

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12

МАЙ, 1976

ВЫПУСК 2

О ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ ВЫРОЖДЕННОГО ЯДРА КРАСНОГО ГИГАНТА

О. В. ФЕДОРОВА

Поступила 9 апреля 1975

Изучается влияние внешнего давления P_0 на границе погруженной в протяженную оболочку конфигурации на частоту ее линейных адиабатических колебаний ω . Таковую конфигурацию представляет собой, например, ядро красного гиганта. Зависимость граничного давления от смещения границы задается при помощи некоторого параметра α . Численно решается уравнение колебаний для ряда усеченных политроп с индексами 3/2 и 3 при нескольких значениях α . Вычисления показывают, что частота колебаний быстро растет с увеличением внешнего давления. В результате аналитического исследования, которое проведено как при помощи интегрального соотношения для частоты, так и энергетическим методом, получена приближенная формула, связывающая ω^2 с P_0 .

Согласно теории звездной эволюции, красный гигант представляет собой двухфазную конфигурацию. Он состоит из компактного ядра, в некоторых случаях вырожденного, и протяженной оболочки существенно меньшей плотности. Поэтому в ряде аспектов ядро красного гиганта можно рассматривать независимо от оболочки. От свободной конфигурации ядро отличается тем, что давление на его поверхности не равно нулю. Представляет интерес изучить, как влияет такое граничное условие на механические свойства ядра. Здесь мы рассмотрим задачу о линейных адиабатических колебаниях неопрашающейся конфигурации с внешним давлением.

Давление на поверхности, не равное нулю, приводит к специфическому граничному условию, которому должно удовлетворять уравнение колебаний. В работах, в которых исследуется устойчивость конфигураций, погруженных во внешнюю среду, ставится следующее условие на поверхности: $\delta p = 0$, где δp — лагранжева вариация давления [1]. Это означает, что давление на поверхности конфигурации при колебаниях остается неизменным. Однако можно сформулировать более общее требование: лагранжевы изменения давления и плотности вблизи границы ядра должны совпадать по фазе с изменением радиуса (то есть, давление на границе увеличивается

при расширении ядра и уменьшается при его сжатии). Таким путем достигается согласование давления во внешнем слое ядра и в прилегающем к ядру слое оболочки, который при увеличении размеров ядра подвергается сжатию, а при их уменьшении должен расширяться. Относительная амплитуда лагранжиан изменения давления $\delta p/p$ и амплитуда относительного смещения $\xi = \delta r/r$ в линейной адиабатической задаче связаны следующим образом:

$$\frac{\delta p}{p} = -\gamma \left(3\xi + r \frac{d\xi}{dr} \right), \quad (1)$$

где γ — показатель адиабаты. На границе соответственно с высказанным соображением должно выполняться условие:

$$3\xi_0 + r_0 \left(\frac{d\xi}{dr} \right)_0 < 0. \quad (2)$$

индекс «0» соответствует границе ядра. Введем безразмерный параметр α :

$$\left(\frac{d\xi}{dr} \right)_0 = -\gamma \frac{\xi_0}{r_0}. \quad (3)$$

Соотношение (3) при $\alpha \geq 3$ и является граничным условием для уравнения колебаний на поверхности $r = r_0$. (Условие $\delta p = 0$ получаем при $\alpha = 3$). Конкретизировать значение α можно лишь путем решения задачи о колебаниях конечной амплитуды при заданном строении прилегающего слоя. Здесь мы используем ряд пробных значений α , поскольку о строении оболочки не делается никаких предположений.

В качестве моделей для конфигурации с внешним давлением были выбраны усеченные политропы индексов 3/2 и 3. Показатель адиабаты принят равным 5/3. Конфигурация при $n = 3/2$ аппроксимирует ядра с невысокой степенью вырождения вещества. Сравнение ее с моделью, соответствующей $n = 3$, иллюстрирует влияние увеличения центральной концентрации массы на зависимость частоты колебаний от внешнего давления.

Уравнение колебаний для политропной конфигурации в безразмерных переменных записывается следующим образом (см., например, [2]):

$$\xi'' + \xi \left[\frac{4}{x} + y_1(n+1) \frac{\theta'}{\theta} \right] + \xi \left[\frac{n^2}{\gamma} (n+1) y_1(-b_1) \frac{1}{\theta} + \left(3 - \frac{4}{\gamma} \right) y_1(n+1) \frac{\theta'}{\theta} \frac{1}{x} \right] = 0, \quad (4)$$

где θ — функция Эмдена, y_1 — радиус неусеченной политропы в единицах длины Эмдена, θ' — значение θ' при $y = y_1$, x — расстояние от центра в

единицах радиуса неусеченной политропы, ω — безразмерная частота колебаний, связанная с частотой соотношением:

$$\omega^2 = \frac{3\bar{\rho}^2}{4\pi G_0} \quad (5)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность неусеченной конфигурации. Уравнение (4) решалось в обоих случаях ($n=3/2, 3$) при следующих значениях относительного граничного радиуса x_0 : 0.95, 0.90, 0.85, 0.80. В модели красного гиганта, имеющего массу $1.3 M_{\odot}$, например, границе вырожденного ядра соответствует значение x_0 около 0.85 [3]. Рассматривалась только фундаментальная мода колебаний. Граничное условие (3) использовалось при значениях параметра α в интервале от 3 до 20. В центре конфигурации задается обычное условие:

$$\xi' = 0, \quad \xi = 1. \quad (6)$$

Использовался метод пробного интегрирования от границ, причем критерием правильности выбора собственного значения ω^2 служит совпадение логарифмических производных $(d\xi/dr)/\xi$ в промежуточной точке.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2, 3. На рис. 1 и 2, для конфигураций с $n=3/2$ и $n=3$ соответственно, изображены функции $\xi(x)$ при крайних из рассмотренных значениях α (3 и 20) с нормировкой $\xi_0 = 1$. Функции $\xi(x)$, соответствующие другим значениям α , занимают промежуточное положение, причем максимум кривой постепенно смещается влево с увеличением α . Рис. 3 показывает, как изменяется безразмерная частота колебаний, вычисляемая согласно (5) через посредство средней плотности неусеченной конфигурации. Значения ω^2 для колебаний политроп со свободной поверхностью равны 2.712 и 9.261 для $n=3/2$ и $n=3$ соответственно [4].

Чтобы понять смысл зависимости ω^2 от α и радиуса усеченной конфигурации x_0 , используем известное интегральное выражение для квадрата частоты (например, [4]):

$$\omega^2 = \frac{\int_M \xi^2 r^2 dm \left[-\frac{1}{pr} (3\gamma - 4) \frac{dp}{dr} \right] + \int_M \xi r^2 dm \left[-\frac{1}{pr^3} \frac{d}{dr} \left(\gamma p r^3 \frac{d\xi}{dr} \right) \right]}{\int_M \xi^2 r^2 dm} \quad (7)$$

M — масса конфигурации. Интегрируя по частям второе слагаемое числителя, получаем:

$$\omega^2 = \frac{G}{\int_M \xi^2 r^2 dm} \quad (8)$$

$$G = \int_V \xi^2 r^2 dm \left[-\frac{1}{\gamma r} (3\gamma - 4) \frac{dp}{dr} \right] + \int_V r^2 dm \frac{\gamma p}{\gamma} \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 - 4\pi\gamma p_0 r_0^4 \xi_0 \left(\frac{d\xi}{dr} \right)_0.$$

От обычного выражения для σ^2 формула (8) отличается присутствием в числителе третьего слагаемого, которое возникает вследствие отличия от нуля давления на границе конфигурации. При граничном условии (3) это слагаемое принимает вид:

$$-4\pi\gamma p_0 r_0^4 \xi_0 \left(\frac{d\xi}{dr} \right)_0 = 3\alpha\gamma p_0 V_0 \xi_0^2,$$

где V_0 — объем конфигурации. В соответствии с принципом минимума, применимым к собственным значениям уравнения колебаний [4], оценку свер-

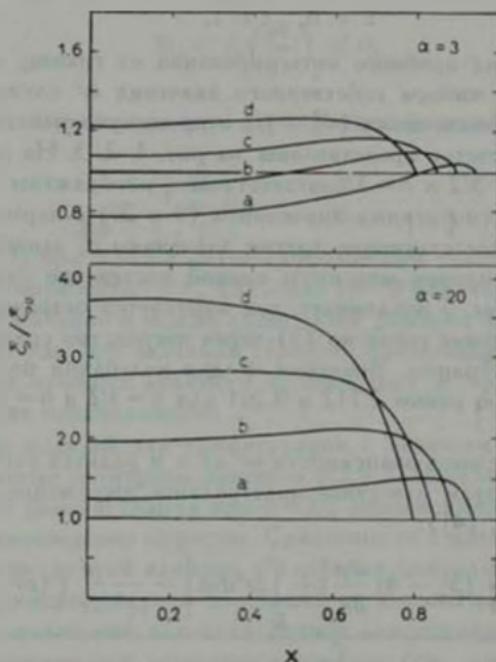


Рис. 1. Зависимость относительного смещения ξ от координаты x для конфигураций с $n=3/2$. Кривая a соответствует значению x_0 0.95, b —0.90, c —0.85, d —0.80

ху для σ^2 можно получить, заменив в правой части (8) функцию ξ произвольной достаточно гладкой функцией, удовлетворяющей тем же граничным условиям, что и ξ . Возьмем для этого функцию, постоянную внутри ядра и гладко убывающую в некотором внешнем его слое. Граничное условие (3) фиксирует лишь значение производной на поверхности ядра и по-

атому позволяет сделать этот внешний слой сколь угодно тонким, причем чем меньше толщина слоя, тем меньше значение функции в нем отличается от значения внутри ядра. Таким образом, верхнюю границу σ^1 можно

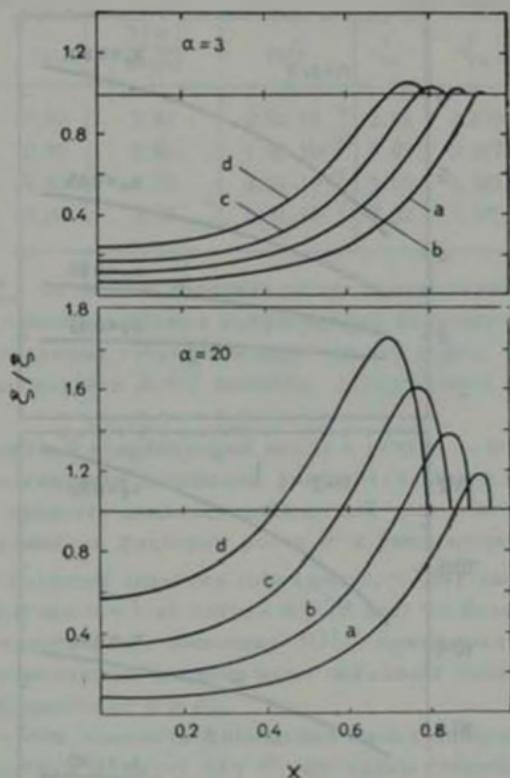


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для конфигурации с $n=3$.

получить, подставив в (8) вместо ξ постоянную, так как разность между такой оценкой и оценкой с помощью функции, удовлетворяющей (3), можно сделать сколь угодно малой. Учитывая (9), получаем:

$$z^2 < \frac{|\Omega|}{I} (3\tau - 4) + \frac{3\tau_1 p_0 V_0}{I} \tag{10}$$

где Ω — гравитационная энергия конфигурации, а I — момент инерции относительно центра. Для конфигураций с внешним давлением теорема вириала дает [5]:

$$|\Omega| = 3\bar{p}V_0 - 3p_0V_0 \tag{11}$$

где \bar{p} — среднее по объему давление. Поскольку во всех случаях, для которых производились расчеты, $p_0 \ll \bar{p}$, вместо (11) можно принять:

$$|\Omega| \approx 3\bar{p}V_0. \quad (12)$$

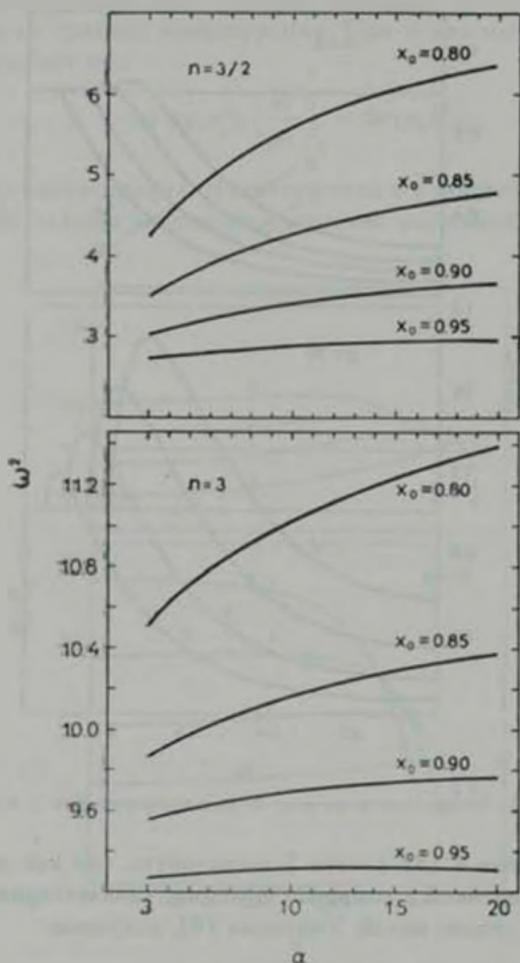


Рис. 3. Зависимость квадрата безразмерной частоты ω^2 от значений α и x_0 .

Преобразуем (10) с помощью (12):

$$\alpha^2 \approx \frac{|\Omega|}{l} \left[(3\gamma - 4) + \alpha \gamma \frac{p_0}{p} \right]. \quad (13)$$

Следовательно, влияние внешнего давления на частоту колебаний конфигурации определяется отношением p_0/\bar{p} .

Сравним величины ω^2 , полученные путем численного решения уравнения колебаний, и вычисленные с использованием формулы (13) для случая $n = 3/2$ и $\alpha = 10$ (табл. 1).

Таблица 1

x_0	$\frac{3 \Omega }{4\pi G_0 I}$	$\rho_0/\bar{\rho}$	$\omega_{\text{числ}}^2$	$\omega_{\text{формула}}^2$
0.95	2.81	$2.92 \cdot 10^{-3}$	2.94	2.870
0.90	2.86	$1.60 \cdot 10^{-2}$	3.62	3.397
0.85	2.95	$4.21 \cdot 10^{-2}$	5.02	4.281
0.80	3.07	$8.21 \cdot 10^{-2}$	7.28	5.579

Отличие $\omega_{\text{числ}}^2$ от точных значений растет с уменьшением x_0 , так как чем меньше x_0 , тем сильнее колебания конфигурации отличаются от гомологических. Однако из данных таблицы можно сделать вывод, что увеличение ω^2 по сравнению со случаем $\rho_0 = 0$ вызвано присутствием дополнительного члена в (13).

В случае высокой концентрации массы к центру — политропа с $n = 3$ — степень негомологичности колебаний значительно выше. При рассмотренных значениях внешнего давления добавочный член невелик и не является главным определяющим фактором роста ω^2 с увеличением α и ρ_0 . Например, при самом большом значении $\rho_0/\bar{\rho}$ (для $x_0 = 0.80$) увеличение добавочного члена от случая $\alpha = 3$ до случая $\alpha = 20$ дает не более половины соответствующего прироста ω^2 . Значения $|\Omega|/I$ практически одинаковы для всех x_0 . Более существенное влияние здесь оказывает изменение формы кривых $\xi(x)$ в зависимости от α и ρ_0 .

Для того, чтобы выяснить физический смысл дополнительного слагаемого в (13), получим формулу для σ^2 еще одним способом — при помощи энергетического метода, развитого в работе [6]. Этот метод позволяет обобщить [13] на случай вращающихся конфигураций. Его сущность состоит в следующем. Рассмотрим закон сохранения энергии пульсирующей звезды:

$$E_{\text{тепл}}(t) + E_{\text{вр}}(t) + E_{\text{гр}}(t) + E_{\text{кин}}(t) = E^0 + E_{\text{кин}}^0, \quad (14)$$

где $E_{\text{тепл}}$ — тепловая энергия звезды, $E_{\text{вр}}$ — энергия вращения, $E_{\text{гр}}$ — гравитационная энергия, $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия пульсаций, E^0 — полная энергия в отсутствие колебаний, а $E_{\text{кин}}^0$ — значение кинетической энергии пульсаций в момент, когда звезда проходит через состояние равновесия. Предположим, что колебания происходят гомологически. Закон изменения со временем радиуса произвольного элемента газа запишем в виде:

$$r(t) = r(1 + \xi_0 \sin \omega t), \quad (15)$$

r — равновесное значение радиуса. Если состояние газа меняется адиабатически и момент количества движения каждой частицы газа сохраняется, то зависимость от времени энергий, стоящих в левой части (14), выражается следующими формулами:

$$E_{\text{тепл}}(t) = E_{\text{тепл}}^0 (1 + \xi_0 \sin \omega t)^{3(1-\nu)}, \quad (16)$$

$$E_{\text{вр}}(t) = E_{\text{вр}}^0 (1 + \xi_0 \sin \omega t)^{-2}, \quad (17)$$

$$E_{\text{гп}}(t) = E_{\text{гп}}^0 (1 + \xi_0 \sin \omega t)^{-1}, \quad (18)$$

$$E_{\text{кин}}(t) = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\text{в}}^0 \cos^2 \omega t. \quad (19)$$

$E_{\text{тепл}}^0$, $E_{\text{вр}}^0$, $E_{\text{гп}}^0$ — равновесные значения энергий. Разложим левую часть (14) по степеням малой величины ξ_0 до второго порядка включительно. Члены нулевого порядка дают в сумме E^0 , а коэффициенты при ξ_0 и ξ_0^2 следует приравнять к нулю. Первое из получаемых таким образом равенств выражает теорему вириала, второе же, после исключения $E_{\text{тепл}}^0$ с помощью теоремы вириала, дает известное приближенное выражение для ω^2 :

$$\omega^2 = (4 - 3\gamma_1) \frac{E_{\text{вр}}^0}{I} + (5 - 3\gamma_1) \frac{2E_{\text{гп}}^0}{I}. \quad (20)$$

Если мы рассматриваем колебания ядра звезды, окруженного оболочкой и предполагаем, что энергия ядра при колебаниях постоянна, при использовании закона сохранения энергии нужно учесть работу против сил давления, которую ядро совершает по отношению к прилегающему слою оболочки. Другие виды затрат энергии ядра, связанные с движением этого слоя, в принятой постановке задачи, определенной введением внешнего параметра a , не должны учитываться. Характер колебаний примем следующий: граничное условие (3) выполнено, но пульсации практически гомологичны, относительное смещение ξ постоянно в ядре за исключением внешнего слоя, настолько тонкого, что можно пренебречь как отклонениями от формул (16)—(19), так и разностью относительных смещений внутри ядра и на его границе. Будем, как и в (15), считать относительное смещение всюду равным ξ_0 .

Рассмотрим работу, совершаемую ядром против сил давления. Она выражается интегралом $\int p dV$, который вычисляется от равновесного состояния до данного смещения границы. Здесь p — давление на границе ядра. В соответствии с (1) и (3) имеем:

$$p = p_0 [1 + \gamma (\alpha - 3) \xi_0 \sin \omega t]. \quad (21)$$

Объем ядра определяется формулой:

$$V = V_0 (1 + \xi_0 \sin \omega t)^3. \quad (22)$$

Вычисляя интеграл с точностью до членов порядка ξ_0^3 , получаем:

$$\int p dV \approx 3p_0 V_0 \xi_0 \sin \omega t + \frac{3}{2} p_0 V_0 [2 + (\alpha - 3) \gamma] \xi_0^2 \sin^2 \omega t. \quad (23)$$

Учет (23) при разложении левой части (14) приводит к следующим изменениям: равенство нулю коэффициента при ξ_0 совпадает теперь с теоремой вирнала для конфигураций с ненулевым граничным давлением (см. формулу (11)), где эта теорема записана без учета энергии вращения), а из условия равенства нулю коэффициента при ξ_0^2 , в который дает вклад второе слагаемое (23), получается следующее выражение для σ^2 :

$$\sigma^2 = (4 - 3\gamma) \frac{E_{\text{вп}}^2}{I} + (5 - 3\gamma) \frac{2E_{\text{вп}}^2}{I} - \frac{3\alpha\gamma p_0 V_0}{I}. \quad (24)$$

Связанный с p дополнительный член в (24) имеет тот же вид, что и в (10).

Таким образом, аналитическое исследование подтверждает вывод о возрастании частоты колебаний конфигурации при наличии внешнего давления на ее границе по сравнению со случаем $p_0 = 0$. Применение энергетического метода для получения формулы для σ^2 позволяет сделать заключение, что физическая причина увеличения частоты — дополнительные затраты энергии колебаний на работу против сил давления, обусловленные присутствием оболочки.

В заключение автор благодарит В. Г. Горбачуко за полезные обсуждения и В. С. Имшеника за ценные замечания.

Ленинградский государственный
университет

ON THE OSCILLATION FREQUENCY OF THE DEGENERATE CORE OF A RED GIANT

O. V. FEDOROVA

The effect of external pressure p_0 on the frequency ω of linear adiabatic oscillations of the configuration surrounded with an extended envelope, for example a red giant core, is considered. The dependence of the boundary pressure on the boundary displacement is defined with some parameter α . Adiabatic oscillation equation is solved numerically

for the set of truncated polytropes of indexes $3/2$ and 3 and for several values of α . The calculations show that σ^2 increases strongly as external pressure increases. The approximate relation between σ^2 and p_0 is derived by means of analytical treatment with the aid of integral expression for the frequency as well as with energy method.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. G. Taff, H. M. Van Horn, M. N., 168, 427, 1974.
2. С. Росселанд, Теория пульсаций переменных звезд, ИЛ., М., 1952.
3. М. Шварцшильд, Строение и эволюция звезд, ИЛ., М., 1961.
4. P. Ledoux, Th. Walraven, Handbuch der Physik, 51, 353, 1958.
5. J. P. Cox, R. T. Giuli, Principles of Stellar Structure, Gordon and Breach, N. Y., 1958.
6. В. Ф. Дьяченко, Я. Б. Зельдович, В. С. Имшенник, В. В. Палейчик. Астрофизика, 4, 159, 1968.