом случае в роли третьего языка выступает более широкий из двух рассматриваемых языков. Далее возможны различные трактовки эквивалентности формул. Если, например, в составе языка имеются логические операции $\supset$ и &, то установление эквивалентности формул A и B естественным образом связывается с подтверждением (в каком-то смысле) формулы

$$A \supset B \& B \supset A.$$

В одних случаях могут рассматриваться подтверждения этой формулы в смысле установления ее содержательной истинности; в других—выводимость этой формулы в какой-либо дедуктивной системе. Мы будем трактовать ниже эквивалентность на дедуктивной основе.

Трансляция из одного логико-математического языка в другой, в том случае, когда один из этих языков вложен в другой, естественным образом связывается с известным в математической логике понятием элиминации символов и обозначений.

При содержательном построении математических теорий обычно на различных стадиях происходит расширение понятий и обозначений. При формализации такого построения приходится к имеющейся формальной системе добавлять новые правила образования и аксиомы, в результате чего получается более широкая (вообще говоря) система. Новые правила требуют введения новых формальных символов. Эти символы часто бывают элиминируемыми (или устранимыми) [3] и тогда могут пониматься просто как сокращения, полезные при изложении метаматематики. Таким образом, устранимые расширения являются несущественными с точки зрения класса доказуемых формул. Тем не менее в математике широко используется введение таких устранимых описаний, так как они позволяют сокращать формулы и доказательства. Возникает вопрос, в какой степени целесообразны такие сокращения, насколько коротко они дают возможность кодировать формулы в рассматриваемых формальных системах.

В данной работе изучаются логико-арифметические языки с точки зрения качества трансляции из произвольного такого языка в фиксированный. Введем ряд понятий, при помощи которых будет конкретизироваться задача. Мы будем пользоваться обозначениями из [1].

§ 1. Основные понятия и утверждения

Пусть $F=\{f_1, \dots, f_m\}$ — фиксированный конечный список функциональных символов для конкретных примитивно-рекурсивных функций, удовлетворяющий следующему условию корректности: если ПРФ φ входит в список F, то примитивно-рекурсивное описание φ (см. [3], с. 197) также содержится в списке F. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие корректные списки ПРФ. Ясно, что операция объединения корректных списков не выводит нас из класса корректных списков.

Иногда мы будем отождествлять обозначение ПРФ и обозначение ее функционального символа. Через $F\cup\{f\}$, где F — корректный список функциональных символов ПРФ, и f — функциональный символ некоторой ПРФ, мы будем понимать минимальный корректный список функциональных символов ПРФ, содержащий F и f. Условимся рассматривать лишь такие корректные списки функциональных символов ПРФ, которые содержат список $\{\,', +, \cdot\,\}$, обозначаемый в дальнейшем через F_0.

Понятия «переменные», «термы» и «формулы» вводятся естественным образом по аналогии с определением С. К. Клини ([3], с. 69), как слова в алфавите

$$A_F \leftrightarrows \{0,\ 1,\ x,),\ (,\ f_1, \dots, f_m,\ ',\ =,\ \supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall,\ \exists\},$$

где буква x служит для порождения предметных переменных, построенных по образцу [2].

Обозначим через F_F множество всех арифметических формул указанного вида, через АИП$_F$—арифметическое исчисление предикатов с равенством, полученное по аналогии с формальной арифметикой С. К. Клини посредством добавления к аксиомам этой системы новых аксиом примитивной рекурсии и суперпозиции для каждой функции f_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Определение 1. Пусть $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$ — две формулы АИП$_F$, не содержащие свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n$, а эти последние все различны между собой. Будем говорить, что $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$ в системе АИП$_F$, если $\vdash_{\text{АИП}_F}(\Phi_1 \equiv \Phi_2)$.

Обозначим через ε_F предикат эквивалентности в АИП$_F$; таким образом, $\varepsilon_F(\Phi_1, \Phi_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ_1 и Φ_2 эквивалентны.

Определение 2. Языком Я$_F$ формальной арифметики мы будем называть тройку A_F, F_F, ε_F, элементы которой определены выше.

Язык Я$_{F_0}$ в дальнейшем будем обозначать через Я$_0$.

Определение 3. Пусть F_1 и F_2—различные корректные списки функциональных символов, $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}_{F_1}$ и $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}_{F_2}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — полный перечень свободных переменных, входящих в формулы Φ_1 и Φ_2. Мы скажем, что $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$, если имеет место $\varepsilon_{F_1 \cup F_2}(\Phi_1, \Phi_2)$.

Определение 4. Пусть F_1 и F_2 — различные корректные списки функциональных символов. Словарную функцию T будем называть транслятором из Я$_{F_1}$ в Я$_{F_2}$, если для всякой формулы Φ языка Я$_{F_1}$

$$!\,T(\Phi)\ \&\ T(\Phi) \in \mathrm{F}_{F_2}\ \&\ \varepsilon_{F_1 \cup F_2}(\Phi,\ T(\Phi)).$$

Понятие «сложности арифметической формулы» и классификация трансляторов, в частности, понятие мультипликативно ограниченного транслятора, определяются так же, как и в [1].

Основной целью наших рассмотрений является доказательство следующего утверждения.

Основная теорема. Пусть F — корректный список функциональных символов ПРФ, и f — функциональный символ ПРФ, не принадлежащий F. Тогда существует мультипликативно ограниченный транслятор T из Я$_{F \cup \{f\}}$ в Я$_F$.

Из теоремы легко получается

Следствие. Пусть K — класс всех языков арифметических формул Я$_F$, где F — любой корректный список функциональных символов ПРФ. Тогда каждый язык из этого класса мультипликативно оптимален в классе K.

§ 2. Вспомогательные определения и леммы

Зафиксируем список функциональных символов F и перенумеруем в лексикографическом порядке все элементарные формулы языка $Я_F$. Построим двухместный арифметический предикат R, такой. что если t_1 и t_2 — термы и e — лексикографический номер элементарной формулы $(t_1 = t_2)$, то

$$R(e, c(x_1, \dots, x_n) \equiv (t_1 = t_2),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — полный список различных свободных переменных формулы $(t_1 = t_2)$, а c—канторовская функция, нумерующая пары н. ч.

По теореме Ю. В. Матиясевича [4] существуют многочлены P и Q с натуральными коэффициентами, такие, что для всяких н. ч. e и x имеет место тождество

$$R(e, x) \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_r (P(e, x; z_1, \dots, z_r) = Q(e, x; z_1, \dots, z_r)). \qquad (1)$$

Итак, предикат R выразим в языке $Я_0$. Не нарушая общности, можем предполагать, что каждая свободная переменная этого выражения входит в формулу всего один раз. (Этого всегда можно добиться введением новых связанных переменных). Тогда

$$l(R(x_1, x_2)) = l(x_1) + l(x_2) + \text{const}. \qquad (2)$$

Установим ряд лемм о языке $Я_F$.

Лемма 1. Пусть $(t_1 = t_2)$ — элементарная формула длины n, e — ее лексикографический номер. Тогда существует константа c, такая, что $l(e) \leqslant c \cdot n$.

Лемма 2. Пусть Ф — формула длины n и $x_1, \dots, x_s$ — полный список различных свободных переменных, входящих в эту формулу, Тогда существует константа c, такая, что

$$s \leqslant \frac{c \cdot n}{\log_2 n}.$$

Доказательство. По определению, каждая переменная x_i имеет вид xP_i, где P_i — слово в алфавите $\{0, 1\}$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{s} l(P_i) \leqslant n - s. \qquad (3)$$

Согласно лемме Б. А. Трахтенброта ([5], с. 99) существует константа c_1 $(0 < c_1 < 1)$, такая, что

$$\sum_{i=1}^{s} l(P_i) \geqslant c_1 s \log_2 s. \qquad (4)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$s + c_1 s \log_2 s \leqslant n.$$

Отсюда очевидным образом получаем требуемое неравенство.

Лемма 3. Пусть $(t_1 = t_2)$ — элементарная формула длины n, и $x_1, \dots, x_s$ — полный список различных свободных переменных этой формулы. Тогда можно построить s различных переменных

$$y_1, y_2, \dots, y_s,$$

отличных от $x_1, \dots, x_s$, так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{s} l(y_i) \leqslant c \cdot n,$$

где c — некоторая фиксированная константа.

Доказательство. Учитывая лемму 2, достаточно доказать, что можно найти s различных переменных $y_1, \dots, y_s$, отличных от $x_1, \dots, x_s$ и таких, что для всякого i, не превосходящего s,

$$l(y_i) \leqslant c \cdot \log_2 n.$$

Рассмотрим множество $A = \{z \mid l(z) \leqslant c \cdot \log_2 n\}$.

$$\overline{\overline{A}} = 2^{c \log_2 n + 1} - 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что если положить

$$d = 2 + \log_2 \overline{c},$$

где $\overline{c}$ — константа из леммы 2, то

$$2^{d \log_2 n + 1} - 1 \geqslant 2s,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть L — критерий сложности языка $Я_F$. Тогда для всякой формулы Φ языка $Я_F$ имеют место следующие неравенства:

$$l(\Phi) - 6 < L(\Phi) \leqslant (l(\Phi) + 1) \log_2 (13 + m), \tag{5}$$

где m — количество функциональных символов языка $Я_F$.

Доказательство. Обозначим через a_n количество формул языка $Я_F$ длины n. Очевидно, что

$$(n-2)\, 2^{n-3} \leqslant a_n \leqslant (13 + m)^n. \tag{6}$$

Нижняя оценка получена учетом формул длины n вида

$$xP_1 = xP_2, \text{ где } l(P_1) + l(P_2) = n - 3.$$

Используя неравенства (6) и определение критерия сложности, после ряда несложных преобразований получаем (5).

Определение 3. Пусть Φ — произвольная формула языка $Я_F$ и $x_1, \dots, x_s$ — полный список ее свободных переменных. Будем говорить, что Φ формально диофантова в $АИП_F$, если можно построить полиномы P и Q с натуральными коэффициентами так, чтобы

$$\vdash_{АИП_F} \Phi \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_r (P(x_1, \dots, x_s; z_1, \dots, z_r) = Q(x_1, \dots, x_s; z_1, \dots, z_r)).$$

Будем говорить, что Φ формально показательно диофантова в $АИП_F$, если можно построить полиномы P и Q от переменных x_i, $x_i^{x_j}$ $(i, j = 1, \dots, m;\ m \geqslant s)$ с натуральными коэффициентами так, чтобы

$$\vdash_{АИП_F} \Phi \equiv \exists x_{s+1} \cdots \exists x_m (P(x_1, \dots, x_m;\ x_1^{x_1}, x_1^{x_2}, \dots, x_m^{x_m}) =$$

$$= Q(x_1, \dots, x_m;\ x_1^{x_1}, \dots, x_m^{x_m})).$$

7—1096

Определение 6. Пусть F — корректный список формальных символов ПРФ, и символ n-местной ПРФ f входит в F. Будем говорить, что f формально (соответственно, формально показательно) диофантова в АИП$_F$, если в АИП$_F$ формально (соответственно, формально показательно) диофантова формула $z = f(x_1, \dots, x_n)$.

Лемма 5. Если формулы Φ_1 и Φ_2 формально диофантовы в АИП$_F$, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ формально диофантовы в том же исчислении.

Лемма 6. Если формула Φ формально диофантова в АИП$_F$ и x — предметная переменная, то $\exists x \Phi$ формально диофантова в том же исчислении.

Доказательства лемм 5 и 6 очевидны.

Из лемм 5 и 6 вытекают следующие леммы.

Лемма 7. Пусть t_1 и t_2 — термы языка Я$_F$ и a, b — переменные, не входящие в термы t_1 и t_2, причем формулы $(t_1 = a)$ и $(t_2 = b)$ формально диофантовы в АИП$_F$. Тогда формула

$$\exists a \exists b\, ((t_1 = a) \& (t_2 = b) \& \exists z\, (a = b + z))$$

языка Я$_F$, выражающая предикат $(t_1 \leqslant t_2)$, формально диофантова в АИП$_F$.

Лемма 8. Суперпозиция функций, формально диофантовых в АИП$_F$, есть функция, формально диофантовая в том же исчислении.

Графику каждой ПРФ и каждому примитивно рекурсивному предикату (ПРП) поставим в соответствие стандартное представление следующим образом:

1) Стандартным представлением графика функции $s(x) = x + 1$ является формула $y = x'$.

2) Стандартным представлением графика функции $z_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ является формула

$$(0 = y) \& (x_1 = x_1) \& \cdots \& (x_n = x_n).$$

3) Стандартным представлением графика функции $I_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ является формула

$$(y = x_i) \& (x_1 = x_1) \& \cdots \& (x_n = x_n).$$

4) Пусть формулы $A(y_1, \dots, y_m, w)$ и $B_i(x_1, \dots, x_n, y_i)$, где $i = 1, \dots, m$, являются стандартными представлениями графиков функций $\psi(y_1, \dots, y_m)$ и $\chi_i(x_1, \dots, x_n)$ соответственно. Тогда стандартным представлением ПРФ φ, задаваемой суперпозицией функций ψ и χ_i, является формула

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m (B_1(x_1, \dots, x_n, y_1) \& \cdots \& B_m(x_1, \dots, x_n, y_m) \& A(y_1, \dots, y_m, w)).$$

5) Пусть формулы $A(x_1, \dots, x_n, w)$ и $B(y, x_1, \dots, x_n, z, w)$ являются стандартным представлением графиков функций $\chi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(y, x_1, \dots, x_n, z)$ соответственно. Тогда стандартным представлением

ПРФ φ, задаваемой схемой примитивной рекурсии по функциям χ и ψ, будет формула

$$\exists c \exists d (\exists u (\exists z (c = (0' \cdot d)' \cdot z + u \,\&\, \exists x (u + x' = (0' \cdot d)' \,\&$$

$$\&\, A(x_1, \dots, x_n, u)))) \,\&\, \forall i (\exists x (i + x' = y \supset \exists u \exists v (\exists z (c = (i' \cdot d)' \cdot z + v \,\&$$

$$\&\, \exists x (v + x' = (i' \cdot d)')) \,\&\, B(i, x_1, \dots, x_n, v, u) \,\&\, \exists z (c = (y'd)' \cdot z + u) \,\&$$

$$\&\, \exists x (u + x' = (i'' \cdot d)'))) \,\&\, \exists z (c = (y' \cdot d)' \cdot z + w) \,\&\, \exists x (w + x' = (y' \cdot d)')).$$

Стандартным представлением произвольного ПРП будем называть стандартное представление графика его характеристической функции. Ясно, что для всякой ПРФ и всякого ПРП их стандартные представления являются формулами языка $Я_0$, а, следовательно, и всякого $Я_F$.

Лемма 9. Стандартное представление каждого из нижеследующих предикатов

$$z = \left[\frac{x}{y}\right]; \; z = rm(x, y); \; x \equiv y \pmod z$$

есть формула, формально диофантовая в любом исчислении $АИП_F$.

Лемма 10. Стандартные представления ПРФ C_x^y, $x!$ являются формально показательно диофантовыми в любом $АИП_F$.

Лемма 11. Стандартное представление ПРФ $x \uparrow y$ является формально диофантовым в любом $АИП_F$.

Доказательство получается, если, используя леммы 5—10, последовательно воспроизвести в $АИП_F$ содержательные шаги доказательства диофантовости предиката $z = x \uparrow y$, приведенного в [4] на с. 194—205.

Пользуясь понятием операторного алгорифма из [8], нетрудно построить операторный алгорифм R такой, что

$$R(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } R(c_{21}(w), c_{22}(w)); \\ 1, & \text{если } \neg R(c_{21}(w), c_{22}(w)). \end{cases}$$

Тогда очевидно, что

$$R(c(e, c(x_1, \dots, x_n))) = 0 \equiv (t_1 = t_2),$$

где $(t_1 = t_2)$ — элементарная формула, лексикографический номер которой равен e. Введем в рассмотрение лексикографическую нумерацию слов, являющихся изображением схем операторных алгорифмов. Пусть в этой нумерации R имеет номер d_0.

Лемма 12 (аналог теоремы Девиса [6]). Для всякого н. ч. n можно построить такие многочлены P и Q с натуральными коэффициентами, что для любой ПРФ f от n переменных имеет место

$$\vdash_{АИП_{F_0 \cup \{f\}}} z = f(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y \forall w_{<y} \exists y_1 \cdots y_m$$

$$(P(d_0, e_0, z, x_1, \dots, x_n, y, w, y_1, \dots, y_m) =$$

$$= Q(d_0, e_0, z, x_1, \dots, x_n, y, w, y_1, \dots, y_m))),$$

где e_0 — лексикографический номер элементарной формулы $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 13 (аналог теоремы Девиса-Путнама-Робинсон [7]). Всякая ПРФ f формально показательно диофантова во всяком $\text{АИП}_{F_0 \cup \{f\}}$.

Доказательства лемм 12 и 13 можно получить, например, если воспроизвести в $\text{АИП}_{F_0 \cup \{f\}}$ доказательства соответствующих содержательных теорем, помещенных в [8] на с. 356—361 и 370—373. Из лемм 13, 10 и 8 следует

Лемма 14. Всякая ПРФ f формально диофантова в $\text{АИП}_{F_0 \cup \{f\}}$.

Используя леммы 1, 2 и 14, нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 15. Всякая элементарная формула языка $Я_F$ формально диофантова в АИП_F.

§ 3. Доказательство основной теоремы.

Пусть Φ — произвольная фиксированная формула языка $Я_{F \cup \{f\}}$. Транслятор T будем строить индукцией по построению формулы Φ.

1. В случае, когда Φ — элементарная формула, и $x_1, \ldots, x_s$ — полный набор ее свободных переменных, полагаем:

$$T(\Phi) \leftrightarrows \exists z_1 \cdots \exists z_r \exists y_1 \cdots \exists y_{s-1} (c(x_1, x_2, y_1) \mathbin{\&} c(y_1, x_3, y_2) \mathbin{\&} \cdots$$

$$\mathbin{\&} c(y_{s-2}, x_s, y_{s-1}) \mathbin{\&} P(e, y_{s-1}, z_1, \ldots, z_r) = Q(e, y_{s-1}, z_1, \ldots, z_r)),$$

где а) e — лексикографический номер формулы Φ;

б) P, Q — полиномы Матиясевича ([4]);

в) $c(x, y, z)$ — формула, нумерически представляющая канторовскую спаривающую функцию в языке $Я_0$:

$$((x + y)(x + y + 1) + 2x = 2z).$$

Ясно, что

$$l(c(x, y, z)) \leqslant \text{const} \cdot (l(x) + l(y) + l(z)).$$

Используя леммы 1 и 3, нетрудно найти константу c_1 такую, что

$$l(T(\Phi)) \leqslant c_1 \cdot n, \text{ где } n \leftrightarrows l(\Phi). \tag{7}$$

2. Если Φ имеет вид

$$(\Phi_1) A (\Phi_2),$$

где $A \in \{\supset, \&, \vee\}$, то

$$T(\Phi) \leftrightarrows T(\Phi_1) A T(\Phi_2).$$

3. Если Φ имеет вид $\neg \Phi_1$, то

$$T(\Phi) \leftrightarrows \neg T(\Phi_1).$$

4. Если Φ имеет вид $AP\Phi_1$, где $A \in \{\forall, \exists\}$, а P — связка переменных, то

$$T(\Phi) \leftrightarrows APT(\Phi_1).$$

Исходя из леммы 15, легко показать, что построенный указанным образом алгорифм T является транслятором из языка $Я_{FU\{f\}}$ в язык $Я_F$.

Докажем теперь, что при трансляции посредством алгорифма T длины формул языка $Я_{FU\{f\}}$ увеличиваются не более чем в определенное число раз, т. е. что существует такая константа c, что для всякого $\Phi \in F_{FU\{f\}}$

$$l(T(\Phi)) \leqslant c \cdot l(\Phi).$$

Зафиксируем формулу $\Phi \in F_{FU\{f\}}$.

Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — список всех элементарных формул, входящих в формулу Φ, причем

$$\Phi \leftrightarrows A_1\Phi_1A_2\Phi_2 \cdots A_k\Phi_kA_{k+1} \tag{8}$$

при некоторых словах A_i $(i = 1, \ldots, k+1)$.

Тогда

$$T(\Phi) \leftrightarrows A_1T(\Phi_1) \cdots A_kT(\Phi_k)A_{k+1}.$$

Отсюда

$$l(\Phi) = \sum_{i=1}^{k+1} l(A_i) + \sum_{i=1}^{k} l(T(\Phi_i)).$$

Из (7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} l(T(\Phi_i)) < c_1 \sum_{i=1}^{k} l(\Phi_i) \leqslant c_1 \cdot l(\Phi)$$

Поэтому

$$l(T(\Phi)) \leqslant (c_1 + 1)\, l(\Phi). \tag{9}$$

Используя (5) и (9), нетрудно доказать, что существует константа c такая, что

$$L(T(\Phi)) \leqslant c \cdot L(\Phi).$$

Теорема доказана.

Ն. Պ. ՏԵՐ-ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ՁԵՎԱՅՆԱՑԱԾ ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ԼԵԶՈՒՆԵՐՈՒՄ ՀԱՂՈՐԴԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈԴԱՎՈՐՄԱՆ ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ապացուցվում է, որ ձևայնացած թվաբանության որոշ տիպի լեզուներ մուլտիպլիկատիվ օպտիմալ են նման բոլոր լեզուների բազմության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Захарян Н. П.* О некоторых энтропийных свойствах алгорифмических языков. Сб. «Исследования по теории алгоритмов и математической логике». М., 1973, 178—204.
2. *Тер-Захарян Н. П.* О языке многоместных рекурсивных функций. ДАН СССР, 1973, 210 (3), 541—542.
3. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
4. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовы множества. УМН, 1972, т. XXVII, вып. 5 (187).
5. *Трахтенброт Б. А.*, Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, 1967.
6. *Davis M.* Computability and unsolvability, N. Y., 1958.
7. *Davis M., Putnam H., Robinson J.* The decision problem for exponential Diophantine equations, Ann. Math. 74 (1961), 425—436.
8. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965.