АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 15 НОЯБРЬ, 1979 ВЫПУСК 4

УДК 523.877

УРАВНЕНИЯ ЗВЕЗДНОЙ КОНВЕКЦИИ
II. ЗАМЫКАНИЕ СИСТЕМЫ

В. Н. КОВШОВ

Поступила 26 июня 1978
Пересмотрена 30 января 1979

Представлено замыкание полученной ранее [1] системы осредненных по ансамблю уравнений гидротермодинамики, предназначенных для описания турбулентной конвекции в звездах. В приближении полуэмпирических теорий турбулентности Васютинского и Монина получены выражения для турбулентных потоков энергии и напряжений Рейнольдса. Учитываются лучистый и молекулярный теплообмен пульсаций и сжимаемость газа. В рамках теории Васютинского коэффициенты турбулентного переноса образуют симметричные тензоры второго ранга. В случае их изотропности они описываются формулой, близкой к формуле Филлипса, и при незначительном упрощении аналогичны коэффициентам молекулярного переноса.

1. *Введение.* В предыдущей работе [1] были представлены осредненные по ансамблю уравнения турбулентной звездной конвекции. Уравнения движения и непрерывности были упрощены путем использования массовой скорости газа. Уравнение энергии было упрощено в квазилинейном приближении, когда пульсации термодинамических величин предполагаются малыми и отбрасываются их произведения. Необходимые условия такого приближения требуют пространственной и временной мелкомасштабности турбулентных пульсаций по сравнению с пространственными и временными шкалами конвектирующей среды по температуре и давлению. В уравнении энергии при этом средние термодинамические величины и средний лучистый поток энергии в членах, малых по пульсациям термодинамических величин, можно считать постоянными и можно пренебрегать пульсациями мощности внутреннего источника тепла.

Система осредненных уравнений [1] — неполная, и настоящая работа посвящена ее замыканию. Эту проблему мы будем решать традиционным путем, выражая дополнительные неизвестные системы через ее искомые неизвестные с помощью полуэмпирических теорий турбулентности. Из последних будем использовать теории Васютинского [2] и Монина [3, 4]. При этом теорию Монина мы обобщим на сжимаемую среду, а теорию Васютинского разовьем применительно к конвективной проблеме с учетом лучистого и молекулярного теплопереноса, внутреннего выделения тепла и теплообмена турбулентных пульсаций. По-прежнему будем использовать массовую скорость для описания средних движений газа и квазилинейное приближение уравнения энергии. Для замыкания системы осредненных уравнений будем также использовать полные (неосредненные) уравнения звездной конвекции, упрощенные в работе [1].

При ссылках на формулы работы [1] будем их снабжать римской цифрой I.

2. *Полные и осредненные уравнения*. Напомним необходимые уравнения и обозначения работы [1]. Величины ρ, p и T обозначают плотность, давление и абсолютную температуру; s, w и e — удельные энтропию, энтальпию и внутреннюю энергию; Q и k — мощность внутреннего источника тепла и коэффициент поглощения на единицу объема; $\varkappa_r$ и $\varkappa_c$ — коэффициенты лучистой и молекулярной теплопроводности; B — функция Планка. Все эти термодинамические величины считаются известными функциями p и T.

Среднее по ансамблю обозначается горизонтальной чертой сверху или индексом нуль снизу. Скорость газа $\boldsymbol{v}$ и любая термодинамическая величина $\omega(p, T)$ представляются в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi} \quad \text{и} \quad \omega = \omega_0 + \omega_1, \tag{2.1}$$

где

$$\boldsymbol{u} = \overline{\rho \boldsymbol{v}}/\rho_0 \quad \text{и} \quad \omega_0 = \omega(p_0, T_0) \tag{2.2}$$

— массовая скорость газа и среднее значение ω, а $\boldsymbol{\xi}$ и ω_1 — пульсации, удовлетворяющие условиям

$$\overline{\rho \boldsymbol{\xi}} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\omega_1} = 0. \tag{2.3}$$

В инерциальной прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) полные уравнения звездной конвекции, упрощенные в работе [1], можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v_m}{\partial x_m}, \tag{2.4}$$

$$\rho \frac{dv_m}{dt} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} - \frac{\partial p}{\partial x_m}, \tag{2.5}$$

$$\rho_0 T_0 \frac{ds}{dt} = A_0 - \gamma_0(\tilde{k})\, T_1, \tag{2.6}$$

где

$$A_0 = Q_0 - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\overline{F}_n - \varkappa_{c0}\frac{\partial T_0}{\partial x_n}\right), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \overline{F}_n}{\partial x_n} = 4\pi k_0 \left(B_0 - \int B_0' e^{-\tau_0} \frac{k_0 dr}{4\pi r^2}\right), \tag{2.8}$$

$$\gamma_0(\tilde{k}) = 3\varkappa_{r0} k_0^2 \left(1 - \frac{k_0}{\bar{k}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{k_0}{\bar{k}}\right) + \varkappa_{c0} \bar{k}^2. \tag{2.9}$$

Здесь $m, n = 1, 2, 3$; t — время; φ — гравитационный потенциал; $\overline{F}_n$ — средний лучистый поток энергии; τ_0 — средняя оптическая толща расстояния r между фиксированной точкой x и текущей точкой x'; dr — элемент объема. При упрощении правой стороны уравнения энергии (2.6) турбулентные пульсации температуры представлялись суперпозицией пространственных фурье-гармоник с одним и тем же волновым числом $\bar{k}$ (см. (6.3) I). Такую аппроксимацию мы отнесем к приближению теории пути перемешивания, считая $\bar{k}$ локальной характеристикой турбулентности.

Соответствующие (2.4) — (2.6) осредненные по ансамблю уравнения в работе [1] имеют вид

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_n}(\rho_0 u_n), \tag{2.10}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right) = -\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} + \frac{\partial p_0}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_n}\overline{\rho \xi_m \xi_n}\right), \tag{2.11}$$

$$\rho_0 T_0\left(\frac{\partial s_0}{\partial t} + u_n \frac{\partial s_0}{\partial x_n}\right) = A_0 - \frac{\partial}{\partial x_n}(\rho_0 T_0 \overline{\xi_n s_1}). \tag{2.12}$$

Здесь искомыми неизвестными служат величины u, p_0 и T_0, а дополнительными неизвестными — напряжения Рейнольдса — $\overline{\rho \xi_m \xi_n}$ и турбулентный поток энтропии $\overline{\xi_n s_1}$. Наряду с (2.12) осредненное уравнение энергии было получено в другом виде

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = A_0 - \frac{\partial \overline{Q}_n}{\partial x_n} + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{2.13}$$

где

$$E_0 = \rho_0\left(e_0 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2\rho_0}\overline{\rho \xi^2} + \varphi\right) \tag{2.14}$$

— средняя полная энергия газа на единицу объема и

$$\overline{Q}_n = u_n (E_0 + p_0) + \rho_0 \overline{\xi_n w_1} + \frac{1}{2} \overline{\xi_n (\rho \xi^2)} + u_m \overline{\rho \xi_m \xi_n} \tag{2.15}$$

— средний конвективный поток энергии. Сюда еще входят дополнительные неизвестные: кинетическая энергия пульсаций $(1/2)\overline{\rho \xi^2}$, ее турбулентный поток $(1/2)\overline{\xi_n (\rho \xi^2)}$ и турбулентный поток антальпии $\overline{\xi_n w_1}$.

3. *Турбулентные потоки энергии.* Сначала выразим в терминах p_0 и T_0 дополнительные неизвестные $\overline{\xi_n w_1}$, $\overline{\xi_n s_1}$ и $(1/2)\overline{\xi_n (\rho \xi^2)}$. Поскольку из соотношений (2.7) I и (2.19) I в квазилинейном приближении следует

$$w_1 = T_0 s_1 + p_1/\rho_0, \tag{3.1}$$

то $\overline{\xi_n w_1}$ сводится к моментам $\overline{\xi_n s_1}$ и $\overline{\xi_n p_1}$.

Для решения этой задачи воспользуемся полуэмпирической теорией турбулентности — обобщенной теорией пути перемешивания Васютинского [2]. Вкратце ее суть такова. Средние типа $\overline{\xi_n s_1}$ находятся осреднением по разным частицам (пульсациям) в один и тот же текущий момент времени t: $\overline{(\xi_n s_1)_t} \neq 0$. С другой стороны, для каждой i-той частицы можно найти такой свой предыдущий момент времени $t - \Theta_i(t)$, что осреднение $\xi_n s_1$ по разным частицам, взятым в эти разнесенные предыдущие моменты времени, дает нуль: $\overline{(\xi_n s_1)_{t - \Theta_i(t)}} = 0$. Интегрируя лагранжевы производные сомножителей по времени от $t - \Theta_i(t)$ до t, можно найти для каждой частицы изменение ξ_n и s_1 за время $\Theta_i(t)$, а затем разность $(\xi_n s_1)_t - (\xi_n s_1)_{t - \Theta_i(t)}$. Последующим осреднением этих разностей по всем i-тым частицам находят искомые средние

$$\overline{\xi_n s_1} = \overline{(\xi_n s_1)_t} - \overline{(\xi_n s_1)_{t - \Theta_i(t)}}.$$

Предполагается, что время запаздывания $\Theta_i(t)$ можно выбрать одним и тем же для $n = 1, 2, 3$ и достаточно малым, чтобы лагранжевы производные сомножителей не сильно менялись за это время. Переходя от разных i-тых частиц к их координатам, получают время запаздывания как функцию координат и времени $\Theta(x, t)$.

Следуя этой теории, перейдем к лагранжеву описанию движения, когда величины ξ_n, s_1, p_1 и т. д. для фиксированной частицы среды являются функциями только времени t. Вместо интегрирования лагранжевых производных по времени от t_* до $t = t_* + \Theta$, как это делал Васютинский, мы будем разлагать эти величины в ряды по Θ, оставляя в них только линейные члены разложения:

$$\xi_n(t) \equiv \xi_n(t_* + \Theta) = \xi_n(t_*) + \left.\frac{d\xi_n}{dt}\right|_{t_*} \Theta, \tag{3.2}$$

$$s_1(t_*) \equiv s_1(t - \Theta) = s_1(t) - \left.\frac{ds_1}{dt}\right|_t \Theta, \tag{3.3}$$

$$p_1(t_*) \equiv p_1(t - \Theta) = p_1(t) - \left.\frac{dp_1}{dt}\right|_t \Theta. \tag{3.4}$$

В отличие от Васютинского мы будем брать точные значения лагранжевых производных $d\xi_n/dt$ и ds_1/dt, которые найдем вычитанием полных и осредненных уравнений движения (2.5), (2.11) и энергии (2.6), (2.12):

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt} - \frac{du_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + v_q \frac{\partial u_n}{\partial x_q}\right) =$$

$$= -\xi_q \frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_n} - \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_n\xi_q}, \tag{3.5}$$

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{ds_0}{dt} = \frac{ds}{dt} - \left(\frac{\partial s_0}{\partial t} + v_q \frac{\partial s_0}{\partial x_q}\right) =$$

$$= -\xi_q \frac{\partial s_0}{\partial x_q} - \frac{\chi_0}{\rho_0}\frac{T_1}{T_0} + \frac{1}{\rho_0 T_0}\frac{\partial}{\partial x_q}(\overline{\rho_0 T_0 \xi_q s_1}), \quad (q = 1, 2, 3). \tag{3.6}$$

В последнем равенстве благодаря квазилинейному приближению можно вынести $\rho_0 T_0$ как постоянную за знак производной и подставить T_1/T_0 из соотношения (см. (4.10) I)

$$s_1 = \frac{c_{p_0}}{T_0}(T_1 - \gamma_0 p_1), \tag{3.7}$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении и

$$\gamma = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{c_p \rho}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \tag{3.8}$$

— известная функция p и T. Тогда

$$\frac{ds_1}{dt} = -\xi_q \frac{\partial s_0}{\partial x_q} - \frac{\chi_0}{c_{p_0}\rho_0} s_1 - \frac{\chi_0\gamma_0}{\rho_0 T_0} p_1 + \frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\xi_q s_1}. \tag{3.9}$$

Вводя (3.5) и (3.9) в разложения (3.2) и (3.3), получим

$$\xi_n - \frac{1}{\rho_0}\Theta \frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_n\xi_q} = \xi_n^* - \xi_q^*\Theta\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \frac{1}{\rho^*}\Theta\left(\frac{\rho_1^*}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_n} - \frac{\partial p_1^*}{\partial x_n}\right). \tag{3.10}$$

$$\left(1+\frac{\gamma_{1n}}{c_{pn}\rho_0}\Theta\right)s_1+\xi_q\Theta\frac{\partial s_0}{\partial x_q}+\frac{\gamma_{10}\tau_0}{\rho_0 T_0}\Theta p_1-\Theta\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\xi_q s_1}=s_1^*, \qquad (3.11)$$

где величины со звездочкой относятся к моменту t_*. Разложение же (3.4) представим в виде

$$p_1-\delta p_1=p_1^*, \qquad (3.12)$$

где ввели изменение избытка давления частицы вдоль ее пути перемешивания

$$\delta p_1=\frac{dp_1}{dt}\Theta. \qquad (3.13)$$

Теперь умножим левые и правые стороны равенств (3.11) и (3.12) соответственно на левую и правую сторону (3.10), опуская члены порядка малости λ^2, Θ^2 и выше, где λ — параметр малости относительных пульсаций термодинамических величин (см. (3.8) I). Последующее осреднение полученных равенств дает

$$\overline{\left(1+\frac{\gamma_{1n}}{c_p\rho_0}\Theta\right)\xi_n s_1}+\overline{\xi_n\xi_q\Theta}\frac{\partial s_0}{\partial x_q}+\frac{\gamma_{10}\tau_0}{\rho_0 T_0}\overline{\xi_n p_1\Theta}-\overline{\xi_n\Theta}\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\xi_q s_1}+$$
$$+\frac{1}{\rho_0}\overline{s_1\Theta}\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_n\xi_q}=\overline{\xi_n^* s_1^*}-\overline{\xi_q^* s_1^*\Theta}\frac{\partial u_n}{\partial x_q}, \qquad (3.14)$$

$$\overline{\xi_n p_1}-\overline{\xi_n\delta p_1}-\frac{1}{\rho_0}\overline{p_1\Theta}\frac{\partial}{\partial x_p}\overline{\rho\xi_n\xi_q}=\overline{\xi_n^* p_1^*}-\overline{\xi_q^* p_1^*\Theta}\frac{\partial u_n}{\partial x_q}. \qquad (3.15)$$

Здесь в членах порядка малости $\lambda\Theta$ в силу знакопостоянства $\Theta\geqslant 0$ без существенной погрешности можно положить

$$\overline{\xi_n\omega_1\Theta}=\overline{\xi_n\omega_1}\Theta_0, \quad \overline{\xi_n^*\omega_1^*\Theta}=\overline{\xi_n^*\omega_1^*}\Theta_0, \qquad (3.16)$$

$$\overline{\xi_n\Theta}=\overline{r_n}=0, \quad \overline{\omega_1\Theta}=0, \qquad (3.17)$$

где ω — любая термодинамическая величина и

$$r=\xi\Theta \qquad (3.18)$$

— путь перемешивания частицы за время Θ в локальной системе координат, движущейся со скоростью u. Кроме того, согласно основному постулату теории Васютинского, можно выбрать такие времена запаздывания $\bar{\Theta}=\bar{\Theta}(x, t)$ и $\Theta=\Theta(x, t)$, при которых

$$\overline{\xi_n^* s_1^*}=0 \quad \text{и} \quad \overline{\xi_n^* p_1^*}=0 \qquad (3.19)$$

соответственно. Тогда равенства (3.14) и (3.15) дают

$$\left(1+\frac{\tau_0}{c_p\rho_0}\bar{H}_0\right)\overline{\xi_n s_1}=-\overline{\xi_n\xi_q\bar{H}}\frac{\partial s_0}{\partial x_q}-\frac{\tau_0\alpha_0}{\rho_0 T_0}\bar{H}_0\overline{\xi_n p_1}, \qquad (3.20)$$

$$\overline{\xi_n p_1}=\overline{\xi_n\delta p_1}. \qquad (3.21)$$

Далее, следуя Васютинскому, предположим, что корреляция пульсации скорости ξ_n с величинами δp_1 и $(\rho\xi^2-\overline{\rho\xi^2})$ существенно меньше, например, ее корреляции с s_1, и что с точностью квазилинейного приближения и теории пути перемешивания

$$\overline{\xi_n\delta p_1}=0 \quad \text{и} \quad \overline{\xi_n(\rho\xi^2-\overline{\rho\xi^2})}=0. \qquad (3.22)$$

В самом деле, знак и величина избытка энтропии s_1 частицы газа должны существенно зависеть от направления и быстроты ее перемещения в среде с $\nabla s_0\neq 0$. В то же время изменение избытка давления частицы δp_1 определяется, в первую очередь, случайным распределением пульсации скорости $\xi(x,t)$ в окрестности частицы. Поэтому δp_1 слабо связано со скоростью самой частицы. Аналогично поведение и величины $(\rho\xi^2-\overline{\rho\xi^2})$. Благодаря случайному характеру взаимодействия пульсаций вероятность смещения более энергичных частиц и менее энергичных частиц в любом заданном направлении примерно одинакова. Некоторое нарушение такого равновесия может внести градиент $\nabla\overline{\rho\xi^2}\neq 0$. При этом можно предположить линейную зависимость второй величины (3.22) от производных $\partial\overline{\rho\xi^2}/\partial x_q$. Однако таким вкладом мы будем пренебрегать.

Из соотношений (3.21) и (3.22) с учетом (2.3) найдем

$$\overline{\xi_n p_1}=0, \qquad (3.23)$$

$$\frac{1}{2}\overline{\xi_n(\rho\xi^2)}=\frac{1}{2}(\overline{\rho\xi^2})\,\bar{\xi}_n=-\frac{1}{2}(\overline{\rho\xi^2})\,\overline{\frac{\rho_1}{\rho_0}\xi_n}. \qquad (3.24)$$

В последнем равенстве благодаря квазилинейному приближению можно заменить ρ на ρ_0 и ввести ρ_1/ρ_0 из соотношения (см. (3.11))

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}=-\alpha_0\frac{T_1}{T_0}+\beta_0\frac{p_1}{p_0}, \qquad (3.25)$$

где

$$\alpha_0=-\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)_p, \qquad \beta_0=\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln p}\right)_T. \qquad (3.26)$$

Тогда в силу (3.23) равенства (3.24) и (3.20) дают

$$\frac{1}{2}\overline{\xi_n(\rho\xi^2)} = \frac{1}{2}\frac{\alpha_0\rho_0}{T_0}\,\overline{(\xi^2)}\,\overline{\xi_n T_1}, \tag{3.27}$$

$$\overline{\xi_n s_1} = -\omega_0 K_{nq}\frac{\partial s_0}{\partial x_q}, \tag{3.28}$$

где

$$K_{nq} = \overline{\xi_n \xi_q \tilde{\Theta}} \tag{3.29}$$

— коэффициенты турбулентной диффузии, образующие симметричный тензор второго ранга, и

$$\omega_0 = (1 + \tilde{\Theta}_0/t_0)^{-1} \tag{3.30}$$

— множитель, учитывающий теплообмен пульсаций. Величина

$$t_0 = c_{p0}\rho_0/\varkappa_0(\tilde{k}) \tag{3.31}$$

является временем затухания температурных возмущений с волновым числом $\tilde{k}$ за счет лучистой и молекулярной теплопроводности (сравни [5]). Согласно (3.30) $\omega_0 \to 0$ при $\tilde{\Theta}_0/t_0 \to \infty$ и $\omega_0 \to 1$ при $\tilde{\Theta}_0/t_0 \to 0$. Это следует и из физических соображений. С ростом времени жизни турбулентных пульсаций по сравнению со временем их теплового затухания должен возрастать их теплообмен и убывать турбулентный теплоперенос. При $\omega_0 = 1$ соотношение (3.28) аналогично формуле для турбулентного потока примеси, формально предложенной Мониным [4 и 6, § 6].

Наконец, учитывая соотношения квазилинейного приближения (3.1), (3.7) и

$$\frac{\partial s_0}{\partial x_n} = \frac{c_{p0}}{T_0}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_n} - \gamma_0\frac{\partial p_0}{\partial x_n}\right) \tag{3.32}$$

(см. (4.9) I), а также равенства (3.23) и (3.28), получим следующее выражение для турбулентного потока тепла:

$$\rho_0\overline{\xi_n w_1} = \rho_0 T_0\overline{\xi_n s_1} = c_p\rho_0\overline{\xi_n T_1} = -c_p\rho_0\omega_0 K_{nq}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_q} - \gamma_0\frac{\partial p_0}{\partial x_q}\right). \tag{3.33}$$

При $\omega_0 = 1$ это выражение совпадает с формулой для турбулентного потока тепла, предложенной Васютинским [2, § 2.5]. Турбулентный поток кинетической энергии пульсаций находится подстановкой $\overline{\xi_n T_1}$ из (3.33) в (3.27).

4. *Напряжения Рейнольдса.* Выразим теперь в терминах средней скорости u турбулентные напряжения Рейнольдса $-\overline{\rho\xi_m\xi_n}$. Сначала мы получим для них выражение, обобщая на сжимаемую среду феноменологический вывод Монина [3, 4 и 6, § 6] для несжимаемой жидкости. А именно, согласно уравнению (2.11), величины $\overline{\rho\xi_m\xi_n}$ имеют смысл тензора напряжений, определяющего вектор напряжения или силу

$$p_n^\nu = \overline{\rho\xi_m\xi_n}\nu_m, \tag{4.1}$$

с которой турбулентные пульсации действуют на единичную площадку выделенного в среде элемента поверхности с нормалью ν. Пусть среднее движение газа отсутствует или носит характер движения твердого тела, то есть не сопровождается относительными перемещениями его частей. Тогда, обобщая закон Паскаля, естественно предположить, что вектор напряжения (4.1) направлен по нормали к элементу поверхности и не зависит от его ориентации:

$$p_n^\nu = a\nu_n = a\delta_{mn}\nu_m, \tag{4.2}$$

где a — скаляр, δ_{mn} — тензор Кронекера. Отсюда

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = a\delta_{mn}, \tag{4.3}$$

а из условия свертки этого изотропного тензора

$$a = \frac{1}{3}\overline{\rho\xi^2}. \tag{4.4}$$

Если же среднее движение газа сопровождается относительными перемещениями его частей, то напряжения Рейнольдса должны еще выполнять роль, аналогичную роли молекулярных вязких напряжений σ_{mn} при обычных движениях газа (см. (2.2) I). Тогда, повторяя дословно рассуждения Ландау и Лифшица [7, § 15], можно предположить линейную зависимость тензора $\overline{\rho\xi_m\xi_n}$ от тензора скоростей деформации

$$D_{pq} = \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \quad (p, q = 1, 2, 3). \tag{4.5}$$

Учитывая еще (4.3), будем иметь

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = a\delta_{mn} - \eta_{mnpq}D_{pq}, \tag{4.6}$$

где η_{mnpq} — коэффициенты турбулентной динамической вязкости, образующие тензор четвертого ранга, симметричный по индексам m, n и p, q в силу симметрии тензоров $\overline{\rho\xi_m\xi_n}$ и D_{pq}.

Выражение (4.6) само по себе является малосодержательным, так как вместо неизвестных $\overline{\rho\xi_m\xi_n}$ вводит много большее число неизвестных $\tau_{l_{mnpq}}$. Исходя из аналогии с молекулярной вязкостью и используя тензор масштабов турбулентности второго ранга, Монин предположил, что тензор $\tau_{l_{mnpq}}$ является вырожденным

$$\tau_{l_{mnpq}} = \frac{1}{2}\left(\tau_{l_{mp}}\delta_{nq} + \tau_{l_{np}}\delta_{mq}\right) \tag{4.7}$$

и для несжимаемой жидкости

$$\rho_0\overline{\xi_m\xi_n} = \frac{1}{3}\rho_0\overline{\xi^2}\delta_{mn} - \frac{1}{2}\left(\tau_{l_{mq}}D_{qn} + \tau_{l_{nq}}D_{qm}\right). \tag{4.8}$$

Если же учесть, что тензор $\tau_{l_{mnpq}}$ должен быть симметричным не только по индексам m и n, но также по индексам p и q, то в рамках гипотезы Монина вместо (4.7) следует положить

$$\tau_{l_{mnpq}} = \frac{1}{4}\left[\tau_{l_{mp}}\delta_{nq} + \tau_{l_{np}}\delta_{mq} + \tau_{l_{mq}}\delta_{np} + \tau_{l_{nq}}\delta_{mp} + b\left(\tau_{l_{mn}} + \tau_{l_{nm}}\right)\delta_{pq}\right], \tag{4.9}$$

где b — скаляр. Тогда (4.6) дает

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = a\delta_{mn} - \frac{1}{2}\left(\tau_{l_{mq}}\Phi_{qn} + \tau_{l_{nq}}\Phi_{qm}\right), \tag{4.10}$$

где

$$\Phi_{pq} = D_{pq} + b\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{pq} \quad (l = 1, 2, 3) \tag{4.11}$$

— симметричный тензор второго ранга. Для несжимаемой жидкости, когда $\rho = \rho_0$ и $\partial u_l/\partial x_l = 0$, выражение (4.10) принимает вид (4.8). Свертка (4.10) по индексам m и n дает уравнение $\tau_{l_{nq}}\Phi_{qn} = 0$ или

$$b\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = -\frac{\tau_{l_{ij}}}{\tau_{l_{ll}}}D_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{4.12}$$

для нахождения скаляра b по заданным $\tau_{l_{ij}}$. Благодаря (4.12) выражение (4.11) принимает вид

$$\Phi_{pq} = D_{pq} - \delta_{pq}\frac{\tau_{l_{ij}}}{\tau_{l_{ll}}}D_{ji}. \tag{4.13}$$

Чтобы установить структуру коэффициентов турбулентной вязкости η_{pq}, подобную (3.29), получим теперь выражение для напряжений Рейнольдса, используя теорию Васютинского [2]. Отметим, что сам Васютинский получил для них выражения в сферических координатах применительно к глобальным движениям в звездах и в атмосферах планет. Мы же будем использовать декартовы координаты и технику раздела 3 данной работы. При этом будет установлено, что теория Васютинского дает однозначное представление напряжений Рейнольдса только для несжимаемой жидкости. К этому случаю и относятся напряжения Рейнольдса в форме Васютинского [2, § 3, 1], используемые в работах по меридиональной циркуляции и дифференциальному вращению звезд (см. [8, 9]).

Итак, перейдем к лагранжеву описанию движения и запишем следующие разложения по Θ, оставляя в них только линейные члены:

$$\rho(t_*) \equiv \rho(t-\Theta) = \rho(t) - \frac{d\rho}{dt}\Big|_t \Theta, \tag{4.14}$$

$$\xi_n(t_*) = \xi_n(t-\Theta) = \xi_n(t) - \frac{d\xi_n}{dt}\Big|_t \Theta. \tag{4.15}$$

Вводя сюда лагранжевы производные (2.4) и (3.5), получим

$$\rho^* = \rho + \rho\Theta\frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \rho\Theta\frac{\partial \xi_q}{\partial x_q}, \tag{4.16}$$

$$\xi_n^* = \xi_n + \xi_q\Theta\frac{\partial u_n}{\partial x_q} - \frac{1}{\rho}\Theta\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_n} - \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) - \frac{1}{\rho_0}\Theta\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_n\xi_q}. \tag{4.17}$$

Используя эти выражения, легко найдем без малых $O(\Theta^2)$

$$\overline{\rho^*\xi_m^*\xi_n^*} = \overline{\rho\xi_m\xi_n} + \overline{\rho\xi_m\xi_q\Theta}\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \overline{\rho\xi_n\xi_q\Theta}\frac{\partial u_m}{\partial x_q} + \overline{\rho\xi_m\xi_n\Theta}\frac{\partial u_q}{\partial x_q} +$$
$$+ \left(\overline{\xi_m\Theta\frac{\partial p_1}{\partial x_n}} + \overline{\xi_n\Theta\frac{\partial p_1}{\partial x_m}}\right) - \frac{1}{\rho_0}\left(\overline{\rho_1\xi_m\Theta}\frac{\partial p_0}{\partial x_n} + \overline{\rho_1\xi_n\Theta}\frac{\partial p_0}{\partial x_m}\right) -$$
$$- \frac{1}{\rho_0}\left(\overline{\rho\xi_m\Theta}\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_n\xi_q} + \overline{\rho\xi_n\Theta}\frac{\partial}{\partial x_q}\overline{\rho\xi_m\xi_q}\right) + \overline{\rho\xi_m\xi_n\Theta\frac{\partial \xi_q}{\partial x_q}}. \tag{4.18}$$

Согласно основному постулату теории Васютинского можно выбрать такое время запаздывания $\Theta(\vec{x}, t)$, при котором

$$\overline{\rho^*\xi_m^*\xi_n^*} = 0 \quad (m \neq n). \tag{4.19}$$

Кроме того, с точностью приближения (4.10) напряжения Рейнольдса (4.18) должны содержать только член изотропного турбулентного давления и члены с производными от средней скорости. Для этого в выражении (4.18) следует положить с учетом (4.19)

$$\overline{\rho^* \xi^*_m \xi^*_n} = \frac{1}{3}\overline{\rho^* (\xi^*)^2}\,\delta_{mn} \tag{4.20}$$

и опустить члены порядка малости $t\Theta$, вводя $\rho = \rho_0 + \rho_1$. После этого следует еще использовать (3.17) и пренебречь несущественной корреляцией $\partial\xi_q/\partial x_q$ с диадой $\xi_m\xi_n$. Тогда найдем

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = \frac{1}{3}\rho^*\overline{(\xi^*)^2}\,\delta_{mn} - \rho_0\left(\nu_{mq}\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \nu_{nq}\frac{\partial u_m}{\partial x_q} + \nu_{mn}\frac{\partial u_q}{\partial x_q}\right), \tag{4.21}$$

где введены коэффициенты турбулентной кинематической вязкости

$$\nu_{nq} = \overline{\xi_n\xi_q\Theta}, \tag{4.22}$$

образующие симметричный тензор второго ранга.

Если же, подобно Васютинскому [2, § 3.1], выбрать $\Theta(x, t)$ таким, чтобы вместо (4.19) обращались в нуль величины

$$\overline{\rho\xi^*_m\xi^*_n} = 0 \quad (m \neq n), \tag{4.23}$$

то вместо (4.21) получим выражение

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = \frac{1}{3}\overline{\rho(\xi^*)^2}\,\delta_{mn} - \rho_0\left(\nu_{mq}\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \nu_{nq}\frac{\partial u_m}{\partial x_q}\right). \tag{4.24}$$

Отсюда становится ясным, что теория Васютинского дает однозначное представление напряжений Рейнольдса только для несжимаемой жидкости, когда $\rho = \rho^*$ и $\partial u_q/\partial x_q = 0$. С учетом сжимаемости она оставляет неопределенными скалярный множитель изотропного члена и вес дополнительного члена с $\partial u_q/\partial x_q$. Поэтому в общем случае

$$\overline{\rho\xi^*_m\xi_n} = c\delta_{mn} - \rho_0\left(\nu_{mq}\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \nu_{nq}\frac{\partial u_m}{\partial x_q} + d\nu_{mn}\frac{\partial u_q}{\partial x_q}\right), \tag{4.25}$$

где c и d — некоторые скаляры.

Требуя согласия этого выражения с (4.10) при отсутствии сдвигов средней скорости газа ($\partial u_n/\partial x_q = 0$ для всех n, $q = 1, 2, 3$) найдем

$$c = a. \tag{4.26}$$

При этом свертка (4.25) по индексам m и n дает уравнение

$$d\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -2\frac{\nu_{ij}}{\nu_{ll}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{4.27}$$

для нахождения скаляра d по заданным ν_{ij}. Благодаря последним двум равенствам выражение (4.25) принимает вид

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = a\delta_{mn} - \rho_0\left(\nu_{mq}\frac{\partial u_n}{\partial x_q} + \nu_{nq}\frac{\partial u_m}{\partial x_q} - 2\delta_{mn}\frac{\nu_{ij}}{\nu_{ll}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \qquad (4.28)$$

Требуя согласия (4.28) и (4.10) с (4.13) при средних кубических деформациях газа ($\partial u_n/\partial x_q = 0$ для всех $n \neq q$), найдем искомую связь

$$\eta_{mn} = \rho_0\nu_{mn}. \qquad (4.29)$$

При этом, благодаря симметрии тензора ν_{mn}, правые стороны (4.12) и (4.27) равны, откуда

$$d = b. \qquad (4.30)$$

Наконец, пренебрегая несущественной корреляцией ρ_1 и ξ^2, введем аналогичное (3.17) упрощение

$$\overline{\rho_1\xi^2} = 0, \qquad (4.31)$$

при котором

$$\overline{\rho\xi^2} = \rho_0\overline{\xi^2}. \qquad (4.32)$$

5. *Гипотеза изотропности тензоров K_{rq} и ν_{nq}.* На начальном этапе изучения турбулентной конвекции в звездах представляется разумным использовать гипотезу изотропности коэффициентов турбулентной диффузии и вязкости:

$$K_{nq} = K\delta_{nq} \text{ и } \nu_{nq} = \nu\delta_{nq}, \qquad (5.1)$$

где K и ν — скалярные коэффициенты турбулентной диффузии и вязкости. Такая гипотеза использована, например, для линейного анализа турбулентной конвекции в атмосфере Земли [10] и в звездах [11, 12], а также для расчета ячейковых моделей солнечной грануляции [13, 14]. Такая же гипотеза широко используется геофизиками в работах по динамике мезометеорологических и, в частности, конвективных процессов [15, 16].

С учетом (5.1) свертка тензоров (3.29) и (4.22) дает

$$K = \frac{1}{3}\overline{\xi^2\Theta} \text{ и } \nu = \frac{1}{3}\overline{\xi^2\Theta} \qquad (5.2)$$

или

$$K = \frac{1}{3}\overline{\xi^2}\Theta_M \text{ и } \nu = \frac{1}{3}\overline{\xi^2}\Theta_M, \qquad (5.3)$$

где

$$\tilde{\Theta}_M = \overline{\xi^2\tilde{\Theta}}/\overline{\xi^2} \quad \text{и} \quad \Theta_M = \overline{\xi^2\Theta}/\overline{\xi^2} \tag{5.4}$$

— средние взвешенные времена запаздывания по энергии и по импульсу. Близкое к (5.3) выражение для турбулентной вязкости было предложено Филлипсом [17] применительно к турбулентному течению со сдвигом средней скорости.

Благодаря (5.1) выражение (3.33) принимает вид

$$\rho_0\overline{\xi_n w_1} = \rho_0 T_0\overline{\xi_n s_1} - c_p\rho_0\overline{\xi_n T_1} = -\rho_0 c_p K_\theta\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_n} - \gamma_a\frac{\partial p_0}{\partial x_n}\right), \tag{5.5}$$

где введен коэффициент турбулентной температуропроводности

$$K_\theta = m_\theta K. \tag{5.6}$$

Аналогичное выражение для турбулентного потока тепла может быть получено путем модификации полуэмпирических теорий Эпика [18] и Витенэе [19] и было представлено нами ранее [20].

Введение (5.1) в (4.27) и (4.30) дает $d = b = -2/3$. Тогда выражения (4.10) и (4.25) с учетом (4.4), (4.5), (4.11), (4.26) и (4.32) принимают следующий одинаковый вид.

$$\overline{\rho\xi_m\xi_n} = \frac{1}{3}\rho_0\overline{\xi^2}\delta_{mn} - \rho_0\nu\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{mn}\frac{\partial u_q}{\partial x_q}\right). \tag{5.7}$$

Таким образом, вместо 16 дополнительных независимых неизвестных $\overline{\rho\xi_m\xi_n}$, $\overline{\rho\xi^2}$, $\overline{\xi_n(\rho\xi^2)}$, $\overline{\xi_n s_1}$ и $\overline{\xi_n w_1}$ (см. раздел 2) мы имеем теперь только 5 — K, ν, $\overline{\xi^2}$, $\tilde{\Theta}_0$ и $\tilde{k}$ (см. (3.27), (3.30), (3.31), (4.32) и (5.5) — (5.7)).

6. *Дальнейшие упрощения и замыкание системы.* Представим формулы (3.29) и (4.22) с помощью (3.18) в виде

$$K_{nq} = \overline{\tilde{r}_n\tilde{r}_q}/\tilde{\Theta} \quad \text{и} \quad \nu_{nq} = \overline{r_n r_q}/\Theta, \tag{6.1}$$

где $\tilde{r}_n = \xi_n\tilde{\Theta}$ и $r_n = \xi_n\Theta$ — пути перемешивания пульсаций по энергии и по импульсу. Свертка этих тензоров с учетом (5.1) дает

$$K = \frac{1}{3}\overline{\tilde{r}^2}/\tilde{\Theta} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{3}\overline{r^2}/\Theta. \tag{6.2}$$

Пренебрегая несущественной корреляцией положительных сомножителей в (5.2) и (6.2), найдем

$$K = \frac{1}{3}\overline{\xi^2}\tilde{\Theta}_0 \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{3}\overline{\xi^2}\Theta_0,$$
$$K = \frac{1}{3}\overline{\tilde{r}^2}/\tilde{\Theta}_0 \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{3}\overline{r^2}/\Theta_0, \tag{6.3}$$

откуда

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{\overline{\tilde{r}^2}\cdot\overline{\xi^2}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{3}\sqrt{\overline{r^2}\cdot\overline{\xi^2}}, \tag{6.4}$$

где $(\overline{\xi^2})^{1/2}$, $(\overline{\tilde{r}^2})^{1/2}$ и $(\overline{r^2})^{1/2}$ — среднеквадратичные скорость пульсаций и их пути перемешивания по энергии и по импульсу. Формулы (6.4) аналогичны формуле для молекулярной диффузии или вязкости.

Далее введем безразмерные пути перемешивания

$$\tilde{R} = \bar{k}(\overline{\tilde{r}^2})^{1/2} \quad \text{и} \quad R = \bar{k}(\overline{r^2})^{1/2} \tag{6.5}$$

и предположим, что

$$\tilde{R} = R = \text{const} = \sqrt{3}. \tag{6.6}$$

Ниже будет показано, почему здесь выбрано значение постоянной $\sqrt{3}$. Согласно (6.3) — (6.6) имеем

$$\overline{\tilde{r}^2} = \overline{r^2} = 3\bar{k}^{-2}, \tag{6.7}$$

$$\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 = (K\bar{k}^2)^{-1}, \tag{6.8}$$

$$K = \nu = \frac{1}{3}\sqrt{\overline{r^2}\,\overline{\xi^2}}. \tag{6.9}$$

Вводя (6.7) в (6.9), найдем

$$\overline{\xi^2} = 3(K\bar{k})^2, \tag{6.10}$$

а вводя (6.8) в (3.30) и учитывая (3.31) и (2.9), получим

$$w_0 = \left\{1 + \frac{1}{K}\left[K_{r_0}\,y\left(\frac{k_c}{\bar{k}}\right) + K_{r_c}\right]\right\}^{-1}, \tag{6.11}$$

где

$$y(x) = 3x^2(1 - x\,\mathrm{arcctg}\,x) \tag{6.12}$$

и введены коэффициенты лучистой и молекулярной температуропроводности

$$K_{r_e} = \frac{\varkappa_{r_e}}{c_{p_0}\rho_0} \text{ и } K_{c_0} = \frac{\varkappa_{c_0}}{c_{p_0}\rho_0}. \tag{6.13}$$

В (6.12) $y(x) \to 3x^2$ при $x \to 0$ и $y(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

Значение постоянной $\sqrt{3}$ в (6.6) выбрано из следующих соображений. Согласно экспериментальным данным Тэйлора [21] в турбулентном потоке за решеткой с шагом M средний размер вихря равен $l_2 \simeq 0.2\,M$, а путь перемешивания вихря равен $l_1 = 0.1\,M$ (см. также [22]). В наших обозначениях $l_1 = (\overline{r^2})^{1/2}$ и $l_2 = \pi/\bar{k}'$ при одной гармонике в разложении (6.3)1 для пульсаций температуры T_1. Поэтому в силу (6.5) $\bar{R} = \pi/2$. Мы взяли несколько большее значение $\bar{R} = \sqrt{3}$, чтобы учесть более одной гармоники в разложении (6.3)1 для T_1. С другой стороны, значение $\bar{R} = \sqrt{3}$ выбрано потому, что при этом выражение (6.11) в оптически непрозрачном случае дает полученный ранее [20] результат

$$w_0 = [1 + (K_{r_e} + K_{c_0})/K]^{-1} \text{ при } \frac{k_2}{\bar{k}} \to \infty. \tag{6.14}$$

Итак, согласно (6.9) — (6.11), мы имеем теперь только два дополнительных неизвестных K и $\bar{k}$. Если они заданы в виде определенных функций x и t, то соотношения (2.2), (4.9)1, (2.7), (2.8), (5.5) — (5.7) и (6.9) — (6.13) замыкают систему осредненных уравнений (2.10) — (2.12) относительно неизвестных u, p_0 и T_0. Вместо (2.12) можно использовать уравнение (2.13) с (2.14), (2.15), (3.27) и (4.32), а вместо K и $\bar{k}$ — $\overline{\varepsilon^2}$ и $\overline{r^2}$.

Простейшим заданием K и $\bar{k}$ служит гипотеза

$$K = \text{const}, \quad \bar{k} = \text{const} \tag{6.15}$$

или в силу (6.9) и (6.10)

$$\nu = K = \text{const}, \quad \overline{r^2} = \text{const}. \tag{6.16}$$

Такая гипотеза лежит в основе большинства геофизических работ по динамике мезомасштабных и крупномасштабных (для горизонтальных направлений) атмосферных процессов [15, 23].

Полученная система осредненных уравнений с замыкающей гипотезой (6.15) была положена в основу приближенной теории упорядоченной конвекции в звездах [24, 25] и апробирована на расчетах ячейковой модели солнечной грануляции [14].

Автор выражает признательность Г. Ф. Ситнику, Э. В. Кононовичу, А. И. Хлыстову, Н. И. Кожевникову за обсуждение работы и полезные замечания, а также с чувством благодарности отмечает внимание к работе, оказанное С. А. Капланом.

Государственный астрономический
институт им. П. К. Штернберга

THE STELLAR CONVECTION EQUATIONS. II. THE CLOSED SYSTEMS

V. I. KOVSHOV

The close of the ensemble of the system of average hydrothermodynamics equations, recieved earlier [1] for the turbulent stellar convection description is presented. The expressions for the turbulent streams of the energy and Reynolds' stresses are given in the approximation of turbulence semi-empirical theories of Waslutynski and Monin. The turbulent transfer coefficients are the symmetrical tensors of the second rank. In case of their isotropy they are described by the formula, like Phillips' formula and with the small simplification are analogous to the molecular transfer coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Ковшов*. Астрофизика, 15, 319, 1979.
2. *J. Waslutynski*. Astrophys. Norv., 4, 1946.
3. *А. С. Монин*. ДАН СССР, 75, 621, 1950.
4. *А. С. Монин*. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 452, 1956.
5. *E. A. Spiegel*. Ap. J., 126, 202, 1957.
6. *А. С. Монин, А. М. Яглом*, Статистическая гидромеханика, ч. 1, Наука, М., 1965.
7. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
8. *R. Kippenhahn*. Ap. J., 137, 664, 1963.
9. *И. М. Яворская*, сб. «Межпланетная среда и физика магнитосферы», Наука, М., 1972.
10. *A. L. Hales*. Proc. Roy. Soc., A151, 624, 1935.
11. *Ю. В. Вандакуров*. Конвекция на Солнце и 11-летний цикл, Наука, Л., 1976.
12. *K. H. Bohm*. Convective Modes with Turbulent Viscosity and Conductivity, Coll. intern. du CNRS, No. 250, Physique des Mouvements Dans les Atmospheres Stellaires, 57, 1976.

13. *R. Van der Borght*, M. N., 173, 85, 1975.
14. *В. И. Ковшов*, Астрон. цирк., № 965, 1977.
15. *Л. М. Гутман*, Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов, Гидрометеоиздат, Л., 1969.
16. *С. М. Шметер*, Физика конвективных облаков, Гидрометеоиздат, Л., 1972.
17. *O. M. Phillips*, J. Fluid Mech. 27, 131, 1967.
18. *E. J. Öpik*, M. N., 110, 559, 1959.
19. *E. Vitense*, Z. Astrophys., 32, 135, 1953.
20. *В. И. Ковшов*, Астрон. цирк., № 592, 1970.
21. *G. I. Taylor*, Proc. Roy. Soc., A151, 421, 1935.
22. *Г. Шлихтинг*, Теория пограничного слоя, Наука, М., 1969.
23. *С. С. Зилитинкевич, А. С. Монин*, Турбулентность в динамических моделях атмосферы, Наука, Л., 1971.
24. *В. И. Ковшов*, Сообщ. ГАИШ, № 183, 33, 1973.
25. *В. И. Ковшов*, Астрон. ж., (в печати).