АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 МАЙ, 1976 ВЫПУСК 2

ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ АНАЛОГИ ИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЕЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ КОСМОЛОГИИ

В. А. РУБАН, А. М. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

Поступила 16 декабря 1974
Пересмотрена 28 апреля 1975

В скалярно-тензорной космологии найдены аналитические решения для изотропных моделей с кривизной при $p=\varepsilon/3$. Обсуждаются соотношения между наблюдаемыми параметрами Метагалактики и уточняются ограничения на скорость вариации G. Показано, что скалярное поле может доминировать даже в настоящую эпоху, и вполне допустим его энергетический вклад, сравнимый с критической плотностью.

Изотропные модели с излучением ($p=\varepsilon/3$) в конформном представлении скалярно-тензорной теории тяготения. В последнее время интенсивно обсуждаются различные скалярно-тензорные модификации ОТО, среди которых наиболее физически содержательным и полно разработанным является вариант Иордана—Бранса—Дикке [1]. В этой теории для описания гравитации дополнительно к метрике пространства — времени $V_4 - ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ вводится скалярное безмассовое φ-поле, заменяющее «константу» тяготения $G \propto \varphi^{-1}$. Такое гипотетическое дальнодействующее поле, которое, согласно эвристической идее Маха, определяется всей материей во Вселенной, позволяет реализовать общековариантным образом гипотезу Дирака о вековой вариации константы гравитационного взаимодействия масс $-|\dot{G}/G| \neq 0$ вследствие хаббловского расширения. Скалярное φ-поле не взаимодействует непосредственно с материальными источниками T_{ik} и проявляется только через гравитационное влияние, так что уравнения движения $T^k_{i;k}=0$ имеют такой же вид, как и в ОТО (в частности, выполняется слабый принцип эквивалентности — пробные частицы и лучи света движутся по геодезическим V_4).

Наряду с исходной формулировкой скалярно-тензорной теории возможны ее различные конформно-преобразованные представления [1, 2]: $\bar{g}_{ik} = \lambda(x^n) g_{ik}$, $\bar{\varphi} = \varphi/\lambda$, среди которых наиболее простым в математическом отношении является вариант Дикке [3] с $\bar{\varphi} = G_0^{-1} = \text{const}$. В этом формализме для конформной метрики $d\bar{s}^2 = \varphi ds^2$ справедливы уравнения Эйнштейна[1]:

$$\bar{G}_i^k = \bar{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \bar{R} = -\chi(\bar{T}_i^k + \bar{\Lambda}_i^k), \quad \chi = 8\pi G_0 = \text{const}, \tag{1}$$

а скалярная компонента $\lambda = \bar{G}_0\varphi(x^k)$ отделяется от гравитации и может рассматриваться как стороннее безмассовое поле:

$$\bar{\Box} \ln \lambda = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{g}^{ik}\lambda_{,k}/\lambda\right) = \frac{8\pi}{\xi}, \quad \xi = 2\omega + 3, \tag{2}$$

которое выступает в качестве дополнительного источника геометрии V_4 с тензором энергии-импульса вида:

$$\bar{\Lambda}_i^k = \frac{1}{2\bar{\chi}\lambda^2}\left(\lambda_{,i}\lambda^{,k} - \frac{1}{2}\delta_i^k \lambda_{,n}\lambda^{,n}\right). \tag{3}$$

Однако при этом скалярное λ-поле уже взаимодействует непосредственно с частицами (за исключением безмассовых), нарушая принцип геодезического движения и приводя к изменению их масс покоя — $\bar{m} = \lambda^{-1/2} m_0$, так что законы сохранения для обычной материи выполняются лишь в совокупности со скалярным λ-полем: $(\bar{T}_i^k + \bar{\Lambda}_i^k)_{;k} = 0$.

Согласно интерпретации Дикке [1, 3], исходный и преобразованный варианты скалярно-тензорной теории отвечают различному выбору фундаментальных единиц или масштабов измерений: атомных ($\hbar$, c, $m = \text{const}$, G—переменная) или гравитационных ($\hbar$, c, $G = \text{const}$, $\bar{m}$ — переменная). Отметим, что эти два представления теории неэквивалентны, т. к. интеграл действия и уравнения движения материи конформно неинвариантны. Они различаются, прежде всего, базисными метриками, и при анализе фи-

---

[1] Здесь $1/\omega$ — безразмерный параметр связи скалярного и тензорного полей; причем, согласно экспериметальным данным по проверке релятивистских гравитационных эффектов в Солнечной системе считается, что $|\omega| > 6$. Скорость света $c = 1$; точка с запятой означает ковариантное, а запятая — обычное дифференцирование.

зических следствий в конформном формализме необходимо преобразовать результаты к исходному представлению с реальной физической геометрией V_4 и нормальным, как в ОТО, поведением часов и масштабов, либо надо локально переопределять масштабы и единицы измерения [4].

При обсуждении ряда проблем однородной космологии конформное представление иногда оказывается более удобным, чем исходное, поскольку тензор энергии—импульса (3) при $\lambda = \lambda(t)$ имеет гидродинамическую структуру:

$$\tilde{T}_0^0 = -\tilde{T}_1^1 = -\tilde{T}_2^2 = -\tilde{T}_3^3 = \frac{\zeta}{4\pi}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2, \qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt}, \tag{4}$$

и однородное скалярное поле действует подобно покоящейся жидкости с предельно жестким уравнением состояния $\tilde{p}_\lambda = \tilde{\varepsilon}_\lambda = \zeta/4\pi(\lambda'/\lambda)^2$ [4]. Следовательно, некоторые качественные результаты однородной скалярно-тензорной космологии можно получить даже в рамках ОТО на основе анализа динамики изотропных [4, 6] или более общих анизотропных моделей [7], заполненных смесью двух взаимодействующих гидродинамических компонент: покоящейся материей с заданным уравнением состояния $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{\varepsilon})$ и «скалярной жидкостью» с $\tilde{p}_\lambda = \tilde{\varepsilon}_\lambda$. Суммарная энергия материи и «скалярной жидкости» в фиксированом объеме $\tilde{V}$ сопутствующей системы изменяется согласно адиабатическому закону расширения для такой среды:

$$d(\tilde{E}\tilde{V}) + \tilde{\Pi}\, d\tilde{V} = 0, \qquad \tilde{E} = \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}_\lambda, \qquad \tilde{\Pi} = \tilde{p} + \tilde{p}_\lambda. \tag{5а}$$

Из-за прямого взаимодействия этих компонент, обусловленного генерацией «маховской» части λ-поля следом тензора энергии импульса материи $\tilde{T} = \tilde{\varepsilon} - 3\tilde{p} \neq 0$, в общем случае происходит обмен энергий между ними, ведущий к переменности масс покоя частиц — $\tilde{m} = m_0\lambda^{-1/2}$ [4]

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\varepsilon}\tilde{V}) + \tilde{p}\frac{d\tilde{V}}{dt} = -\frac{\lambda'}{2\lambda}(\tilde{\varepsilon} - 3\tilde{p})\,\tilde{V} \tag{5в}$$

Но для наиболее интересного в скалярно-тензорной космологии уравнения состояния $\tilde{p} = \tilde{\varepsilon}/3$ (которое приближенно выполняется на радиационной стадии, когда в материальных источниках доминирует излучение, а также, вероятно, применимое для сверхплотной «горячей» материи и на более ранних этапах расширения Вселенной) прямым взаимодействием такой ультрарелятивистской компоненты со «скалярной жидкостью» (связанным с генерацией «маховской» части λ-поля) можно пренебречь и достаточно учитывать влияние только свободной вакуумной компоненты λ-поля[1].

Благодаря максимальной жесткости «скалярной жидкости» ее плотность энергии нарастает при общем адиабатическом сжатии наиболее быстро ($\bar{\varepsilon}_\lambda = \bar{p}_\lambda \propto \bar{V}^{-2}$). Поэтому однородная мода свободного скалярного поля доминирует над обычными материальными источниками и должна радикально изменять по сравнению с ОТО характер начального состояния и динамику ранних стадий расширения Вселенной как в изотропной [4, 6, 10, 11], так и в анизотропной [7, 9, 10—14] космологии.

Изотропные модели с метриками

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\{d\chi^2 + S^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]\},$$

$$S(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \operatorname{sh}\chi, & k = -1 \end{cases} \tag{6}$$

исследовались как в исходном [1, 10, 11, 15—17], так и в конформном [4, 6, 18] представлениях. Для плоского ($k=0$) варианта были найдены точные общие решения при наличии материи с $p=n\varepsilon$ ($0\leqslant n\leqslant 1$) [6, 11], а также в вакууме [19]. Решения с учетом пространственной кривизны не удается получить в исходном формализме, и поэтому поведение «открытой» ($k=-1$) и «закрытой» ($k=+1$) моделей анализировалось лишь на частных примерах посредством численного интегрирования при $p=0$ [1, 10, 17]. Для случая $p=(1/3)\varepsilon$ Р. Моргенстерн [6] исследовал только в конформном представлении изотропные решения (6) с $k=\pm 1$, выраженные в виде громоздких квадратур и по форме малоудобные в астрофизических приложениях.

Используя аналогию между однородными общерелятивистской и конформно-преобразованной скалярно-тензорной космологиями, мы укажем общие решения (включая и вариант с $\xi<0$) для всех изотропных моделей (6) при $p=\varepsilon/3$, записанные в простой параметрической форме через элементарные функции, и кратко обсудим их динамическое поведение.

Полевые уравнения скалярно-тензорной космологии в конформном представлении для изотропных метрик (6) имеют вид:

$$R'' = -\frac{\varkappa}{6}(E + 3\Pi), \quad R'^2 = \frac{\varkappa E R^2}{3} - k, \quad \frac{d}{dt}\left(R^3\frac{\lambda'}{\lambda}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\varepsilon'/(p+\varepsilon) = -3R'/R$$

---

[1] Однородные модели, заполненные смесью невзаимодействующих «скалярной жидкости» с $p_\lambda = \varepsilon_\lambda$ и обычной материи даже при $p=n\varepsilon$ могут представлять интерес с точки зрения упрощенных скалярно-тензорных теорий [8, 9], в которых гипотетическое скалярное поле не связано с материей и имеет чисто вакуумную природу. Отметим, что для плоской изотропной метрики можно получить аналитические решения при $p=n\cdot\varepsilon$ ($0\leqslant n\leqslant 1$).

и, следовательно, первые интегралы при $p=\varepsilon/3$:

$$\gamma\varepsilon = \frac{3M^2}{R^4}; \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{C}{R^3}, \quad \gamma\varepsilon_\lambda = \frac{\zeta}{4}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \pm\frac{3S^2}{R^6}, \quad S^2 = \frac{|\zeta|}{12}C^2; \tag{8}$$

$$\zeta = 2\omega + 3, \quad M - \mathrm{const}.$$

Они, по существу, совпадают с уравнениями Эйнштейна, в которых дополнительно к обычной ультрарелятивистской материи ($M\neq0$) имеется чисто вакуумное скалярное поле $\lambda=\lambda(t)$, действующее подобно предельно жесткой жидкости ($S\neq0$), так что задача сводится к интегрированию уравнения Фридмана для смеси таких двух невзаимодействующих компонент с $p=\varepsilon/3$ и $p_\lambda=\varepsilon_\lambda$:

$$R'^2 = \pm\frac{S^2}{R^4} + \frac{M^2}{R^2} - k, \quad \lambda/\lambda_0 = \exp\left\{C\int\frac{dt}{R^3(t)}\right\}, \tag{9}$$

где „+" отвечает $\zeta>0$, „−" — варианту с $\zeta<0$ ($\omega<-6$).

Квазиэвклидовый вариант интересен прежде всего для анализа влияния свободного скалярного поля на динамику ранних стадий расширения изотропной Вселенной, когда пространственной кривизной заведомо можно пренебрегать ($z>1000$).

Характер начального состояния в изотропной скалярно-тензорной космологии существенно зависит от знака константы $\zeta=(2\omega+3)$.

Если $\zeta=(2\omega+3)>0$, тогда решение вида

$$R(\eta) = \frac{S}{M}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta}{2}, \quad t = \frac{S^2}{4M^3}(\mathrm{sh}\,\eta - \eta), \tag{10}$$

$$\lambda(\eta) = \lambda_0\left(\mathrm{th}\,\frac{\eta}{4}\right)^{\pm2\sqrt{\frac{3}{\zeta}}}$$

обязательно имеет сингулярность, и в изотропных моделях существует вакуумная стадия начального расширения с универсальной асимптотикой точечного коллапса:

$$R(t)\propto t^{1/3}\to0, \quad \lambda(t)\propto t^{\pm2/\sqrt{3\zeta}}, \tag{11}$$

которая не зависит от наличия материи и определяется только свободным скалярным полем.

Если $\zeta=(2\omega+3)<0$, тогда в моделях с материей при $P=\varepsilon/3$:

$$R(\eta) = \frac{S}{M}\,\mathrm{ch}\,\eta, \quad t = \frac{S^2}{4M^3}\left(\eta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\eta\right), \tag{12}$$

$$\lambda(\eta) = \lambda_0\exp\left\{\pm2\sqrt{\frac{3}{|\zeta|}}\,\mathrm{arctg}\,e^{\eta}\right\}$$

отсутствует начальная сингулярность, и модель после «регулярного «отражения» ($R_{min} = (S/M) \neq 0$) снова неограниченно расширяется, причем λ-поле меняется монотонно.

В ходе неограниченного расширения влияние «скалярной» жидкости быстро ослабевает по сравнению с гравитирующей материей, и плоские модели (10), (12) выходят при $t \gg t_* = S^2/M^2$ на фридмановский режим для $p = \varepsilon/3$: $R \simeq \sqrt{2Mt} \to \infty$, $\lambda(t) \to G_0^{-1} = \text{const}$.

Пространственную кривизну ($k = \pm 1$) необходимо учитывать лишь в позднюю эпоху расширения Вселенной при красных смещениях $z \lesssim 10$, что важно для сравнения скалярно-тензорной космологии с наблюдательными данными. Поэтому «закрытую» и «открытую» модели с $p = \varepsilon/3$ (см. Приложение) имеет смысл обсуждать в связи с ранее высказанными гипотезами [20, 21], что ультрарелятивистские трудно наблюдаемые формы материи (нейтрино низких энергий, гравитационные и скалярные волны и т. п.) являются главной компонентой материальных источников в Метагалактике даже сейчас. Для закрытых моделей характерно финитное расширение с приближением к фридмановскому режиму вблизи

$$R_{max} = \frac{M}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(1 + \frac{4S^2}{M^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

и $\zeta > 0$ наличие двух сингулярностей вакуумного типа (11). „Открытая" инфинитно расширяющаяся модель стремится к фридмановской на параболической (если $\eta_* \ll 1$) или гиперболической вакуумной (при $\eta_* \gtrsim 1$) стадиях с асимптотическим выходом на милновский режим, когда гравитация материи становится несущественной: $R \simeq t \to \infty$, $\lambda(t) \to \lambda_0 = G_0^{-1} = \text{const}$.

Если $\zeta < 0$, то, как и для плоского варианта (12), свободное скалярное поле ликвидирует сингулярность в «открытой» и «закрытой» моделях с материей.

Соотношения между наблюдаемыми параметрами Метагалактики. Для астрофизических приложений полученные в конформном формализме решения (см. Приложение) надо преобразовать к исходному представлению скалярно-тензорной космологии с истинной метрикой реального пространства—времени V_4:

$$ds^2 = \lambda^{-1} d\tilde{s}^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\, d\sigma^2 = a^2(\eta)\,(d\eta^2 - d\sigma^2). \tag{13}$$

Таким образом, получаем для «закрытой» и «открытой» моделей с $p = \varepsilon/3$ точные общие решения в параметрической форме (13), но уже в рамках исходного варианта Иордана—Бранса—Дикке.

С точки зрения исходного и конформного представлений динамическое поведение изотропных моделей сильно различается только при $\zeta > 0$

на вакуумной скалярно-доминирующей стадии вблизи сингулярности, которая в исходном варианте характеризуется несколько иной, чем (11) асимптотикой точечного коллапса

$$a \propto \tau^{1/3(1 \pm 2/(1 \pm \sqrt{\ldots}))} \to 0, \qquad \varphi \propto \tau^{\mp 3/(1+3\sqrt{\ldots})} \tag{14}$$

с двумя различными ветвями: $\varphi \to 0$ ($G \to \infty$) или $\varphi \to \infty$ ($G \to 0$).

Однако эти оба представления близки и практически совпадают в позднюю эпоху расширения Вселенной, когда $\varphi \to \text{const} \neq 0$.

Преобразованные к физической метрике (13) решения для „закрытой" и „открытой" моделей при $p = \varepsilon/3$ (а также „плоской" с $p = 0$ и $p = \varepsilon/3$) [11] можно использовать для построения зависимостей между наблюдаемыми типа видимой звездной величины $m_v(z)$, числа галактик $N(z)$ и т. п. ($z = (a_0 - a)/a$ — красное смещение) и сопоставления их с данными внегалактической астрономии (подобно тому, как это делалось в ОТО для фридмановских и некоторых специальных моделей при $p = 0$ в скалярно-тензорной космологии [22]). Это дает возможность определить кинематические параметры Метагалактики — постоянную Хаббла $H_0 = (\dot a/a)_0 = (d \ln a/d\tau)_0$ и параметр замедления $q_0 = -H_0^{-2}(\ddot a/a)_0$, а также наложить ограничения на допустимый уровень свободного скалярного поля ($S \neq 0$) и вековой вариации гравитационной „постоянной" $(\dot G/G)_0$ в современную эпоху.

Из точного решения для простейшей квазиевклидовой модели ($k=0$) при $p=0$ легко указать ряд полезных соотношений в случае преобладания нерелятивистского вещества в Метагалактике:

$$\dot\varphi = \frac{8\pi\gamma}{3+2\omega}(\tau + \tau_1), \qquad H = \frac{8\pi(1+\omega)}{3+2\omega}\frac{\gamma}{\varphi}(\tau + \tau_2), \qquad \rho = \frac{M}{a^3} > 0;$$

$$M,\ \tau_1,\ \tau_2 = \text{const}, \tag{15}$$

в частности, связь между вековой вариацией $\Lambda = \frac{\dot G}{G} = -\frac{\dot\varphi}{\varphi}$ и мировым временем τ (определяющим возраст $T = \tau - \tau_+$ в сингулярных моделях, при $\omega > 6$):

$$\frac{\Lambda}{H} = -\frac{d \ln \varphi}{d \ln a} = \frac{\tau + \tau_1}{(1+\omega)(\tau + \tau_2)} = \frac{T + \tau_+ + \tau_1}{(1+\omega)(T + \tau_+ + \tau_2)}, \tag{16}$$

$$\tau_+ = -\tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)\frac{1 + \omega + \sqrt{1 + \frac{2\omega}{3}}}{(4+3\omega)\sqrt{1 + \frac{2\omega}{3}}}, \qquad S = \tau_2 - \tau_1.$$

Для изотропных моделей, заполненных излучением с $p = 1/3\,\varepsilon$, согласно (13) и (9) получаем:

$$-\frac{\Lambda}{H} = C/\left\{(\pm S^2 + M^2\varphi a^2 - k\varphi^2 a^4)^{1/2} - \frac{C}{2}\right\}, \tag{17}$$

$$\dot\varphi = C/a^3, \quad \varepsilon = M/a^4,$$

так что при $k=0$ в соответствии с [11]

$$-\frac{d\ln G}{d\ln a} = 3C/8\pi M(\tau_i + \tau_{i0}), \quad \tau_{i0} = \text{const}. \tag{18}$$

Соотношения между наблюдаемыми параметрами Метагалактики можно получить более простым способом, если использовать уравнения поля для физической метрики (13) в исходном (а не конформном, как это делалось в работах [18]) представлении скалярно-тензорной космологии Иордана—Бранса—Дикке [1]:

$$R_1^1: \frac{\ddot a}{a} + 2\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{\dot a\dot\varphi}{a\varphi} + \frac{2k}{a^2} = \frac{8\pi}{(3+2\omega)\varphi}[\varepsilon + \omega(\varepsilon - p)],$$

$$-G_0^0: \frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{\dot a\dot\varphi}{a\varphi} - \frac{\omega}{6}\frac{\dot\varphi^2}{\varphi^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3\varphi}\varepsilon, \tag{19}$$

$$\Box\varphi = \frac{1}{a^3}\frac{d}{d\tau}(a^3\dot\varphi) = \frac{8\pi}{3+2\omega}(\varepsilon - 3p).$$

Эти уравнения, отнесенные к настоящему времени τ_0, дают следующие два соотношения между 5 наблюдаемыми величинами H_0, q_0, Λ_0, ... и радиусом кривизны a_0:

$$H_0^2 - H_0\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 - \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0^2 - \frac{\chi_0\alpha\varepsilon_0}{3} = -\frac{k}{a_0^2}; \quad \alpha = \frac{2\omega+3}{3\omega+4},$$

$$-q_0H_0^2 + H_0\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 + \frac{\omega}{3}\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0^2 = -\frac{\chi_0\alpha[\omega(\varepsilon_0 + 3p_0) + 3\varepsilon_0]}{3(3+2\omega)}, \tag{20}$$

причем, в общем случае считается, что Метагалактика заполнена смесью нерелятивистского вещества ($P=0$) и излучения ($P=\varepsilon/3$). Критическая плотность, отвечающая плоскому варианту ($k=0$) в скалярно-тензорной космологии

$$\frac{\chi_0\alpha}{3}\varepsilon_c^* = H_0^2 - H_0\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 - \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0^2, \tag{21}$$

существенно зависит от величины и знака вековой вариации $(\dot G/G)_0$, причем, как и в ОТО, значение ε_c^* не связано с уравнением состояния материи.

Относительная скорость вариации гравитационного параметра может быть записана в виде:[1]

$$\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 = -\frac{3}{2} H_0 \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{4\omega}{3}(q_0 - \beta)} \right|;$$

$$\beta = \frac{\varkappa_0 \varphi (3\varepsilon_0 + \omega(\varepsilon_0 + p_0))}{3(3 + 2\omega) H_0^2}. \qquad (22)$$

В отличие от ОТО (где $q_0 = \beta$), теперь параметр замедления — $q_0 > \beta - 3/4\omega$ ($\omega > 6$) либо $q_0 < \beta + (3/4|\omega|)$ ($\omega < -6$) — не фиксирует однозначно плотность ε_0 и кривизну моделей.

Дополнительно к общерелятивистским временным масштабам $T_H = H_0^{-1} \simeq 2.10^{10}$ *лет* и $(\varkappa\varepsilon_0)^{-1/2}$, довольно близким по величине, скалярное поле вводит новую шкалу эволюции Метагалактики, которая задается пока не установленным значением вековой вариации $\Lambda_0^{-1} = (\dot G/G)_0^{-1}$. Если исходить из экспериментально допустимого верхнего предела вековой вариации [24] $|\dot G/G|_0 \leq 3 \cdot 10^{-10}$ *лет*$^{-1}$, тогда в соотношениях (20) вклад свободного скалярного поля будет преобладающим, и, следовательно, скалярно-доминирующая стадия ($\omega > 6$) должна захватывать и настоящую эпоху. Однако столь быстрая вариация $(\dot G/G)_0 \gg H_0$ при $\omega > 6$ совместима только с „закрытой" ($k = +1$) моделью и требует больших значений ускорения $q_0 \gg \beta$, что должно приводить к резкому уменьшению возраста Вселенной $T < \Lambda_0^{-1} < 10^{10}$ *лет*). Несингулярную космологию ($\omega < -6$) при $|\dot G/G| > H_0$ можно согласовать только с „открытой" моделью, если предполагать, что регулярное „отражение" происходило при $z < 10$, а это очень маловероятно. С учетом неопределенности данных для плотности материи $\varepsilon_0 = (10^{-29} - 10^{-30})$ *г/см*^{3} и давления p_0, а также величины параметра замедления $q_0 = (1 \pm 0.5)$ [23], можно утверждать, что вековая вариация (22) вряд ли превышает H_0, хотя ее знак произволен. Таким образом, при $|\dot G/G|_0 \leq H_0 \simeq 5 \cdot 10^{-11}$ *лет*$^{-1}$ вклад эффективной „энергии" скалярного поля в (20) не больше критического общерелятивистского значения $\varepsilon_c \simeq 5 \cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}, хотя в „открытой" ($k = -1$) модели он может превышать вклад обычной материи даже в современную эпоху.

---

[1] В работе [17] для частного случая моделей с $P = 0$ несколько иной процедурой было получено сходное с (22) выражение для $(\Lambda)_0$, причем автор обсуждал и нефизическую ветвь в (19), которая не удовлетворяет принципу соответствия с ОТО в пределе $(\Lambda)_0 \to 0$.

Если в Метагалактике сейчас основной формой материальных источников являются фоновые излучения с $p=\varepsilon/3$, тогда вековая вариация «константы» тяготения, обусловленная только наличием свободного скалярного поля,

$$\left(\frac{\dot G}{G}\right)^2_0 = \frac{6}{\omega}\left[H_0^2(q_0-1) - \frac{\varkappa\varepsilon}{3}(1-\varepsilon_\varphi)\right] \tag{23}$$

может быть выбрана сколь угодно малой за счет сокращения продолжительности скалярно-доминирующей стадии ($\omega>6$), причем в зависимости от начальных условий G либо уменьшается, либо увеличивается. Подчеркнем, что в несингулярной космологии при $\omega<-6$ вклад свободного φ-поля сейчас должен быть очень мал (в частности, при $p=\varepsilon/3$ $|\dot G/G|_0\leqslant H_*$), чтобы «отражение» (когда плотности материи и отрицательной скалярной энергии сравниваются) происходило в достаточно раннюю эпоху.

Для более реалистичных моделей Вселенной, заполненной смесью нерелятивистского вещества ($p=0$) и излучений ($p=\varepsilon/3$) обязательно надо учитывать и «маховскую» (порождаемую этим веществом с $T=\varepsilon-3p\neq0$) часть вековой вариации $(\dot G/G)_0$. Последняя при неограниченном расширении в «плоском» и «открытом» вариантах становится преобладающей, как легко видеть из общего решения для квазиэвклидовой модели с $p=n\varepsilon$ $(0\leqslant n\leqslant 1)$ [11]. В случае $p=\varepsilon/3$ (когда скалярное φ-поле может быть только свободным) происходит быстрый выход на фридмановскую асимптотику с $G(t)\to G_0$ при $a(t)\to\infty$, тогда как для чисто „маховского" плоского ($k=0$) решения и отсутствие свободного скалярного поля при $p=n\varepsilon$ $(0\leqslant n\leqslant 1/3)$ [16] гравитационный параметр $G/G_0=(a/a_0)^{-2(1-3n)/[4+3\omega(1-n^2)]}$ стремится к нулю ($\omega>-6$), либо к бесконечности ($\omega<-6$). Следовательно, в квазиэвклидовой модели относительная скорость вариации G, обусловленная „маховским" вкладом материи с $p=\varepsilon/3$, уже связана с постоянной Хаббла:

$$-\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 = \frac{1-3n}{1+\omega(1-n^2)}H_0. \tag{24}$$

Если сейчас в Метагалактике доминирует вклад нерелятивистского вещества с $p=0$, тогда „маховская" составляющая вековой вариации $-(\dot G/G)_0\lesssim(1/1+\omega)H_0\simeq10^{-11}$ *лет*$^{-1}$ ($|\omega|\gtrsim6$) при $\rho_m<\rho_c\simeq5\cdot10^{-30}$ *г/см*^{3}, хотя в „закрытой" ($k=+1$) модели, согласно оценкам [1, 10] она должна быть несколько больше: $|\dot G/G|_0\lesssim3\cdot10^{-11}$ *лет*$^{-1}$ ($\rho_m\simeq$ $\simeq2\cdot10^{-29}$ *г/см*^{3}).

Следует иметь в виду, что для „открытой" ($k=-1$) модели на милновской стадии инерциального разлета, когда материя и свободное скалярное поле уже не существенны в динамике), „маховское" φ-поле, порождаемое нерелятивистским веществом ($P = 0$), в соответствии с (19):

$$\dot{\varphi} = \frac{8\pi\rho\tau}{3+2\omega}, \quad \varphi^*(\tau) = \varphi_0 - \frac{8\pi M}{(3+2\omega)\tau}; \quad a(\tau) \propto \tau, \quad \rho = \frac{M}{a^3}, \tag{25}$$

т. е. асимптотически $\varphi = \mathrm{const}$, как и при $p = \varepsilon/3$ в (18). Поэтому в „открытой" модели „маховская" вековая вариация при $p = 0$

$$\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0^M = \frac{H_0}{1+\frac{2\omega}{3}}\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) \tag{26}$$

значительно меньше, чем в „плоской" (24), и при низкой плотности вещества $\rho_m \simeq 3\cdot 10^{-31}$ $г/см^3$ в Метагалактике $(\dot G/G)_0^M \simeq 10^{-12}$ $лет^{-1}$.

Однако вклад в среднюю плотность нерелятивистского вещества от „корон" галактик, а также и „горячего" метагалактического газа, возможно, близок к критическому значению $\rho_c \simeq 5\cdot 10^{-30}$ $г/см^3$, так что наиболее вероятная оценка „маховской" части вековой вариации $|\dot G/G|_0^M > (1/|1+\omega|)\,H_0 \approx 10^{-11}$ $лет^{-1}$ ($|\omega| = 6$) указывает ее нижнюю теоретическую границу в Метагалактике.

Заключение. Скалярное φ-поле в космологии Иордана—Бранса—Дикке должно менять динамику расширения Вселенной, особенно на ранних релятивистских стадиях, по двум причинам. Во-первых, из-за переменности гравитационного параметра G, который в прошлом мог быть как значительно больше, так и меньше современного значения G_0 (в зависимости от начальных условий, уравнения состояния материи и знака ω). Во-вторых, из-за того, что свободное скалярное поле является дополнительным источником геометрии V_4 и, если $\omega > 6$, на ранних стадиях плотность его эффективной энергии может на много порядков превышать вклад обычной материи. Принципиальное различие между скалярно-тензорной и общерелятивистской космологиями обусловлено однородной модой свободного φ-поля, которая, в отличие от тензорной, совместима с изотропией и действует в некотором отношении подобно идеальной жидкости с предельно жестким уравнением состояния p_s и ε_s. Благодаря максимальной «жесткости» динамическое влияние такой «скалярной жидкости» растет при сжатии наиболее быстро и радикально меняет природу состояния Вселенной.

Если $\omega > 6$, то неизбежно существует начальная сингулярность и изотропная скалярно-доминирующая стадия вакуумного типа (20), которые определяются только свободным φ-полем и не зависят от наличия материи.

Если $\omega < -6$, тогда свободное φ-поле — эквивалент «скалярной жидкости» с отрицательной плотностью энергии и давлением — в моделях с материей устраняет сингулярность, обеспечивая регулярный переход от сжатия к расширению (за счет нарушения энергетического условия теорем Пенроуза—Хоукина).

При классическом рассмотрении вариант скалярно-тензорной теории с $\omega < -6$ вполне допустим и приводит к привлекательной возможности построения несингулярной изотропной космологии. Но в квантовой трактовке такое скалярное поле с отрицательной плотностью энергии должно, вероятно, приводить к неустойчивости физического вакуума и спонтанному рождению частиц (подобно С-полю Хойля-Нарликара)[1].

Свободное скалярное φ-поле в зависимости от знака ω ускоряет ($\omega > 6$), либо замедляет ($\omega < -6$) расширение по сравнению с моделями Фридмана, и поэтому в «горячем» варианте оно может влиять на первичный ядерный синтез [4, 10].

Можно было бы наложить ограничения на допустимый уровень свободного φ-поля и продолжительность скалярно-доминирующей стадии из данных по химическому составу, но они пока недостаточно определенные. При расширении влияние свободного φ-поля быстро ослабевает по сравнению с гравитирующей материей и пространственной кривизной, и модели выходят на «маховские» режимы, которые по динамике близки к фридмановским и характеризуются минимальной вариацией G. Эта «маховская» часть φ-поля, порождаемая нерелятивистским веществом в Метагалактике, определяет нижнюю границу вековой вариации $|\dot G/G|_0 \leq (1/|1+\omega|)H_0 \simeq$ $\simeq 10^{-11}$ *лет*$^{-1}$ ($|\omega| = 6$) при средней плотности $\rho_m \sim \rho_c \sim 5\cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}, что значительно меньше экспериментально установленного верхнего предела $|\dot G/G|_0 \leq 3\cdot 10^{-10}$ *лет*$^{-1}$. С оценками возраста Вселенной ($T \geq 10^{10}$ *лет*) можно согласовать и более быструю вариацию $(\dot G/G_0) <$ $< H_0 \simeq 5\cdot 10^{-11}$ *лет*$^{-1}$, так что в принципе допустим и вклад свободного скалярного φ-поля при $\omega > 6$ с эффективной плотностью энергии порядка или меньше критического значения $\varepsilon_c = 5\cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}. Если $\omega < -6$, то в несингулярной космологии влияние свободного скалярного φ-поля сейчас ничтожно мало при достаточно раннем „отражении", и Метагалактика должна описываться „маховскими" решениями с $p = 0$.

На поздней «маховской» стадии расширения Вселенной, когда вековая вариация $(\dot G/G)_0$, в основном, определяется нерелятивистским веществом, ее знак противоположен знаку $\zeta = 2\omega + 3$ независимо от кривизны. По тому, уменьшается ($\omega > 6$) или увеличивается ($\omega < -6$) «константа» G, сейчас

---

[1] На это обстоятельство обратили наше внимание В. Н. Грибов и Я. Б. Зельдович.

можно судить о природе начального состояния Вселенной (если при $\omega > 6$ вклад свободного скалярного поля в вековую вариацию $(\dot{G}/G)_0$ меньше «маховского»).

Авторы благодарят Л. Э. Гуревича за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИЯФ им. Б. П. Константинова АН СССР
САО АН СССР

Приложение

Точные решения для „открытой“ ($k = -1$) и „закрытой“ ($k = +1$) моделей с $p = \varepsilon/3$.

A. $\zeta > 0$, $k = -1$: $R^2(\eta) = M^2 \operatorname{sh}^2 \eta + S \operatorname{sh} 2\eta$, $t = \int_0^\eta R(\eta)\, d\eta$,

$$\varphi/\varphi_0 = (1 + 2S/M^2 \operatorname{ctg} \eta)^{\pm\sqrt{3/\zeta}}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{const} > 0.$$

B. Случай $k = +1$ получается заменой гиперболических функций на соответствующие тригонометрические.

C. $\zeta < 0$, $k = -1$: $R^2(\eta) = \frac{1}{2}\sqrt{M^4 + 4S^2} \operatorname{ch} 2\eta - \frac{M^2}{2}$,

$$\varphi/\varphi_0 = \exp\left\{\pm 2\sqrt{\frac{3}{|\zeta|}} \arcsin \frac{\sqrt{M^4 + 4S^2} - M^2 \operatorname{sh} 2\eta}{\sqrt{M^4 + 4S^2} \operatorname{ch} 2\eta - M^2}\right\}.$$

D. $\zeta < 0$, $k = +1$: $R^2(\eta) = \frac{1}{2} M^2 \left\{1 + \left(1 - \frac{4S^2}{M^4}\right)^{1/2} \sin 2\eta\right\}$,

$$\varphi/\varphi_0 = \exp\left\{\pm 2\sqrt{\frac{3}{|\zeta|}} \operatorname{arc\,tg} \frac{M^2 \operatorname{tg} \eta + \sqrt{M^4 - 4S^2}}{2S}\right\}.$$

GENERAL RELATIVISTIC ANALOGIES OF THE ISOTROPIC MODELS AND THE LIMITATIONS OF THE OBSERVABLE QUANTITIES IN THE SCALAR-TENSOR COSMOLOGY

V. A. RUBAN, A. M. FINKELSTEIN

In the framework of scalar-tensor cosmology the analytical solutions for isotropic models with the curvature at $p = \varepsilon/3$ have been obtained. The relations between observable parameters of the Universe

have been discussed and the limitations of G-variation have been defined more precisely. It has been shown that the scalar field is able to dominate at the present epoch and its energetic contribution can be of the order of critical density.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Brans, R. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961; *P. Dicke*, В сб. „Гравитация и относительность", Мир, М., 1964.
2. *R. E. Morgenstern*, Phys. Rev., D3, 2946, 1971. *E. R. Harrison*, Phys. Rev., D6, 2077, 1972.
3. *R. H. Dicke*, Phys. Rev., 125, 2163, 1962.
4. *R. H. Dicke*, Ap. J., 152, 1, 1968.
5. *C. McIntosh*, J. Math. Phys., 11, 250, 1970.
6. *R. E. Morgenstern*, Phys. Rev., D4, 278, 286, 954, 1971.
7. *В. А. Рубан*, препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, № 355, Л., 1971.
8. *B. Tupper*, Nuovo Cimento, 19, 135, 1974; Lett. Nuovo Cimento, 10, 627, 1974.
9. *В. А. Белинский, И. М. Халатников*, ЖЭТФ, 63, 121, 1972.
10. *G. Greenstein*, Astrophys. Space Sci., 2, 155, 1968.
11. *L. E. Gurvich, A. M. Finkelstein, V. A. Ruban*, Astrophys. Space Sci., 22, 232, 1973.
12. *V. A. Ruban, A. Finkelstein*, Preprint LNPI No. 59, L., 1973; GRG 6, 742, 1975. Lett. Nuovo Cimento, 5, 289, 1972.
13. *H. Narlari*, Progr. Theor. Phys., 47, 1824; 48, 703, 1972.
14. *R. A. Matzner, M. P. Ryan, E. M. Toton*, Nuovo Cimento, 14B, 161, 1973.
15. *H. Narlarl*, Progr. Theor. Phys., 42, 544, 1969.
16. *Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 4, 567, 1968; 5, 555, 1969.
17. *А. В. Манджос*, Укр. физ. журн., 16, 413, 1971; Вестн. КГУ, № 10, сер. Астрономия, 104, 1971.
18. *R. E. Morgenstern*, Nat. Phys. Sci., 232, 109, 1971; 237, 70, 1972; Phys. Rev., 7D, 1570, 1973; Ap. J., 191, 39, 1974.
19. *J. O'Hanlon, B. Tupper*, Nuovo Cimento, 7B, 305, 1972.
20. *M. Ruderman*, Rep. Progr. Phys., 28, 411, 1965; *G. B. Field, M. J. Rees, D. Sciama*, Comm. Astrophys. Space Sci., 1, 187, 1969.
21. *M. J. Rees*, Phys. Rev. Lett., 28, 1669, 1972.
22. *H. Dechnen, H. Honl*, Ap. J., 155, 35, 1969.
23. *A. Sandage*, Ap. J., 173, 485, 1972; 178, 125, 1972.
24. *I. Shapiro, W. Smith, M. Ash, R. Ingalls, G. Pettingill*, Phys. Rev. Lett., 26, 27, 1971.