АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 ФЕВРАЛЬ, 1977 ВЫПУСК 1

ХАРАКТЕРНЫЕ ДЛИНЫ В ЗАДАЧАХ О ПЕРЕНОСЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

С. И. ГРАЧЕВ

Поступила 23 июля 1976

Для различных профилей коэффициента поглощения найдены длина термализации τ_t и диффузионная длина τ_d в бесконечной одномерной среде, движущейся с постоянным градиентом скорости $\gamma \ll 1$. Получена также оценка толщины пограничного слоя τ_b в полубесконечной среде с равномерно распределенными первичными источниками.

1. *Введение.* Известно, что во многих астрофизических объектах происходит дифференциальное движение вещества. К числу таких объектов относятся, например, активные образования на Солнце, нестационарные звезды, газовые туманности, магнитосферы пульсаров, некоторые квазары, активные галактики. При интерпретации профилей линий, наблюдаемых в спектрах указанных объектов, необходимо решать задачу о диффузии излучения в движущейся среде. Эта задача сводится, как известно, к решению некоторого интегрального уравнения для функции источников, пропорциональной степени возбуждения атомов. Приближенный способ решения этого уравнения, применимый для достаточно глубоких слоев дифференциально движущейся среды, был предложен В. В. Соболевым [1, 2]. Метод состоит в вынесении функции источников из-под знака интеграла в рассматриваемой точке, и поэтому его иногда называют методом вынесения. Физический смысл метода состоит в том, что в среде, движущейся с градиентом скорости, функция источников определяется в рассматриваемой точке (из-за доплеровского смещения частоты фотонов) лишь некоторой ее окрестностью. Если параметры среды в этой окрестности меняются мало и сама окрестность целиком расположена в среде, то можно думать, что метод вынесения будет давать хорошую точность. Назовем размер окрестности, дающей основной вклад в возбуждение атомов в рассматриваемой точке в бесконечной среде, длиной термализации, которую мы обозначим через τ_t. Смысл названия состоит в том, что, по-существу, τ_t есть среднее рас-

стояние от места рождения фотона до места его гибели. Отметим, что в дифференциально движущейся среде гибель фотонов может быть связана не только с истинным поглощением, но и с их выходом из среды из-за градиента скорости.

Вторая характерная длина, которую мы назовем толщиной пограничного слоя и обозначим через τ_b, есть, грубо говоря, то расстояние от границы среды, начиная с которого можно применять метод вынесения.

В некоторых случаях может существовать также и третья характерная длина — диффузионная длина $\tau_d = 1/k$, где k — наименьший корень характеристического уравнения.

Настоящая работа посвящена определению зависимости трех указанных характерных длин от величины градиента скорости для разных профилей коэффициента поглощения.

2. *Основные уравнения.* Рассмотрим одномерную среду, заполненную двухуровенными атомами и движущуюся с постоянным градиентом скорости

$$\gamma = \frac{1}{u}\frac{dv}{d\tau}, \tag{1}$$

где u — средняя скорость хаотического движения атомов, v — скорость движения среды, τ — оптическое расстояние в центре линии для неподвижной среды. Пусть $g(\tau)$ — функция первичных источников, λ — вероятность выживания кванта при однократном рассеянии и диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частоте при элементарном акте рассеяния в локальной системе отсчета. Согласно [3] интегральное уравнение переноса излучения для функции источников $S(\tau)$ имеет вид

$$S(\tau) = g(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_a^b K(|\tau - t|, \gamma)\, S(t)\, dt. \tag{2}$$

Ядро $K(\tau, \gamma)$ выражается через функцию $L(\tau, \gamma)$:

$$K(\tau, \gamma) = -\frac{dL(\tau, \gamma)}{d\tau}, \tag{3}$$

а

$$L(\tau, \gamma) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^{x+\gamma\tau} \alpha(z)\,dz}\, dx, \tag{4}$$

где $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения ($\alpha(0) = 1$), A — нормировочная постоянная

$$A = 1 \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, dx.$$

Функция $L(\tau, \gamma)$ представляет собой вероятность того, что фотон, излученный в начале координат, удалится от него на расстояние, превышающее τ, без рассеяний по пути.

Из (3) и (4) следует, что

$$\int_0^{\infty} K(\tau, \gamma)\, d\tau = 1 - L(\infty, \gamma) = 1 - A\gamma \left(1 - e^{-\frac{1}{A\gamma}}\right). \tag{5}$$

Введем новое ядро $\bar{K}(\tau, \gamma)$, нормированное к единице,

$$\tilde{K}(\tau, \gamma) = \frac{K(\tau, \gamma)}{1 - L(\infty, \gamma)} \tag{6}$$

и обозначим

$$\tilde{\lambda} = \lambda[1 - L(\infty, \gamma)]. \tag{7}$$

Тогда уравнение (2) перепишется следующим образом:

$$S(\tau) = g(\tau) + \frac{\tilde{\lambda}}{2} \int_a^b \tilde{K}(|\tau - t|, \gamma)\, S(t)\, dt. \tag{8}$$

Новая вероятность гибели фотона

$$1 - \tilde{\lambda} = 1 - \lambda + \lambda L(\infty, \gamma) \tag{9}$$

слагается из двух частей: первая — обычная вероятность гибели при ударах второго рода, фотоионизациях и т. д., вторая — вероятность того, что фотон уйдет в бесконечность. В дальнейшем мы будем рассматривать случай $\lambda = 1$, $\gamma \ll 1$, для которого $1 - \tilde{\lambda} \sim A\gamma$.

3. *Длина термализации.* Оставим пока в стороне граничные эффекты и рассмотрим бесконечную среду: $a = -\infty$, $b = \infty$. Следуя Райбики и Хаммеру [4], введем $\Theta(\tau)d\tau$ — вероятность того, что фотон, возникший в начале координат, погибнет в интервале от τ до $\tau + d\tau$, испытав при этом, вообще говоря, много рассеяний. Как и в случае неподвижной среды, рассмотренной в [4], в случае движущейся среды имеем

$$\Theta(\tau) = \frac{1 - \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} \Phi_{\infty}(\tau, \tilde{\lambda}, \gamma), \tag{10}$$

где $\Phi_\infty(\tau, \lambda, \gamma)$ — резольвента интегрального уравнения (8) при $a=-\infty$, $b=\infty$. По определению, данному во введении, длина термализации τ_t в бесконечной среде есть среднее расстояние от места рождения фотона до места его гибели. Термин «среднее» можно понимать по разному. Например, можно понимать τ_t в смысле среднеквадратичного значения (по распределению $\Theta(t)$), которое мы обозначим через τ_t^r:

$$\tau_t^r = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t)\, t^2 dt}\,. \tag{11}$$

Используя найденное в [4] выражение для τ_t^r и переписывая его для движущейся среды, получаем

$$\tau_t^r = l(\gamma)/\sqrt{1-\bar{\lambda}} = l(\gamma)/\sqrt{A\gamma}, \tag{12}$$

где

$$l^2(\gamma) = \int\limits_0^\infty \bar{K}(\tau, \gamma)\, \tau^2 d\tau. \tag{13}$$

Формула (12) имеет простой физический смысл: согласно (12) τ_t^r есть произведение средней длины пробега фотона $l(\gamma)$ на корень из среднего числа рассеяний фотона в бесконечной среде. Известно, что для профилей с бесконечными крыльями $l(0)=\infty$. Найдем для таких профилей асимптотику $l(\gamma)$ при $\gamma\to 0$. Интегрируя в (13) по частям, получим

$$l^2(\gamma) = \frac{2}{1-L(\infty, \gamma)]}\int\limits_0^\infty [L(\tau, \gamma) - L(\infty, \gamma)]\,\tau d\tau. \tag{14}$$

Подставляя (4) в (14), делая замену переменных $\gamma\tau = t$ и меняя порядок интегрирования по t и x, из (14) найдем

$$l^2(\gamma) = \frac{2A}{\gamma[1-L(\infty, \gamma)]}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{\gamma}\int\limits_x^\infty \alpha(z)dz}\right)dx \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty t\alpha(x-t)\, e^{-\frac{1}{\gamma}\int\limits_{x-t}^{x} \alpha(z)dz}\, dt. \tag{15}$$

Интегрируя в (15) по частям (по t) и делая несложные преобразования, можно представить $l^2(\gamma)$ в виде

$$
\begin{aligned}
l^2(\gamma) = \frac{2A}{\gamma[1 - L(\infty, \gamma)]} \Biggl\{ & \int_0^\infty \Bigl(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}\int_{-x}^{\infty} \alpha(z)\,dz}\Bigr) \times \\
& \times e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^\infty \alpha(z)\,dz}\, dx \int_x^\infty \Bigl(e^{\frac{1}{\gamma}\int_y^\infty \alpha(z)\,dz} - 1\Bigr) dy + \\
& + \int_0^\infty \Bigl(e^{\frac{1}{\gamma}\int_x^\infty \alpha(z)\,dz} - 1\Bigr) dx \int_0^x e^{-\frac{1}{\gamma}\int_y^\infty \alpha(z)\,dz} \Bigl(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}\int_{-y}^\infty \alpha(z)\,dz}\Bigr) dy + \\
& + \left[\int_0^\infty \Bigl(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^\infty \alpha(z)\,dz}\Bigr) e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^x \alpha(z)\,dz}\, dx\right]^2 \Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Из (16) видно, что $l(\gamma) < \infty$, если $\int_0^\infty \alpha(x)\, x^2 dx < \infty$. Первые два интеграла в (16) равны между собой, а третий стремится к нулю при $\gamma \to 0$. Делая в (16) замены переменных

$$
\int_x^\infty \alpha(z)\,dz = \frac{1}{t}, \quad \int_y^\infty \alpha(z)\,dz = \frac{1}{z}, \tag{17}
$$

получим

$$
l^2(\gamma) \underset{\gamma \to 0}{\sim} \frac{4A}{\gamma} \int_{2A}^\infty e^{-\frac{1}{\gamma t}} x'(t)\,dt \int_t^\infty \bigl(e^{\frac{1}{\gamma z}} - 1\bigr) x'(z)\,dz. \tag{18}
$$

Наконец, делая в (18) замены $y = 1/\gamma t$, $t = 1/\gamma z$, деля и умножая (18) на $\left[x'\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]^2$, где $x(t)$ определяется уравнением (17), и переходя к пределу под знаком интеграла при $\gamma \to 0$, найдем

$$
l^2(\gamma) \sim \frac{4A}{\gamma^3} \left[x'\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]^2 \int_0^\infty e^{-y} f(y) \frac{dy}{y^2} \int_0^y (e^t - 1) f(t) \frac{dt}{t^2}, \tag{19}
$$

где

$$f(y)=\lim_{\gamma\to 0}\frac{x'(1/\gamma y)}{x'(1/\gamma)}=y^{\beta}. \qquad (20)$$

Идея вывода асимптотики (19) из (18) заимствована нами из статьи Ю. Ю. Абрамова, А. М. Дыхне и А. П. Напартовича [5]. Величина β зависит от скорости убывания коэффициента поглощения в крыле линии. Наиболее часто встречающимися профилями являются доплеровский $\alpha(x)=e^{-x^2}$ и, так называемый, степенной: $\alpha(x)\underset{x\to\infty}{\sim}W|x|^{-\varkappa}$. Для первого $\beta=1$, а для второго $\beta=(\varkappa-2)/(\varkappa-1)$. В общем случае $1/2<\beta<3/2$. Для доплеровского профиля из (12), (19) и (20) получается

$$\tau_t^r\underset{\gamma\to 0}{\sim}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{\gamma\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}}}, \qquad (21)$$

а для степенного

$$\tau_t^r\underset{\gamma\to 0}{\sim}2W^{\frac{1}{\varkappa-1}}(\varkappa-1)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}C\left(\frac{\varkappa-2}{\varkappa-1}\right)\gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad (22)$$

где

$$C^2(\beta)=\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{\beta-2}\,dy\int\limits_0^y(e^t-1)\,t^{\beta-2}\,dt=$$
$$=-\frac{\Gamma(\beta)}{2(1-\beta)^2}\left[-\frac{\Gamma(\beta)}{\cos\pi\beta}+\frac{2^{2\beta}}{4\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (23)$$

Ранее В. П. Гринин [6], рассматривая перенос излучения в трехмерной плоскопараллельной среде, движущейся перпендикулярно к слоям с постоянным градиентом скорости $\gamma\ll 1$, получил для доплеровского профиля приближенную оценку $l(\gamma)$, совпадающую по порядку величины с асимптотикой (19).

Для профилей с конечными крыльями всегда $l(\gamma)<\infty$. Если $l(0)<\infty$, как например, для прямоугольного профиля, то согласно (12):

$$\tau_t^r\underset{\gamma\to 0}{\sim}l(0)/\sqrt{A\gamma}, \qquad (24)$$

в противном случае ($l(0)=\infty$), асимптотика τ_t^r при $\gamma\to 0$ находится из (19) и (12).

Определение (12), очевидно, неприменимо при $l(\gamma)=\infty$, например, для лоренцевского и фойгтовского профилей, которые соответствуют степенному профилю с $\varkappa=2$. В общем случае Райбики и Хаммер [4] предлагают понимать под длиной термализации медиану τ_t^m распределения $\Theta(\tau)$, которая определяется из уравнения

$$\int_{-\tau_t^m}^{\tau_t^m} \Theta(t)\,dt = \frac{1}{2}, \tag{25}$$

что эквивалентно уравнению

$$\int_{\tau_t^m}^{\infty} \Phi_\infty(t, \tilde{\lambda}, \gamma)\,dt = \frac{\tilde{\lambda}}{4(1-\tilde{\lambda})}$$

или

$$\int_0^{\tau_t^m} \Phi_\infty(t, \tilde{\lambda}, \gamma)\,dt = \frac{\tilde{\lambda}}{4(1-\tilde{\lambda})}. \tag{26}$$

Поскольку при $t < \tau_t^m$ имеет место приближенное равенство $\Phi_\infty(t, \tilde{\lambda}, \gamma) \approx \Phi_\infty(t, 1, 0) \equiv \Phi_\infty(t)$, то из второго уравнения (26) получим

$$\Psi_\infty(\tau_t^m) \equiv 1 + 2\int_0^{\tau_t^m} \Phi_\infty(t)\,dt \approx \frac{2-\tilde{\lambda}}{2(1-\tilde{\lambda})} \underset{\tilde{\lambda}\to 1}{\sim} \frac{1}{2(1-\tilde{\lambda})}. \tag{27}$$

Используя известную асимптотику $\Psi_\infty(\tau)$ при $\tau \to \infty$, из (27) найдем

$$x'(\tau_t^m) \underset{\tilde{\lambda}\to 1}{\sim} \frac{2\sin^2 \pi\beta}{A\pi^2\beta}\,\Gamma(1-2\beta)(1-\tilde{\lambda}), \tag{28}$$

где

$$\alpha(x(t)) = \frac{1}{t}, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \frac{x'(y\tau)}{x'(\tau)} = y^{-2\beta}. \tag{29}$$

Для степенного профиля $\beta = \dfrac{\varkappa - 1}{2\varkappa}$, $x'(t) \sim \varkappa^{-1} W^{\frac{1}{\varkappa}} t^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ и

согласно (28)

$$\tau_t^m \underset{\gamma\to 0}{\sim} \left| \frac{4\varkappa^2 W^{-\frac{1}{\varkappa}}}{\pi^2(\varkappa-1)}\,\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\left(\sin\frac{\pi(\varkappa+1)}{2\varkappa}\right)^2 \right|^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \tag{30}$$

что согласуется с (23).

Для прямоугольного и доплеровского профилей $\Phi_\infty(t)=\infty$, и уравнение (27) нельзя использовать для определения τ_t^m. Можно, однако, показать, что для этих профилей при $t>\tau_t^m$

$$\Phi_\infty(t, \tilde{\lambda}, \gamma)\approx a(\lambda, \gamma)e^{-\frac{\tau}{\tau_d}}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в первое из уравнений (26) и используя асимптотики $a(\lambda, \gamma)$ и τ_d (о выводе которых см. ниже), найдем, что при $\lambda=1$

$$\tau_t^m \propto \tau_d \propto \tau_t. \tag{32}$$

Дадим, наконец, третий способ определения τ_t, применимый для профилей с бесконечными крыльями. Как известно, картина переноса излучения в линии такова: фотон, излученный в некоторой точке, либо сразу далеко улетает от места рождения (если он излучился в крыле линии), либо после некоторой диффузии вблизи от места рождения (если первоначально он был излучен вблизи центра линии). В обоих случаях перенос возбуждения осуществляется во время наибольшего пролета, причем вероятность того, что фотон во время этого пролета удалится на расстояние, превышающее τ, есть $L(\tau, \gamma)$. Если при этом

$$L(\tau, \gamma)\approx L(\infty, \gamma) \tag{33}$$

в том смысле, что второй член асимптотики $L(\tau, \gamma)$ при $\tau\to\infty$ становится равным первому, то такой фотон, очевидно, можно считать погибшим.

В [7] были получены асимптотики $L(\tau, \gamma)$. Для доплеровского профиля:

$$L(\tau, \gamma)\underset{\substack{\tau\to\infty\\ \gamma=\mathrm{const}}}{\sim}\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\exp\left[-\frac{(\gamma\tau)^2}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}\right]}{\gamma^2\tau}, \tag{34}$$

$$L(\tau, \gamma)\underset{\substack{\gamma\tau=\mathrm{const}\\ \gamma\to 0}}{\sim}\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}+\frac{2\gamma}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-2\gamma\tau\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}}-(\gamma\tau)^2\right], \tag{35}$$

$$L(\tau, \gamma)\underset{\substack{\gamma\to 0\\ \gamma\tau=\mathrm{const}\gg 1}}{\sim} L(\tau, 0)+\frac{\gamma^2}{3\sqrt{\pi}}\tau\sqrt{\ln\tau}, \tag{36}$$

а для степенного профиля:

$$L(\tau, \gamma)\underset{\substack{\tau\to\infty\\ \gamma=\mathrm{const}}}{\sim} A\gamma\left(1-e^{-\frac{1}{A\gamma}}\right)\left(1+\frac{2W}{\varkappa-1}\gamma^{-\varkappa}\tau^{1-\varkappa}\right). \tag{37}$$

$$L(\tau, \gamma) \underset{\gamma \to 0}{\sim} L(\tau, 0) + \frac{A}{12\varkappa} W^{-\frac{1}{\varkappa}} (1+\varkappa)(2\varkappa-1)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\gamma^2 \tau^{1-\frac{1}{\varkappa}} \tag{38}$$

($\tau = \text{const} \gg 1$ или $\gamma\tau = \text{const}$).

Из асимптотик (34—39) и известной асимптотики $L(\tau, 0)$ (см., например, [8]) следует, что при $\gamma \ll 1$,

$$L(\tau, \gamma) \approx L(\infty, \gamma),$$

если $\tau = \dfrac{1}{2\gamma\sqrt{\ln\dfrac{1}{\gamma}}}$ (Доплер), $\tau = \left(\dfrac{2W}{\varkappa-1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$ (степенной),

$$L(\tau, \gamma) \approx L(\tau, 0), \tag{39}$$

если $\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{\gamma\sqrt{\ln\dfrac{1}{\gamma}}}$ (Доплер),

$$\tau = \left[\frac{24\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}{(\varkappa+1)(2\varkappa-1)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)}\right]^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad \text{(степенной).}$$

Из (39) видно, что $\tau_t \propto \left(\gamma\sqrt{\ln\dfrac{1}{\gamma}}\right)^{-1}$ для доплеровского профиля и $\tau_t \propto \gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$ для степенного при любом $\varkappa > 1$. Кроме того, в согласии с (39) положим по определению при $\gamma \ll 1$

$$L(\tau_t, 0) = L(\infty, \gamma). \tag{40}$$

Определение (40) применимо для любых профилей с бесконечными крыльями. Используя асимптотику $L(\tau, 0)$ при $\tau \to \infty$, из (40) найдем

$$x'(\tau_t) = \gamma/2\Gamma(\beta), \tag{41}$$

где $x(t)$ и β определяются из (29). Согласно (41) для доплеровского профиля:

$$\tau_t = 1/\gamma\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}} \tag{42}$$

и для степенного

$$\tau_t = W^{\frac{1}{\varkappa-1}}\left[\frac{2}{\varkappa}\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \gamma^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{43}$$

Отметим, что формула (42) согласуется с (21), а (43)—с (30) и (22).

Длина термализации определялась ранее другими авторами. Так, Кастор [9], рассматривая диффузионные поправки к методу вынесения, получил для доплеровского профиля $\tau_t \propto 1/\gamma$. Райбики [10] и Маньян [11], применяя формулу (12) и полагая $l(\gamma) \propto 1/\gamma$, что в общем случае неверно, нашли $\tau_t \propto \gamma^{-3/2}$.

4. *Диффузионная длина.* В случае прямоугольного и доплеровского профилей существует так называемая диффузионная длина $\tau_d = 1/k$, где k — наименьший вещественный корень характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2}\overline{K}(s, \gamma) = 1, \tag{44}$$

здесь

$$\overline{K}(s, \gamma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} K(|\tau|, \gamma)\, d\tau. \tag{45}$$

Для прямоугольного профиля

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{46}$$

уравнение (44) приводится к виду

$$s^4 - (2-\lambda-\lambda\gamma)\, s^2 + 1 - \lambda + \lambda\gamma = \frac{\lambda\gamma}{2} e^{-\frac{1}{\gamma}} \left[(1-s)^2 e^{-\frac{s}{\gamma}} + (1+s)^2 e^{\frac{s}{\gamma}} \right], \tag{47}$$

откуда при $\lambda = 1$ и $\gamma \to 0$ получим $k \sim \sqrt{\gamma}$ и $\tau_d \sim 1/\sqrt{\gamma}$. Ранее В. В. Соболев [1] пришел к аналогичному результату для трехмерной среды.

Для доплеровского профиля уравнение (44) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \lambda A s^2 \int\limits_0^{\infty} \operatorname{ch}(st)\, dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}\int\limits_y^{\infty} \alpha(z)dz}\right) \times \\ \times \left(e^{-\frac{1}{\gamma}\int\limits_{y-\gamma t}^{y} \alpha(z)dz} - e^{-\frac{1}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{y} \alpha(z)dz} \right) dy = 1 - \lambda + \lambda L(\infty, \gamma). \end{gathered} \tag{48}$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при выводе асимптотики $l(\gamma)$, из (48) получим

$$\tau_d \underset{\gamma\to 0}{\sim} \frac{x'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{b\gamma^2} \underset{\gamma\to 0}{\sim} 1/2b\gamma\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}}, \tag{49}$$

где $b=1$ при $\lambda\neq 1$, а при $\lambda=1$ определяется из уравнения

$$b^2\left[\int\limits_0^\infty (e^z-1)\frac{dz}{z^{1+b}}\int\limits_z^\infty e^{-y}\frac{dy}{y^{1-b}}+\int\limits_0^\infty (e^z-1)\frac{dz}{z^{1-b}}\int\limits_0^\infty e^{-y}\frac{dy}{y^{1+b}}\right]=1, \tag{50}$$

которое эквивалентно уравнению $F(b)-F(-b)=1/b$, где $F(b)=$ $=C+\psi(1+b)$, $\psi(x)=\dfrac{d\ln\Gamma(x)}{dx}$, C — постоянная Эйлера. Легко найти, что $b=1/2$.

Асимптотика $\Phi_\infty(\tau, \bar{\lambda}, \gamma)$ дается формулой (32), где

$$a(\lambda, \gamma)=-\frac{2\lambda}{\overline{K}_s(-k, \gamma)}. \tag{51}$$

Для прямоугольного профиля

$$a(1, \gamma)\underset{\gamma\to 0}{\sim} 1/2\sqrt{\gamma}\sim\frac{1}{2}\tau_d, \tag{52}$$

а для доплеровского

$$a(1, \gamma)\underset{\gamma\to 0}{\sim}\frac{4b}{A(4+bd)}\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}}\sim\frac{2}{A\gamma(4+bd)\tau_d}, \tag{53}$$

где

$$\begin{gathered} d=\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}\int\limits_0^x (e^y-1)\ln\frac{x}{y}\,\mathrm{sh}\left(b\ln\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}= \\ =\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[F(x)/x-F(-x)/x\right]\Big|_{x=b}=\pi^2-8. \end{gathered} \tag{54}$$

Из (26), (31), (52) и (53) получим для прямоугольного и доплеровского профилей соответственно $\tau_t^m\sim\ln 2\,\tau_d\approx 0.693\,\tau_d$ и $\tau_t^m\sim\ln[8/(4+bd)]\,\tau_d\approx$ $\approx 0.483\,\tau_d$.

5. *Толщина пограничного слоя в полубесконечной среде.* Функция источников в полубесконечной среде определяется уравнением (8) при $a=0$, $b=\infty$. Пусть $g(\tau)=1$, тогда, как известно, (см., например, [12])

$$S(\infty) = S^*(0) = 1/(1-\tilde{\lambda}) = 1/L(\infty, \gamma). \quad (55)$$

Согласно (55) в полубесконечной среде с равномерно распределенными первичными источниками имеется пограничный слой, в котором функция источников меняется в $(1-\tilde{\lambda})^{-1/2}$ раз. Обозначим его толщину через τ_b, понимая под τ_b то расстояние от границы, с которого начинается асимптотический режим $S(\tau) \approx S(\infty)$.

Поскольку длина термализации τ_t есть по определению среднее расстояние от места рождения фотона до места его гибели, то ясно, что при грубых оценках можно считать τ_b равным τ_t. Более точное определение τ_b можно дать аналогично тому, как это сделано в книге В. В. Иванова [8] для случая $\tilde{\lambda} = \lambda$, а именно будем находить τ_b из уравнения

$$\Psi(\tau_b) \equiv 1 + \int_0^{\tau_b} \Phi(t)\,dt = \frac{1}{L(\infty, \gamma)}, \quad (56)$$

где $\Phi(\tau)$ — резольвентная функция при $\tilde{\lambda} = 1$. Из (56) следует, что при $\gamma \to 0$

$$x'(\tau_b) \sim \frac{16}{\pi^3\beta^2}\Gamma^2\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\gamma, \quad (57)$$

где $x(t)$ и β определяются соотношениями (29).

В заключение отметим, что в общем случае, когда одновременно $\lambda \neq 1$ и $\gamma \neq 0$, величины $\tau_t(\lambda, \gamma)$ и $\tau_b(\lambda, \gamma)$ можно оценить, заменив в $\tau_t(\lambda, 0)$ и $\tau_b(\lambda, 0)$, определение которых см., например, в [8], величину λ на $\tilde{\lambda} = \lambda\,[1 - L(\infty, \gamma)]$.

Ленинградский государственный
университет

CHARACTERISTIC LENGTHS IN RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS FOR MOVING MEDIUM

S. I. GRACHOV

Thermalization length τ_t and diffusion length τ_d for different absorption coefficient profiles are found for infinite one-dimensional medium, moving with constant velocity gradient $\gamma \ll 1$. The thickness of

the boundary layer τ_b for moving semi-infinite medium with uniformly distributed primary sources is also estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 21, 143, 1944.
2. *В. В. Соболев*, Движущиеся оболочки звезд, Изд. ЛГУ, 1947.
3. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 694, 1957.
4. *G. B. Rybicki, D. G. Hummer*, M. N., 144, 313, 1968.
5. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, ЖЭТФ, 52, 536, 1967.
6. *В. П. Гринин*, Астрофизика, 10, 239, 1974.
7. *С. И. Грачев*, Вестн. ЛГУ, № 1, 128, 1976.
8. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. *J. I. Castor*, M. N., 149, 111, 1970.
10. *G. B. Rybicki*, Spectrum Formation in Stars with Steady-State Extended Atmospheres, IAU Colloquium No. 2, N. B. S, Spec. Publ., 332, 87, 1970.
11. *C. Magnan*, J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer, 14, 123, 1974.
12. *U. Frish, H. Frish*, M. N., 173, 167, 1975.