А. В. ПЕТРОСЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Много работ посвящено изучению свойств функций алгебры логики с различных точек зрения. Однако ни одна из этих работ не посвящена изучению влияния изменения значения аргументов на значение функции. Некоторые результаты в этом направлении, для некоторых конкретных функций, имеются в работе [1]. В данной работе рассматриваются свойства функций алгебры логики именно с этой точки зрения. Эти свойства, как не трудно догадаться, тесно связаны с помехоустойчивостью схем, реализующих данную функцию алгебры логики.

В работе уточняется эта связь и предлагается метод для построения функции со сколь угодно высокой помехоустойчивостью.

Рассмотрим матрицу 1, имеющую 2^n строк и столбцов. Элементы матрицы A_{ij} представляют собой n-разрядные двоичные числа и образуются путем сложения по модулю два двоичных чисел i и j.

Матрица 1

№№ пп		0	1	...	2^n-2	2^n-1
	n-разрядные двоичные числа	0...00	0...01	...	1...10	1...11
0	0...00	0...00	0...01	...	1...10	1...11
1	0...01	0...01	0...00	...	1...11	1...10
⋮	...	...	...	...	...	...
2^n-2	1...10	1...10	1...11	...	0...00	0...01
2^n-1	1...11	1...11	1...10	...	0...01	0...00

Эта матрица обладает следующими свойствами:

1. $A_{ij}=0$ при $i=j$, т. е. элементы главной диагонали равны нулю.

2. $A_{ij} = A_{ji}$, т. е. матрица симметрична.

3. Для любых i, j_1 и j_2, $(j_1 \neq j_2)$ $A_{ij_1} \neq A_{ij_2}$, т. е. в любой строке нет двух одинаковых элементов.

Действительно, если для некоторых $j_1 \neq j_2$, $A_{ij_1} = A_{ij_2}$, т. е. $i \oplus j_1 = i \oplus j_2$, то прибавляя к обеим частям равенства по модулю два i, получим $j_1 = j_2$, что противоречит допущению. И аналогично, в любом столбце нет двух равных элементов.

4. Для любых фиксированных i_1, i_2 и j_1 существует единственное число j_2, так что $A_{i_1j_1} = A_{i_2j_2}$. Действительно, если

$$j_2 = i_1 \oplus j_1 \oplus i_2, \text{ то } A_{i_2j_2} = i_2 \oplus i_1 \oplus j_1 \oplus i_2 = i_1 \oplus j_1 = A_{i_1j_1}.$$

Однозначность следует из свойства 3.

Аналогично, если зафиксировать один элемент и некоторый столбец, в этом столбце обязательно найдется элемент, равный выбранному.

Теперь рассмотрим некоторые числа:

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \quad 0 \leqslant \eta_\nu \leqslant 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Составим при помощи матрицы 1 матрицу вероятностей (пока что это слово употребляется условно) следующим образом.

Элементы матрицы вероятностей

$$p(i \to j) = \eta_1^{\alpha_1} \cdot \eta_2^{\alpha_2}, \cdots, \eta_n^{\alpha_n}.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ суть значения разрядов двоичного числа, являющегося элементом i-й строки j-го столбца матрицы 1, а

$$\eta_i^{\alpha_i} = \begin{cases} \eta_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ 1 - \eta_i, & \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Сумма элементов одной строки (столбца) матрицы вероятностей равна 1, т. е.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} p(i \to j) = \sum_{j=1}^{2^n-1} p(i \to j) = 1.$$

Исходя из свойства матрицы 1 легко убедиться, что теорему 1 достаточно доказать для какой-либо одной строки. Докажем сначала, что сумма элементов первой строки не зависит от n. Для этого докажем, что для любого k сумма элементов первой строки матрицы вероятностей k-го порядка равна сумме тех же элементов матрицы $(k-1)$-го порядка. Действительно, сумма элементов первой строки матрицы вероятностей k-го порядка равна

$$S_k = \sum_{j=0}^{2^k-1} p(1 \to j) =$$

$$= [(1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots(1-\eta_k) + (1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots(1-\eta_{k-1})\eta_k] +$$

$$+ [(1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots\eta_{k-1}(1-\eta_k) + (1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots\eta_{k-1}\eta_k] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ [\eta_1\eta_2\cdots\eta_{k-1}(1-\eta_k) + \eta_1\eta_2\cdots\eta_{k-1}\eta_k].$$

Здесь два соседних слагаемых (начиная с первого) отличаются друг от друга лишь последним сомножителем, причем сумма этих последних сомножителей равна единице $(\eta_k + (1-\eta_k) = 1)$. Если в каждой из этих пар слагаемых вынести за скобку общие сомножители, величины в скобках будут равны единице и получим

$$S_k = (1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots(1-\eta_{k-1}) + (1-\eta_1)(1-\eta_2)\cdots\eta_{k-1} +$$

$$+ \cdots + \eta_1\eta_2\cdots\eta_{k-1} = \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} p(1 \to j) = S_{k-1}.$$

Далее, при $n = 1$, $S_1 = (1-\eta_1) + \eta_1 = 1$ и, таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

Назовем матрицей $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ ту матрицу k-го порядка, которая получается путем зачеркивания всех строк и столбцов, кроме строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_k$ в матрице 1.

Введем следующие обозначения:

$$p(i_l \to i_1, i_2, \cdots, i_k) = \sum_{j=1}^{k} p(i_l \to i_j), \tag{1}$$

$$p(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \sum_{l=1}^{k} p(i_l \to i_1, i_2, \cdots, i_k). \tag{2}$$

Пусть теперь задана некоторая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, которая в точках $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ принимает значение 1, а в остальных l точках $(l + k = 2^n)$ равна нулю.

Далее допустим, что задана некоторая схема S с n-входами, обозначенными соответственно через $x_1, x_2, \cdots, x_n$, и с одним выходом, реализующая функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Предположим, что вследствие несовершенства компонент на выходе схемы возможно появление ложного результата (ноль вместо единицы и наоборот) с вероятностью, равной ε.

Предположим также, что на входы этой схемы независимо друг от друга могут поступать ложные сигналы с вероятностью η_i для входа x_i.

Решим следующую задачу.

Определить вероятность η того, что при работе схемы S, реализующей функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ с вышеуказанными допущениями на выходе схемы, получится неправильный результат.

Ясно, что вероятность того, что входной сигнал i (n-разрядный набор двоичных величин, который при рассмотрении как двоичное число дает i) превратится в j, будет равна $p(i \to j)$. Таким образом, построенная выше матрица вероятностей действительно будет матрицей вероятностей преобразования одной входной величины в другую.

Для того чтобы решить эту задачу необходимо сделать некоторые допущения относительно распределения вероятностей появления различных входных величин.

Пусть распределение вероятностей входных величин задано следующей таблицей:

X	$00\cdots0$	$00\cdots01$	$00\cdots10$	$\cdots$	$11\cdots10$	$11\cdots1$
Вероятность	P_0	P_1	P_2	$\cdots$	P_{2^n-2}	P_{2^n-1}

Таким образом, появление на выходе схемы неправильного результата возможно в трех случаях: либо на вход схемы поступает правильный сигнал, но схема срабатывает неверно, либо схема срабатывает правильно, но входной сигнал неверен, либо же неверно и то и другое. В двух последних случаях неверный результат получится только в том случае, когда входной сигнал преобразовывается в такой, при котором значение функции отлично от значения функции при искаженном сигнале. Но вероятность того, что сигнал i такой, что$f(i) = 1$ (либо сигнал j такой, что $f(j) = 0$) перейдет в i_s такой, что $f(i_s) = 1$ (i_s такой, что $f(j_s) = 0$) равна $p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $(p(j \to i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+l})$, а вероятность того, что i (либо j) превратится в такой сигнал, для которого $f = 0$ $(f = 1)$ будет равна $1 - p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $(1 - p(j \to i_{k+1}, \cdots, i_{k+l}))$.

Таким образом, вероятность того, что сигнал на выходе схемы будет неверным, когда на вход поступает конкретный сигнал (вероятность которого равна p_i), будет равна

$$\eta(i) = \begin{cases} p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k)\,\varepsilon + [1 - p(i \to i_1, \cdots, i_k)](1 - \varepsilon) & \text{при } f(i) = 1, \\ p(i \to i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+l})\,\varepsilon + [1 - p(i \to i_{k+1}, \cdots, i_{k+l})](1 - \varepsilon) & \\ & \text{при } f(i) = 0. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание, что

$$p(i \to i_{k+1}, \cdots, i_{k+l}) = 1 - p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k),$$

получим

$$\eta(i) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) - (1 - 2\varepsilon)\,p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k), & \text{когда } f(i) = 1, \\ \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)\,p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k), & \text{когда } f(i) = 0. \end{cases}$$

Пользуясь формулой полной вероятности, получим

$$\eta = \sum_{i=0}^{2^n-1} p_i \eta(i) = \sum_{i=i_1,\cdots,i_k} p_i [(1-\varepsilon)-(1-2\varepsilon)\, p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k)] +$$

$$+ \sum_{i=i_{k+1},\cdots,i_{k+l}} p_i [\varepsilon + (1-2\varepsilon, p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k)]. \quad (3)$$

Введем следующие наглядные обозначения:

1) $\sum_{i=i_1,\cdots,i_k} p_i = p(f=1)$, которое является вероятностью того, что функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$.

2) $\sum_{i=i_{k+1},\cdots,i_{k+l}} p_i = p(f=0)$, которое является вероятностью того, что функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$.

3) $\sum_{i=i_1,\cdots,i_k} p_i . p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k) = p(f=1 \to f=1)$, которое является вероятностью того, что в данной точке функция $f=1$ и после искажения входных величин значение функции остается равным единице.

4) $\sum_{i=i_{k+1},\cdots,i_{k+l}} p_i \cdot p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k) = p(f=0 \to f=1)$.

5) $\sum_{i=i_1,\cdots,i_k} p_i \cdot p(i \to i_{k+1}, \cdots, i_{k+l}) = p(f=1 \to f=0) = p(f=1) - p(f=1 \to f=1)$.

Смысл последних двух обозначений очевиден.

После таких обозначений формула (3), если учесть, что $p(f=0) = 1 - p(f=1)$, превратиться в

$$\eta = \varepsilon + (1-2\varepsilon)[p(f=1) - p(f=1 \to f=1) + p(f=0 \to f=1)]. \quad (4)$$

Так как при получении формулы (4) не делается различие между нулями и единицами функции f, то из формулы (4) можно получить следующую формулу:

$$\eta = \varepsilon + (1-2\varepsilon)[p(f=0) - p(f=0 \to f=0) + p(f=1 \to f=0)]. \quad (5)$$

Формулу (4) следует применять тогда, когда количество единиц функции меньше, чем количество нулей, в противном случае лучше применять формулу (5).

Если учесть формулу обозначения 5), то получим симметричную формулу

$$\eta = \varepsilon + (1-2\varepsilon)[p(f=1 \to f=0) + p(f=0 \to f=1)]. \quad (6)$$

В случае, когда входные величины распределены равномерно, т. е. $p_0 = p_1 = \cdots = p_{2^n-1} = \frac{1}{2^n}$, эти формулы приобретают более простой вид:

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} \left[k - \sum_{f(l)=1} p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k) \right]; \tag{7}$$

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} \left[l - \sum_{f(l)=0} p(i \to i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+l}) \right]; \tag{8}$$

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} \sum_{f(l)=1} p(i \to i_{k+1}, \cdots, i_{k+l}) = \varepsilon +$$

$$+ \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} \sum_{f(l)=0} p(i \to i_1, \cdots, i_k), \tag{9}$$

Приведем несколько примеров

1. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ в предположении, что $p_i = \frac{1}{2^n}$ $(i = 0, 1, \cdots, (2^n - 1))$. В этом случае $k = 1$ и поэтому удобнее применять формулу (7), где

$$\sum_{f(i)=1} p(i \to i_1, i_2, \cdots, i_k) = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \cdots (1 - \eta_n) =$$

$$= 1 - \eta_1 - \eta_2 - \cdots - \eta_n + \cdots \pm \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n,$$

так, что в этом случае получим

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} (\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n - \eta_1\eta_2 - \cdots - \eta_{n-1}\eta_n +$$

$$+ \cdots \pm \eta_1\eta_2 \cdots \eta_n),$$

откуда при $n = 2$ получим

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2} (\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2),$$

а в случае $\varepsilon = 0$ и $\eta_1 = \eta_2 = \bar{\eta}$ получим

$$\eta = \bar{\eta} - \frac{\bar{\eta}^2}{2},$$

в общем случае для $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_n = \bar{\eta}$ получим

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} [1 - (1 - \bar{\eta})^n].$$

При $n = 3$

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{2^{n-1}} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_1\eta_2 - \eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_2\eta_3),$$

или

$$\eta = \varepsilon + \frac{1-2\varepsilon}{4} (3\bar{\eta} - 3\bar{\eta}^2 + \bar{\eta}^3).$$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Предположим, что схема, которая соответствует этой функции, работает в качестве смесителя в смысле Неймана [1], т. е. на входы этой схемы должны поступать только комбинации 000 и 111, а остальные комбинации могут появляться лишь за счет ошибок входных величин.

В таком случае $p_0 = p_7 = \frac{1}{2}$, $\quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0$, $k = 4$, $l = 4$, $i_1 = 3$, $i_2 = 5$, $i_3 = 6$, $i_4 = 7$. Так как в данном случае $k = l$, то безразлично какую из формул (4), (5), (6) применить. Если принять формулу (4), то

$$p(f = 1) = \frac{1}{2},$$

$$p(f = 1 \to f = 1) = \frac{1}{2} p(7 \to 3, 5, 6, 7) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \eta_1\eta_2 - \eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_3 + 2\eta_1\eta_2\eta_3),$$

$$p(f = 0 \to f = 1) = \frac{1}{2} p(0 \to 3, 5, 6, 7) = \frac{1}{2}(\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 - 2\eta_1\eta_2\eta_3)$$

и тогда для η получим

$$\eta = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)[\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 - 2\eta_1\eta_2\eta_3], \tag{10}$$

что совпадает с результатом работы Неймана [1].

Из формулы (6) видно, что η зависит от ε и при ε равном нулю

$$\eta_f(0) = [p(f = 1 \to f = 0) + p(f = 0 \to f = 1)], \tag{11}$$

или

$$\eta_f(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)\,\eta(0).$$

Эта функция показывает, насколько ненадежна схема в случае наличия помех на входах и в самой схеме. В случае, когда сама схема работает идеально, без внутренних помех, т. е. $\varepsilon = 0$, то функция $\eta_f(0)$ показывает насколько сильно зависит значение данной функции от ее аргументов. Иначе говоря, $\eta_f(0)$ показывает помехоустойчивость данной функции алгебры логики, при данном распределении значений ее аргументов.

Определение 1. Функцию $\eta_f(0)$ назовем функцией помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$.

Теперь, если вспомнить значения $p(f = 1 \to f = 0)$ и $p(f = 0 \to f = 1)$, то эту формулу можно будет записать в виде

$$\eta_f(0) = \sum p_\mu \eta_1^{\alpha^1_{\mu,\nu}} \eta_2^{\alpha^2_{\mu,\nu}} \cdots \eta_n^{\alpha^n_{\mu,\nu}} + \sum p_\nu \eta_1^{\alpha^1_{\nu,\mu}} \eta_2^{\alpha^2_{\nu,\mu}} \cdots \eta_n^{\alpha^n_{\nu,\mu}}, \tag{12}$$

где μ—пробегает все единицы, а ν—все нули функции f, а α^s_{ij} есть s-ый двоичный разряд элемента, находящегося в i-ой строке и j-ом столбце матрицы 1, а

$$\eta_s^{\alpha_{i,j}^s} = \begin{cases} \eta_s & \text{если } \alpha_{i,j}^s = 1, \\ 1 - \eta_s & \text{если } \alpha_{i,j}^s = 0. \end{cases}$$

Таким образом, из представления функции $\eta(0)$ в виде (12) видно, что она является суммой членов вида

$$p_m \eta_{m_1} \eta_{m_2} \cdots \eta_{m_s} (1 - \eta_{m_{s+1}}) \cdots (1 - \eta_{m_n}).$$

Причем каждый такой член при $p_m \neq 0$ и малых $\eta_i \left(\ll \frac{1}{n}\right)$ имеет порядок малости s с главным членом $p_m \eta_{m_1} \eta_{m_2} \cdots \eta_{m_s}$. Число s назовем порядком данного слагаемого в случае если $p_i \neq 0$, в противном случае порядок данного слагаемого примем равным $+\infty$.

Определение 2. Минимальный порядок слагаемых в выражении $\eta_f(0)$ назовем порядком помехустойчивости функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с заданным распределением вероятностей $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$.

Если β (n-разрядный двоичный набор) такой, что при инвертировании i-й его позиции получается такой двоичный набор γ, что $f(\beta) \neq f(\gamma)$, то будем говорить, что β активный набор по i-му аргументу для функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Обозначим все активные наборы по i-му аргументу функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ через $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{k_i}}$.

Определение 3. Активностью i-го аргумента функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с распределением вероятностей $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$ назовем число

$$\omega_i = p_{\alpha_{i_1}} + p_{\alpha_{i_2}} + \cdots + p_{\alpha_{i_{k_i}}}.$$

В случае, когда $p_i = \text{const}$, получим

$$\omega_i = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{по всем } \beta} [f(\beta) \oplus f(\gamma)],$$

где γ отличается от β i-й позицией.

Ясно, что если $\omega_i = 0$, то или $p_{\alpha_{i_1}} = p_{\alpha_{i_2}} = \cdots = p_{\alpha_{i_{k_i}}} = 0$ или i-й аргумент функции фиктивный, и вообще, чем больше активность данного аргумента, тем больше его влияние на изменение значения функции. Поэтому помехоустойчивость функции существенно зависит от активностей его аргументов. В этой связи докажем следующую теорему.

Теорема 2. Функция $\eta_f(0)$ имеет следующую структуру:

$$\eta_f(0) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \eta_i + \varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n),$$

где $\varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ не содержит членов первого порядка относительно $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{k_l}}$ все активные наборы по l-му аргументу функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Ясно, что k_l четное число, ибо для каждого набора α_{i_r} $(r=1, 2, \cdots, k_l)$ набор отличный от α_{i_r} только l-й позицией $\alpha_{i_{r'}}$, тоже входит в это же множество активных наборов. Причем для каждой такой пары соответствующий элемент матрицы 1 имеет единицу только на l-м месте. Из формул (11) и (12) следует, что каждой такой паре соответствует пара слагаемых вида

$$p_{\alpha_{i_r}} \cdot (1-\eta_1) \cdots (1-\eta_{l-1}) \eta_l (1-\eta_{l+1}) \cdots (1-\eta_n) +$$

$$+ p_{\alpha_{i_{r'}}} \cdot (1-\eta_1) \cdots (1-\eta_{l-1}) \eta_l (1-\eta_{l+1}) \cdots (1-\eta_n) =$$

$$= \left(p_{\alpha_{i_r}} + p_{\alpha_{i_{r'}}}\right) \eta_l \prod_{j \neq l} (1-\eta_j).$$

Суммируя по всем различным r (не считая l-й разряд), получим, что $\eta_f(0)$ содержит слагаемого вида $\omega_l \eta_l \prod\limits_{j \neq l} (1-\eta_j)$. Но так как ясно, что других комбинаций, при которых получались слагаемые первого порядка относительно η_l нет, то доказательство теоремы этим завершается.

Определение 4. Функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$ назовем не избыточной, если $p_i \neq 0$ $(i=0, 1, \cdots, 2^n-1)$.

Теорема 3. Если функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$ не избыточная и не постоянная, то ее порядок помехоустойчивости равен единице.

Доказательство. Так как функция не постоянная, то по какому-либо аргументу существуют активные наборы и так как функция без избытка, то существует хотя бы один аргумент, для которого $\omega_l \neq 0$, но тогда из теоремы 2 непосредственно следует утверждение теоремы 3.

Следствие. Для того чтобы порядок помехоустойчивости данной функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ был отличный от единицы, необходимо и достаточно, чтобы все $p_i = 0$ для всех i таких, что его двоичное представление является активным набором хотя бы для одного аргумента $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Если обозначить через $d(i, j)$ Хемингово растояние [2] между наборами i и j, то можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если порядок помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ больше единицы, то для любого i и j для которых $p_i \neq 0$, $p_j \neq 0$ и $f(i) = f(j)$ имеет место соотношение $d(i, j) \geqslant 3$.

Два набора α и β назовем соседними, если $d(\alpha, \beta)=1$. Ясно, что если помехоустойчивость функции больше единицы, то для любого i для которого $p_i \neq 0$ и для любой точки α соседней с i (т. е. $d(i, \alpha)=1$), $f(i)=f(\alpha)$.

Это следует из того, что если порядок помехоустойчивости функции больше единицы, то все $\omega_i=0$.

Теперь, так как $f(i) \neq f(j)$, а во всех соседних точках с точками i и j значение функции не меняется, то очевидно, что $d(i, j)>2$, чем и завершается доказательство теоремы.

Для заданной функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$ рассмотрим следующие множества значений аргументов.

1. Множество $i_1, i_2, \cdots, i_n$ для которых функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ равна единице. Это множество назовем множеством единиц функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и обозначим через $M(f=1)$.

2. Множество $i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+l}$, аналогичное множеству $M(f=1)$, для нулей функции обозначим через $M(f=0)$.

3. Через $M(f=1/p)$ и $M(f=0/p)$ обозначим подмножества множеств $M(f=1)$ и $M(f=0)$ соответственно, для которых соответствующие $p_i \neq 0$. Эти множества назовем истинным множеством единиц и нулей функции $f(x_1 x_2, \cdots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \cdots, p_{2^n-1}$.

Расстояние между двумя множествами определим следующей формулой:

$$d(M_1, M_2)=\min_{\substack{x_1 \in M_1 \\ x_2 \in M_2}} d(x_1, x_2),$$

Порядок помехоустойчивости функции алгебры логики с заданным распределением связана с расстоянием между множествами истинных и возможных нулей и единиц.

Теорема 5. Порядок помехоустойчивости ρ функции алгебры логики с заданным распределением определяется формулой

$$\rho=\min \{d[M(f=1/p)\; M(f=0)];\quad d[M(f=0/p);\quad M(f=1)]\}. \qquad (13)$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим формулу (12).

Рассмотрим сначала первую сумму. Так как в этой сумме μ пробегает все единицы функции, то каждому элементу множества $M(f=1/p)$ соответствует одно слагаемое. Далее, так как ν пробегает все множество $M(f=0)$, а количество единиц в кортеже $(\alpha^1_{\mu,\nu}, \alpha^2_{\mu,\nu}, \cdots, \alpha^n_{\mu,\nu})$ является расстоянием между μ и ν или, что то же самое, расстоянием между каждым элементом множества $M(f=1/p)$ и любым элементом множества $M(f=0)$, то минимальное расстояние между этими элементами есть $d[M(f=1/p); M(f=0)]$, а с ним совпадающее минимальное количество единиц в кортеже по всем возможным μ и ν есть порядок первой суммы. Такими же рассуждениями докажем, что второе выражение в формуле (13) есть порядок второй суммы. Но порядок помехоустойчивости функции есть минимальный порядок слагаемых формулы (12), что и утверждает теорема 5. Эта теорема дает возможность достаточно просто определить порядок помехоустойчивости данной функции алгебры логики с заданным распределением.

Например: для смесителя

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$p_0 = p_7 = \frac{1}{2}\ p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0,$$

$$M(f = 0) = \{000, 001, 010, 100\},$$

$$M(f = 1) = \{011, 101, 110, 111\},$$

$$M(f = 0/p) = \{000\}, \quad M(f = 1/p) = \{111\}.$$

$$d[M(f = 1/p); \quad M(f = 0)] = 2; \quad d[M(f = 0/p); \quad M(f = 1)] = 2,$$

откуда $\rho = 2$ согласуется с формулой (10).

Теперь предположим, что заданы функция $\psi(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ и k-функций со своими распределениями вероятностей.

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}) - p_{10}, p_{11}, \cdots, p_{12^{n_1}}, \\ &y_2 = \varphi_2(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}) - p_{20}, p_{21}, \cdots, p_{22^{n_2}}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &y_k = \varphi_k(x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn_k}) - p_{k0}, p_{k1}, \cdots, p_{k2^{n_k}}. \end{aligned} \tag{14}$$

При таких распределениях вероятностей для значений $y_1, y_2, \cdots, y_k$ получится определенное распределение вероятностей. Порядок помехоустойчивости функции $\psi(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ при вышеуказанном распределении вероятностей обозначим через ρ_ψ, а порядки помехоустойчивости функций (14) обозначим через $\rho_{\varphi_1}, \rho_{\varphi_2}, \cdots, \rho_{\varphi_k}$ соответственно. Составим суперпозицию этих функций

$$\Phi(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{kn_k}) = \psi(\varphi_1(x_{11} \cdots x_{1n_1}), \cdots, \varphi_k(x_{k_1}, \cdots, x_{kn_k})), \tag{15}$$

ясно, что порядком помехоустойчивости этой функции

$$\rho_\Phi = \rho_\psi \cdot \min_{1<s<k} \rho_{\varphi_s}. \tag{16}$$

Пусть задано некоторое однозначное отображение множества $\{x_{ij}\}$ на множество $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, тогда через $\Phi_\delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ обозначим функцию, определяемую следующим образом:

$$\Phi_{\delta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Phi(\delta(x_{11}), \delta(x_{12}), \cdots, \delta(x_{kn_k})).$$

Теорема 5. Для любой функции алгебры логики $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ с заданным распределением вероятностей существует такая система (14) и такая функция $\psi(y_1, y_2, \cdots, y_k)$, что

1. ρ_{Φ} больше, чем любое наперед заданное число.
2. Существует такое однозначное отображение, что

$$\Phi_{\delta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Для доказательства этой теоремы достаточно взять, например, в качестве функций $\psi(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ функцию голосования с нечетным $k = 2r - 1$, а $n_i = n$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ и

$$\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in_i}) \equiv \varphi(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in_i}) \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \qquad (17)$$

и пусть $\delta(x_{ij}) = x_j$.

Теперь, так как для функции голосования $\psi(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha) = \alpha$, то выполнение условий 2 теоремы для этого примера очевидно. Из условия (17) следует, что для значений аргументов функции $\psi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ распределение вероятностей получается таким, что отличными от нуля будут только p_0 и p_{2^k-1}, но тогда порядок помехоустойчивости функций с таким распределением будет $\rho_{\psi} = r$. Таким образом, $\rho_{\Phi} = r\rho_{\varphi}$, откуда следует условие 1.

Точно такой же результат получается, если взять $n_i = k = 2r - 1$, а вместо функции φ_i взять функции голосования,

$$\psi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \delta(x_{ij}) = x_i.$$

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են խանգարումների նկատմամբ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունության հարցերը։ Եթե տվյալ տրամաբանական ֆունկցիան իրացնող սխեման շատ հուսալի է, ապա խանգարումների ազդեցությունը կախված չի լինի այդ սխեմայից, այլ կախված կլինի միայն իրացվող ֆունկցիայից և արգումենտների արժեքների հանդես գալու հավանականությունների բաշխումից։ Տվյալ արգումենտի արժեքի փոփոխությունը, մնացած արգումենտների ֆիքսած արժեքների դեպքում, կարող է ազդել ֆունկցիայի արժեքի վրա և կարող է չազդել։ Որքան շատ են մյուս արգումենտների ֆիքսած արժեքների կոմբինացիաները, որոնց դեպքում տրված արգումենտի փոփոխությունը ազդում է ֆունկցիայի արժեքի վրա, այնքան ավելի ակտիվ է տվյալ արգումենտի ազդեցությունը ֆունկցիայի արժեքի տատանման վրա։

Այս աշխատանքում քանակական կապ է հաստատվում խանգարումների նկատմամբ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունության և նրանց արգումենտների ակտիվությունների միջև։ Տրվում են որոշակի բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է հաշվել ցանկացած ֆունկցիայի կայունությունը ցանկացած տիպի խանգարումների նկատմամբ։ Աշխատանքի վերջում ցույց է տրվում, որ տրամաբանական ֆունկցիաների կայունությունը կարելի է բարձրացնել միայն նրանց մեջ հավելցուկ մտցնելու օգնությամբ, որ ցանկացած ֆունկցիայի համար կարելի է կառուցել մի նոր ֆունկցիա, որը խանգարումների նկատմամբ օժտված լինի ցանկացած չափով բարձր կայունությամբ և կատարի ինֆորմացիայի նույնպիսի ձևափոխություն, ինչ որ տրված ֆունկցիան։

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Нейман Дж.* Вероятностная логика. Сб. статьей. „Автоматы", М., ИЛ, 1955.

[2] *Хемминг Р. В.* Сб. „Коды с обнаружением и исправлением ошибок". М., ИЛ, 1956.

[3] *Петросян А. В.* Некоторые вопросы помехоустойчивости функции алгебры логики. ДАН АрмССР, XXXVI, 1963, 3, 147—151.

Поступило 5.X.1963