Р. А. ОГАНЯН, А. Г. ПИЛИПОСЯН

АЛГОРИФМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Излагаемая ниже задача возникла из желания найти оптимальное паросочетание магнитов из двух различных партий для расстановки этих пар по кольцу электронного ускорителя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим некоторую вещественную матрицу

$$\|a_{ij}\|_{i,\,j=1}^{n}.$$

Задача 1. Найти такие целые неотрицательные числа x_{ij}, которые минимизируют

$$\max_{1 \leq i,\, j \leq n} \{a_{ij} \cdot x_{ij}\}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Эта задача представляет собой нелинейный вариант задачи о назначениях [5,6] о выборе [4], о браках [1].

Обозначим через Φ множество всех автоморфизмов $\{\varphi(i)\}$ множества $\rho = \{i\}_{i=1}^{n}$. Заметим, что Φ состоит из $n!$-элементов.

Введем обозначение

$$\mu = \min_{\varphi \in \Phi} \max_{i \in \rho} \{a_{i\varphi(i)}\}. \tag{1}$$

Задача 2. Найти число μ и то $\tilde{\varphi}$ из Φ, для которого

$$a_{i\tilde{\varphi}(i)} \leqslant \mu,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Легко видеть, что задачи 1 и 2 эквивалентны.

2. Сведение к конечной цепочке линейных задач. Каждому числу r, посредством матрицы $\|a_{ij}\|$, поставим в соответствие матрицу $\|a_{ij}^{r}\|_{i,\,j=1}^{n}$,

где

$$a_{ij}^{r}=\begin{cases}0, \text{ если } a_{ij}>r,\\ 1, \text{ если } a_{ij}\leqslant r.\end{cases}$$

Скажем, что $r\in L$, если существует такое φ из Φ, что

$$a_{i\,\varphi(i)}^{r}=1,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n,$$

т. е. если упрощенная задача о назначениях [6], соответствующая матрице $\|a_{ij}^{r}\|$, разрешима.

Принадлежность r к L можно установить хорошо известными алгорифмами, как, например, алгорифм Форда-Фалкерсона [3, 5, 6] или венгерский алгорифм [2, 5].

Теорема 1. Пусть

$$\nu=\min_{a_{ij}\in L}\{a_{ij}\},$$

тогда

$$\mu=\nu.$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mu\geqslant\nu. \tag{4}$$

Из определения μ следует, что

$$\mu\in\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \tag{5}$$

а из существования решения $\tilde{\varphi}$ задача 2 и формул (2), (3) следует, что

$$a_{i\,\tilde{\varphi}(i)}^{\mu}=1,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

т. е.

$$\mu\in L.$$

Из (5) и (6) следует (4).

Теперь покажем, что

$$\mu\leqslant\nu. \tag{7}$$

Из определения ν следует, что $\nu\in L$, т, е. существует такое $\varphi^{*}\in\Phi$, что

$$a_{i\,\varphi^{*}(i)}^{\nu}=1,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n.$$

отсюда, ввиду (3), следует, что $a_{i\varphi^{*}(i)}\leqslant\nu,\ i=1\ ,2,\cdots,\ n,$

отсюда

$$\max_{i\in\rho}\{a_{i\,\varphi^{*}(i)}\}\leqslant\nu, \tag{8}$$

но

$$\min_{\varphi\in\Phi}\ \max_{i\in\rho}\ \{a_{i\varphi(i)}\}\leqslant\max_{i\in\rho}\ \{a_{i\,\varphi^{*}(i)}\},$$

отсюда, ввиду (1), (8), следует (7).

Из (4) и (7) следует теорема,

3. Алгорифм для нахождения μ. Перенумеруем все элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ в порядке их строгого возрастания (равные элементы учитываются только один раз)

$$a_{i_1j_1}<a_{i_2j_2}<\cdots<a_{i_kj_k}<\cdots<a_{i_\rho j_\rho}\ (\rho\leqslant n^2). \tag{9}$$

Рассмотрим последовательность номеров

$$1,\ 2, \cdots, k, \cdots, p. \tag{10}$$

Скажем, что номер $k \in L^*$, если $a_{i_k j_k} \in L$.

Обозначим через $E(x)$ целую часть числа x.

Пусть

$$k,\ k+1,\ \cdots,\ k+l (k>0,\ l \geqslant 0) \tag{11}$$

какой-нибудь отрезок натурального ряда. Число $E\left(\frac{2k+l}{2}\right)$ назовем средним номером отрезка (11).

Найдем средний номер — n_1-, для отрезка (10) . Отбросим половину последовательности (10), удовлетворяющую условию.

$$k \geqslant n_1, \text{ если } n_1 \in L^*, \text{ и } k \leqslant n_1, \text{ если } n_1 \overline{\in} L^*.$$

Затем найдем средний номер n_2 для оставшегося (после удаления из (10) соответствующей половины) отрезка и, аналогичным образом, удалим его половину. Далее эту процедуру продолжим до тех пор, пока не удалим все элементы последовательности (10).

Обозначим через n_k — средний номер отрезка натурального ряда, полученного из (10) после $k-1$—удаления соответствующих половин. Число шагов, необходимых для удаления (указанным способом) всех элементов последовательности (10), обозначим через m.

Теорема 2. Пусть

$$u = \min_{\substack{n_k \in L^* \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \{n_k\},$$

тогда

$$\mu = a_{i_u j_u}.$$

Доказательство. Пусть

$$t = \min_{\substack{k \in L^* \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \{k\}.$$

Сначала покажем, что

$$u = t. \tag{12}$$

Ясно, что

$$u \geqslant t. \tag{13}$$

Легко показать, что $k \in L^*$, если $k \geqslant t$ (14)

Теперь допустим, что

$$u > t. \tag{15}$$

Тогда, ввиду (14), окажется, что после m-го шага удаления из (10) соответствующих половин, мы не удалили из (10) номер t, что противоречит определению m. Следовательно, (15) невозможно. Тогла из (13) следует (12). Из определения t следует, что $a_{i_t j_t} = \nu$.

Отсюда, в силу (12) и теоремы 1, следует теорема 2.

4. Оценки для μ и m. Обозначим через b наименьший элемент из (9), обладающий следующим свойством: множество всех элементов матрицы $\|a_{ij}\|$, удовлетворяющих условию

$$a_{ij} \leqslant b \tag{16}$$

содержит n элементов с различными индексами i и n элементов с различными индексами j (заметим, что число b легко найти).

Пусть
$$a = \max\,[\max_i \min_j \{a_{ij}\},\ \max_j \min_i \{a_{ij}\}].$$

Тогда, как легко показать,
$$a \leqslant b \leqslant \mu \leqslant \max\,\{a_{ij}\}.$$

Поэтому последовательность (9) можно начать с числа b.

В любом случае число всех элементов матрицы, удовлетворяющих условию (16), не меньше n. В том случае, когда это число равно n, очевидно $\mu = b$.

Пусть целые числа k и l удовлетворяют условиям
$$2^k \leqslant p \leqslant 2^{k+1},\ 2^l < n^2 \leqslant 2^{l+1}.$$

Тогда, из определения p и n и алгорифма для нахождения μ следует, что
$$m \leqslant k+2 \leqslant l+2.$$

5. **Алгорифм для нахождения $\tilde{\varphi}$.** Пусть μ найдено. Построим матрицу $\|a^{\mu}_{ij}\|$. Из $\mu \in L$ вытекает существование такого $\tilde{\varphi}$, что
$$a^{\mu}_{i\tilde{\varphi}(i)} = 1,\ i = 1,\ 2, \cdots,\ n, \tag{17}$$

т. е. упрощенная задача о назначениях, соответствующая матрице $\|a^{\mu}_{ij}\|$, разрешима. Теперь вопрос нахождения $\tilde{\varphi}$ сведен к решению этой упрощенной задачи о назначениях, которую можно решить, применив, например, алгорифм Форда-Фалкерсона [3, 5, 6], или венгерский алгорифм [2, 5], или другие [7].

Из (17), ввиду (3), следует (2), т. е. решение $\tilde{\varphi}$ упрощенной задачи о назначениях, соответствующей матрице $\|a^{\mu}_{ij}\|$, является искомым.

Изложенная задача при $n = 50$ была решена на электронной вычислительной машине Вычислительного Центра АН АрмССР и Ереванского государственного университета. Число всех операций оказалось не более 10^8.

Поступило 25.IX.1963

Ռ. Ա. ՕՀԱՆՅԱՆ, Հ. Գ. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԱՅԻՆ ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում է նշանակումների խնդրի [5, 6] ոչ գծային վարիանտը: Ցույց է տրվում, որ այդ խնդրի լուծումը բերվում է վերջավոր թվով

գծային խնդիրների հաջորդականության լուծմանը և առաջարկվում է մի ալգո-րիթմ, որի օգնությամբ կարելի է գտնել այդ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА

1 *Halmos P. R., Vaughan H. E.* The marriag problem. Am. J. Math., 1950, 72, 214—215.

2 *Kuhn H. W.* The Hungarian method for solving the assignment problem, Naval Research Logist, Quart., 1955, 2, 83—97,

3 *Ford L. R., Fulkerson D. R.* Maximal flow through a network, Canad. J. Math 1956, 8, 399—404.

4 *Гасс С.* Линейное программирование. 1961, М., ИЛ, стр. 257.

5 *Берж К.* Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.

6 *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М., ИЛ, 1963.

7 *Gomory R. E., Baumol W. J.* Integer programming and pricing, Econometrica, 1960, 28, № 23, 521—550.