АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 ФЕВРАЛЬ, 1976 ВЫПУСК 1

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЯРКОСТИ ДВУСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЫ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. I

А. К. КОЛЕСОВ

Поступила 21 апреля 1975

Исследуется неизотропное рассеяние света в атмосфере, состоящей из двух однородных плоскопараллельных слоев с разными индикатрисами рассеяния и различными значениями оптической толщины и альбедо частиц. Считается, что атмосфера освещена падающим снаружи потоком параллельных лучей. Интенсивности излучения, выходящего из атмосферы, и излучения на границе между слоями выражены через вспомогательные функции одной угловой переменной.

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* В теории переноса излучения в атмосферах звезд и планет обычно предполагается, что атмосфера состоит из плоскопараллельных слоев, оптические свойства которых не меняются с глубиной (см., например, [1] и [2]). В реальных атмосферах оптические свойства могут сильно зависеть от глубины. Диффузия излучения в таких неоднородных средах изучена в меньшей степени, чем в однородных. Простейшим частным случаем неоднородной среды, представляющим практический интерес для астрофизики и геофизики, является случай двуслойной атмосферы.

Задача о диффузном отражении и пропускании света двуслойной атмосферой была рассмотрена в работах [3—5] при предположении об изотропном рассеянии излучения. С. Д. Гутшабаш [3] выразил интенсивность диффузного излучения на границе между слоями через вспомогательные функции, определяемые из системы интегральных уравнений. В. В. Соболев [4] исследовал структуру коэффициентов отражения и пропускания света двуслойной атмосферой. Он доказал, что в случае атмосферы, состоящей из полубесконечной среды и лежащего над ней слоя конечной оптической толщины, коэффициент отражения выражается через две вспомогательные функции и получил для этих функций систему интегральных уравнений. В работе [5] для вспомогательных функций были выведены системы интегральных уравнений другого типа. Оптическая глубина границы между слоями входит в эти уравнения в качестве параметра.

В настоящей работе исследуется проблема отражения и пропускания света двуслойной атмосферой при неизотропном рассеянии.

Пусть атмосфера состоит из двух однородных слоев, причем верхний слой имеет оптическую толщину τ_1, а нижний—τ_2. Вероятности выживания квантов при элементарных актах рассеяния в этих слоях обозначим соответственно через λ_1 и λ_2, а индикатрисы рассеяния — через $x_1(\gamma)$ и $x_2(\gamma)$, где γ — угол рассеяния. Оптическую глубину τ точек атмосферы будем отсчитывать от внешней границы верхнего слоя.

Предположим, что атмосфера освещена сверху параллельными лучами, падающими под углом $\arccos\zeta$ к нормали при азимуте $\varphi_0=0$ и создающими освещенность πS перпендикулярной к ним площадки. Пусть $I_{1k}(\tau,\eta,\zeta,\varphi)$ — интенсивность диффузного излучения, распространяющегося на оптической глубине τ под углом $\arccos\eta$ к внутренней нормали при азимуте φ, а $B_{1k}(\tau,\eta,\zeta,\varphi)$ —соответствующая функция источников. Если величины I и B относятся к верхнему слою $(0\leqslant\tau<\tau_1)$, то мы будем снабжать их индексом $k=1$, а если они относятся к нижнему слою $(\tau_1<\tau\leqslant\tau_1+\tau_2)$, то индексу k будем придавать значение $k=2$. Нам требуется получить выражения для интенсивностей диффузно отраженного излучения $I_{11}(0,-\eta,\zeta,\varphi)$, диффузно пропущенного излучения $I_{12}(\tau_1+\tau_2,+\eta,\zeta,\varphi)$ и излучения на границе двух слоев $I_{11}(\tau_1, \pm\eta, \zeta, \varphi) = I_{12}(\tau_1, \pm\eta, \zeta, \varphi)$.

Кроме основных функций $I_{1k}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ и $B_{1k}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$, будем рассматривать также вспомогательные функции $I_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ и $B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ $(j=2;\ 3;\ 4)$, относящиеся к двуслойной атмосфере, освещенной параллельными лучами, падающими снизу на границу $\tau=\tau_1+\tau_2$ $(j=2)$, сверху на поверхность $\tau=\tau_1$ $(j=3)$ и снизу на эту же поверхность $(j=4)$.

В принятых нами обозначениях уравнения переноса излучения и лучистого равновесия записываются соответственно следующим образом:

$$\eta\,\frac{dI_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)}{d\tau} = -I_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi) + B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi), \tag{1}$$

$$B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = \frac{\lambda_k}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} I_{jk}(\tau, \eta', \zeta, \varphi')\, x_k(\gamma')\, d\eta' + \frac{\lambda_k}{4} S x_k(\gamma)\, b_{jk}(\tau, \zeta), \tag{2}$$

где $j=1;\ 2;\ 3;\ 4,\ k=1;\ 2,$

$$\cos\gamma' = \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)}\cos(\varphi-\varphi'), \tag{3}$$

$$\cos \gamma_j = (-1)^{j-1} \eta\zeta + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)} \cos \varphi, \tag{4}$$

а функции $b_{jk}(\tau, \zeta)$ определяются формулами

$$\begin{gathered} b_{11}(\tau, \zeta) = b_{12}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad b_{21}(\tau, \zeta) = b_{22}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau_1+\tau_2-\tau}{\zeta}}, \\ b_{31}(\tau, \zeta) = 0, \quad b_{32}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\zeta}}, \quad b_{41}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau_1-\tau}{\zeta}}, \quad b_{42}(\tau, \zeta) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Граничные условия, учитывающие отсутствие внешнего диффузного излучения, падающего на граничные поверхности атмосферы, а также непрерывность интенсивности диффузного излучения на границе между слоями (при $\tau = \tau_1$) имеют соответственно вид:

$$\begin{gathered} I_{j1}(0, -\eta, \zeta, \varphi) = 0, \qquad I_{j2}(\tau_1 + \tau_2, -\eta, \zeta, \varphi) = 0, \\ I_{j1}(\tau_1, \pm\eta, \zeta, \varphi) = I_{j2}(\tau_1, \pm\eta, \zeta, \varphi). \end{gathered} \tag{6}$$

Разложим индикатрисы рассеяния $x_k(\gamma)$ $(k = 1; 2)$ в ряды по полиномам Лежандра

$$x_k(\gamma) = \sum_{i=0}^{n_k} x_{ik} P_i(\cos\gamma), \tag{7}$$

тогда, как и в случае неизотропного рассеяния света в однородной атмосфере (см. [2], гл. 1), функции I_{jk} и B_{jk} могут быть представлены в форме

$$I_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = I_{jk}^0(\tau, \eta, \zeta) + 2\sum_{m=1}^{n} I_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta) \cos m\varphi, \tag{8}$$

$$B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = B_{jk}^0(\tau, \eta, \zeta) + 2\sum_{m=1}^{n} B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta) \cos m\varphi, \tag{9}$$

где n — наибольшая из величин n_1 и n_2.

Подставляя (7), (8) и (9) в (1), (2) и (6), для определения функций $B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$ и $I_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$ $(m = 0; 1; 2; \ldots; n)$ получаем уравнения

$$\eta \frac{dI_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)}{d\tau} = -I_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta) + B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta), \tag{10}$$

$$\begin{gathered} B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda_k}{2} \int_{-1}^{1} p_k^m(\eta, \eta') I_{jk}^m(\tau, \eta', \zeta)\, d\eta' + \\ + \frac{\lambda_k}{4} S p_k^m(\eta, (-1)^{j+1}\zeta)\, b_{jk}(\tau, \zeta) \end{gathered} \tag{11}$$

при граничных условиях

$$I_{j1}^m(0,\ +\eta_i,\ \zeta)=0,\qquad I_{j2}^m(\tau_1+\tau_2,\ -\eta_i,\ \zeta)=0,$$
$$I_{j1}^m(\tau_1,\ \pm\eta_i,\ \zeta)=I_{j2}^m(\tau_1,\ \pm\eta_i,\ \zeta). \tag{12}$$

В уравнении (11)

$$p_k^m(\eta_i,\ \eta_i')=\sum_{i=m}^{n} c_{ik}^m P_i^m(\eta_i)\, P_i^m(\eta_i'), \tag{13}$$

где

$$c_{ik}^m=x_{ik}\frac{(i-m)!}{(i+m)!}, \tag{14}$$

а $P_i^m(\eta_i)$ — присоединенные функции Лежандра.

Решая уравнения (10) относительно $I_{jk}^m(\tau,\ \eta_i,\ \zeta)$ с учетом граничных условий (12) и подставляя полученные выражения в уравнения (11), для функций $B_{jk}^m(\tau,\ \eta_i,\ \zeta)$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
B_{j1}^m(\tau,\ \eta_i,\ \zeta) &= \frac{\lambda_1}{2}\int_0^{\tau} d\tau'\int_0^1 p_1^m(\eta_i,\ \eta_i')\, B_{j1}^m(\tau',\ \eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_1}{2}\int_{\tau}^{\tau_1} d\tau'\int_0^1 p_1^m(\eta_i,\ -\eta_i')\, B_{j1}^m(\tau',\ -\eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} d\tau'\int_0^1 p_1^m(\eta_i,\ -\eta_i')\, B_{j2}^m(\tau',\ -\eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_1}{4} S p_1^m(\eta_i,\ (-1)^{j+1}\zeta)\, b_{j1}(\tau,\ \zeta).
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
B_{j2}^m(\tau,\ \eta_i,\ \zeta) &= \frac{\lambda_2}{2}\int_0^{\tau_1} d\tau'\int_0^1 p_2^m(\eta_i,\ \eta_i')\, B_{j1}^m(\tau',\ \eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_2}{2}\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau'\int_0^1 p_2^m(\eta_i,\ \eta_i')\, B_{j2}^m(\tau',\ \eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_2}{2}\int_{\tau}^{\tau_1+\tau_2} d\tau'\int_0^1 p_2^m(\eta_i,\ -\eta_i')\, B_{j2}^m(\tau',\ -\eta_i',\ \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta_i'}}\frac{d\eta_i'}{\eta_i'}+\\
&+\frac{\lambda_2}{4} S p_2^m(\eta_i,\ (-1)^{j+1}\zeta)\, b_{j2}(\tau,\ \zeta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) составляют основную систему интегральных уравнений задачи о диффузии излучения в двуслойной атмосфере.

2. ***Коэффициенты яркости.*** Вместо величин $I_{j1}^m(0, -\eta, \zeta)$, $I_{j2}^m(\tau_1 + \tau_2 + \eta, \zeta)$, $I_{jk}^m(\tau_1, \pm\eta, \zeta)$ в дальнейшем мы будем использовать коэффициенты яркости $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$, $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$ определяемые формулами

$$I_{j1}^m(0, -\eta, \zeta) = SV_j^m(\eta, \zeta)\zeta, \qquad I_{j2}^m(\tau_1 + \tau_2 + \eta, \zeta) = SW_j^m(\eta, \zeta)\zeta,$$

$$I_{j1}^m(\tau_1, -\eta, \zeta) = I_{j2}^m(\tau_1, -\eta, \zeta) = Sv_j^m(\eta, \zeta)\zeta, \tag{17}$$

$$I_{j1}^m(\tau_1, +\eta, \zeta) = I_{j2}^m(\tau_1, +\eta, \zeta) = Sw_j^m(\eta, \zeta)\zeta.$$

Отметим, что коэффициенты яркости $V_j^m(\eta, \zeta)$ и $W_j^m(\eta, \zeta)$ называются также соответственно коэффициентами отражения и пропускания света.

Из уравнений (10) при граничных условиях (12) с учетом соотношений (17) находим:

$$V_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int_0^{\tau_1} B_{j1}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}}\, d\tau + \frac{1}{S\eta\zeta}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}}\, d\tau, \tag{18}$$

$$W_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int_0^{\tau_1} B_{j1}^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1+\tau_2-\tau}{\eta}}\, d\tau + \frac{1}{S\eta\zeta}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1+\tau_2-\tau}{\eta}}\, d\tau, \tag{19}$$

$$v_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\eta}}\, d\tau, \tag{20}$$

$$w_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int_0^{\tau_1} B_{j1}^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1-\tau}{\eta}}\, d\tau. \tag{21}$$

Интересующие нас интенсивности диффузно отраженного и диффузно пропущенного излучения, а также интенсивности излучения на границе между слоями выражаются при помощи формул (8) и (17) через функции $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$, $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$. Таким образом, наша задача сводится к нахождению этих функций.

Методом вероятности выхода квантов из среды, использованным в работе И. Н. Минина [6] при исследовании неизотропного рассеяния света в однородной атмосфере, можно показать, что указанные функции обладают следующими свойствами:

$$V_1^m(\eta, \zeta) = V_1^m(\zeta, \eta), \quad V_2^m(\eta, \zeta) = W_1^m(\zeta, \eta), \quad V_3^m(\eta, \zeta) = v_1^m(\zeta, \eta),$$

$$V_4^m(\eta, \zeta) = w_1^m(\zeta, \eta), \quad W_2^m(\eta, \zeta) = W_2^m(\zeta, \eta), \quad W_3^m(\eta, \zeta) = v_2^m(\zeta, \eta), \tag{22}$$

$$W_4^m(\eta, \zeta) = w_2^m(\zeta, \eta), \quad v_3^m(\eta, \zeta) = v_3^m(\zeta, \eta), \quad v_4^m(\eta, \zeta) = w_3^m(\zeta, \eta),$$

$$w_4^m(\eta, \zeta) = w_4^m(\zeta, \eta).$$

Формулы (22) отражают принцип обратимости оптических явлений в случае двуслойной атмосферы.

Заметим, что коэффициенты яркости $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$, $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$ зависят не только от угловых переменных η и ζ, но и от параметров τ_1 и τ_2.

3. *Принцип инвариантности.* Для решения задачи об определении коэффициентов яркости воспользуемся принципом инвариантности, состоящим в том, что любой из этих коэффициентов яркости инвариантен относительно параллельного переноса системы координат, т. е. не меняется при одновременном сдвиге верхней и нижней границ среды, а также границы между слоями на одно и то же оптическое расстояние $\Delta\tau$.

Введем вместо оптической глубины τ величину $l = \tau + l_0$, где l_0 — параметр, характеризующий положение верхней границы среды, а вместо τ_1 и τ_2 введем величины $l_1 = \tau_1 + l_0$, $l_2 = \tau_1 + \tau_2 + l_0$. Тогда для произвольного коэффициента яркости $u(\eta, \zeta, l_0, l_1, l_2)$ сформулированный выше принцип инвариантности можно записать в форме

$$u(\eta, \zeta, l_0 + \Delta\tau, l_1 + \Delta\tau, l_2 + \Delta\tau) = u(\eta, \zeta, l_0, l_1, l_2). \tag{23}$$

Считая величину $\Delta\tau$ бесконечно малой, разложим функцию $u(\eta, \zeta, l_0 + \Delta\tau, l_1 + \Delta\tau, l_2 + \Delta\tau)$ в ряд Тэйлора и ограничимся в этом разложении бесконечно малыми порядка $\Delta\tau$, тогда формула (23) перепишется в виде

$$\frac{\partial u(\eta, \zeta, l_0, l_1, l_2)}{\partial l_0} + \frac{\partial u(\eta, \zeta, l_0, l_1, l_2)}{\partial l_1} + \frac{\partial u(\eta, \zeta, l_0, l_1, l_2)}{\partial l_2} = 0. \tag{24}$$

Отметим, что параметр, характеризующий геометрическое положение верхней границы среды, впервые ввел в теорию В. В. Соболев [7] при исследовании переноса излучения в неоднородной среде.

Для того, чтобы использовать принцип инвариантности (24), нам следует найти производные коэффициентов яркости $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$, $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$ по параметрам l_0, l_1 и l_2. При вычислении этих производных нам будут нужны формулы, дающие связь между функциями $B_{jk}^m(l, \eta, \zeta, l_0, l_1, l_2)$ и их частными производными по l_0, l_1 и l_2. Такую связь можно установить, используя системы уравнений (15)—(16). Переходя под знаками интегралов в (15) и (16) от переменной интегрирования τ' к переменной $t' = \tau' - t_0$ и дифференцируя получающиеся выражения по t_i $(i = 0;\ 1;\ 2)$, мы получим системы интегральных уравнений для производных

$$\frac{\partial B^m_{i1}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial B^m_{i2}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_i},$$

аналогичные системам (15)—(16). Свободные члены в полученных уравнениях для производных представляют собой суперпозицию экспоненциальных функций такого же вида, что и функции, входящие в свободные члены уравнений (15) и (16). Вследствие линейности рассматриваемых интегральных уравнений отсюда следует, что производные

$\dfrac{\partial B^m_{jk}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_i}$ являются суперпозициями функций B^m_{jk}, например,

$$\frac{\partial B^m_{1k}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_0} = \frac{1}{\zeta} B^m_{1k}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2) -$$
$$- \frac{2}{S}\int_0^1 B^m_{11}(t_0,\ \eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)\, B^m_{1k}(t,\ \eta,\ \eta',\ t_0,\ t_1,\ t_2)\frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial B^m_{1k}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_1} = \frac{2}{S}\int_0^1 [B^m_{11}(t_1,\ \eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2) -$$
$$- B^m_{12}(t_1,\ \eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)]\, B^m_{3k}(t,\ \eta,\ \eta',\ t_0,\ t_1,\ t_2)\frac{d\eta'}{\eta'} +$$
$$+ \frac{2}{S}\int_0^1 [B^m_{11}(t_1,\ -\eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2) -$$
$$- B^m_{12}(t_1,\ -\eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)]\, B^m_{4k}(t,\ \eta,\ \eta',\ t_0,\ t_1,\ t_2)\frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial B^m_{1k}(t,\ \eta,\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)}{\partial t_2} =$$
$$= \frac{2}{S}\int_0^1 B^m_{12}(t,\ -\eta',\ \zeta,\ t_0,\ t_1,\ t_2)\, B^m_{2k}(t,\ \eta,\ \eta',\ t_0,\ t_1,\ t_2)\frac{d\eta'}{\eta'}. \tag{27}$$

Производя в интегралах, входящих в формулы (18)—(21), замену переменной интегрирования τ на переменную $t=\tau+t_0$ и дифференцируя по t_0, t_1 и t_2, после преобразования с использованием (25)—(27) и аналогичных соотношений для $\partial B_{j1}^m/\partial t_i$ $(j=2;\ 3;\ 4;)$, получаем

$$\frac{\partial V_1^m(\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2)}{\partial t_0} = \frac{\eta_i+\zeta}{\eta_i\zeta} V_1^m(\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2) -$$

$$-\frac{1}{S\eta_i\zeta} B_{11}^m(t_0, -\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2) - \tag{28}$$

$$-\frac{2}{S\zeta}\int_0^1 B_{11}^m(t_0, \eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2)\, V_1^m(\eta_i, \eta_i', t_0, t_1, t_2)\, d\eta_i',$$

$$\frac{\partial V_1^m(\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{1}{S\eta_i\zeta}[B_{11}^m(t_1, -\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2) -$$

$$-B_{12}^m(t_1, -\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2)]\, e^{-\frac{t_1-t_0}{\eta_i}} + \frac{2}{S\zeta}\int_0^1 [B_{11}^m(t_1, \eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2) -$$

$$-B_{12}^m(t_1, \eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2)]\, V_3^m(\eta_i, \eta_i', t_0, t_1, t_2)\, d\eta_i' + \tag{29}$$

$$+\frac{2}{S\zeta}\int_0^1 [B_{11}^m(t_1, -\eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2) -$$

$$-B_{12}^m(t_1, -\eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2)]\, V_4^m(\eta_i, \eta_i', t_0, t_1, t_2)\, d\eta_i',$$

$$\frac{\partial V_1^m(\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{1}{S\eta_i\zeta} B_{12}^m(t_2, -\eta_i, \zeta, t_0, t_1, t_2)\, e^{-\frac{t_2-t_0}{\eta_i}} +$$

$$+\frac{2}{S\zeta}\int_0^1 B_{12}^m(t_2, -\eta_i', \zeta, t_0, t_1, t_2)\, V_2^m(\eta_i, \eta_i', t_0, t_1, t_2)\, d\eta_i'. \tag{30}$$

Таким же образом находятся выражения для частных производных всех остальных коэффициентов яркости по параметрам t_0, t_1 и t_2.

4. *Структура коэффициентов яркости.* Подставляя (13) в уравнения (15) и (16), находим, что величины $B_{j1}^m(\tau, \eta_i, \zeta)$ и $B_{j2}^m(\tau, \eta_i, \zeta)$ могут быть представлены в виде

$$B^m_{ijk}(\tau, \eta, \zeta) = \sum_{l=m}^{\infty} c^m_{lk} B^m_{ljk}(\tau, \zeta)\, P^m_l(\eta), \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} B^m_{ljk}(\tau, \zeta) = \frac{\lambda_k}{2} \int_{-1}^{1} P^m_l(\eta)\, I^m_{jk}(\tau, \eta, \zeta)\, d\eta + \\ + \frac{\lambda_k}{4} S(-1)^{(l+m)(j+1)} P^m_l(\zeta)\, b_{jk}(\tau, \zeta). \end{aligned} \tag{32}$$

Введем при помощи соотношений

$$\begin{aligned} B^m_{lj1}(0, \zeta) &= \frac{\lambda_1}{4} S(-1)^{(l+m)(j+1)} F^m_{lj}(\zeta), \\ B^m_{lj1}(\tau_1, \zeta) &= \frac{\lambda_1}{4} S(-1)^{(l+m)(j+1)} g^m_{lj}(\zeta), \\ B^m_{lj2}(\tau_1, \zeta) &= \frac{\lambda_2}{4} S(-1)^{(l+m)(j+1)} f^m_{lj}(\zeta), \\ B^m_{lj2}(\tau_1 + \tau_2, \zeta) &= \frac{\lambda_2}{4} S(-1)^{(l+m)(j+1)} G^m_{lj}(\zeta) \end{aligned} \tag{33}$$

вспомогательные функции $F^m_{lj}(\zeta)$, $g^m_{lj}(\zeta)$, $f^m_{lj}(\zeta)$ и $G^m_{lj}(\zeta)$. Из формул (17) (32) и (33) следует, что

$$F^m_{lj}(\zeta) = P^m_l(\zeta)\, b_{j1}(0, \zeta) + 2\zeta(-1)^{(l+m)j} \int_0^1 P^m_l(\eta)\, V^m_j(\eta, \zeta)\, d\eta, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} g^m_{lj}(\zeta) = P^m_l(\zeta)\, b_{j1}(\tau_1, \zeta) + 2\zeta(-1)^{(l+m)j} \int_0^1 P^m_l(\eta)\, v^m_j(\eta, \zeta)\, d\eta + \\ + 2\zeta(-1)^{(l+m)(j+1)} \int_0^1 P^m_l(\eta)\, w^m_j(\eta, \zeta)\, d\eta, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} f^m_{lj}(\zeta) = P^m_l(\zeta)\, b_{j2}(\tau_1, \zeta) + 2\zeta(-1)^{(l+m)j} \int_0^1 P^m_l(\eta)\, v^m_j(\eta, \zeta)\, d\eta + \\ + 2\zeta(-1)^{(l+m)(j+1)} \int_0^1 P^m_l(\eta)\, w^m_j(\eta, \zeta)\, d\eta \end{aligned} \tag{36}$$

$$G^m_{ij}(\zeta) = P^m_i(\zeta)\, b_{j2}(\tau_1+\tau_2,\zeta) + 2\zeta(-1)^{(i+m)(j+1)} \int\limits_0^1 P^m_i(\eta)\, W^m_j(\eta,\zeta)\, d\eta. \quad (37)$$

Сравнивая (35) и (36) и учитывая (5), получаем, что

$$g^m_{ij}(\zeta) = f^m_{ij}(\zeta) + (\delta_{j4}-\delta_{j3})\, P^m_i(\zeta), \quad (38)$$

где δ_{jl} — символы Кронекера ($\delta_{jl}=1$ при $j=l$ и $\delta_{jl}=0$ при $j\neq l$).

Подставляя (33) в (28)—(30) и аналогичные формулы для частных производных других коэффициентов яркости, мы приходим к формулам, выражающим эти производные через коэффициенты яркости и вспомогательные функции. Например,

$$\frac{\partial V^m_1(\eta,\zeta,\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{l_2}{4\eta\zeta}\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i+m} c^m_{i2} G^m_{i1}(\eta,\tau_1,\tau_2)\, G^m_{i1}(\zeta,\tau_1,\tau_2), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^m_1(\eta,\zeta,\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} &= -\frac{1}{\eta} W^m_1(\eta,\zeta,\tau_1,\tau_2) + \\ &+ \frac{l_2}{4\eta\zeta}\sum_{i=m}^{n} c^m_{i2} G^m_{i2}(\eta,\tau_1,\tau_2)\, G^m_{i1}(\zeta,\tau_1,\tau_2). \end{aligned} \quad (40)$$

В (39) и (40) мы перешли от параметров l_0, l_1 и l_2 к параметрам τ_1 и τ_2 и отметили зависимость вспомогательных функций от величин τ_1 и τ_2.

Заметим, что уравнения типа (39) и (40) получаются в теории рассеяния света в неоднородных атмосферах. Для случая изотропно рассеивающей неоднородной среды такие уравнения получены В. В. Соболевым [7] и Уэно [8], а для случая неизотропного рассеяния — Э. Г. Яновицким [9].

Используя получающиеся выражения для частных производных коэффициентов яркости и учитывая принцип инвариантности (24), находим следующие выражения для коэффициентов яркости:

$$\begin{aligned} V^m_1(\eta,\zeta,\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{4(\eta+\zeta)} \sum_{i=m}^{n}(-1)^{i+m}\,[\,& l_1 c^m_{i1} F^m_{i1}(\zeta,\tau_1,\tau_2)\, F^m_{i1}(\eta,\tau_1,\tau_2) + \\ &+ (l_2 c^m_{i2} - l_1 c^m_{i1})\, f^m_{i1}(\zeta,\tau_1,\tau_2)\, f^m_{i1}(\eta,\tau_1,\tau_2) - \\ &- l_2 c^m_{i2} G^m_{i1}(\zeta,\tau_1,\tau_2)\, G^m_{i1}(\eta,\tau_1,\tau_2)]. \end{aligned} \quad (41)$$

$$W_1^m(\eta, \zeta, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4(\eta - \zeta)} \sum_{i=m}^{n} [\lambda_1 c_{i1}^m F_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) F_{i3}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) +$$

$$+ (\lambda_2 c_{i2}^m - \lambda_1 c_{i1}^m) f_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) g_{i2}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) - \tag{42}$$

$$- \lambda_2 c_{i2}^m G_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) G_{i2}^m(\eta, \tau_1, \tau_2)],$$

$$v_1^m(\eta, \zeta, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4(\eta + \zeta)} \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} [\lambda_1 c_{i1}^m F_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) F_{i3}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) +$$

$$+ f_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) [(\lambda_2 c_{i2}^m - \lambda_1 c_{i1}^m) f_{i3}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) + \lambda_2 c_{i2}^m P_i^m(\eta)] - \tag{43}$$

$$- \lambda_2 c_{i2}^m G_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) G_{i3}^m(\eta, \tau_1, \tau_2)],$$

$$w_1^m(\eta, \zeta, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4(\eta - \zeta)} \sum_{i=m}^{n} [\lambda_1 c_{i1}^m F_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) F_{i4}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) +$$

$$+ f_i^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) [(\lambda_2 c_{i2}^m - \lambda_1 c_{i1}^m) g_{i4}^m(\eta, \tau_1, \tau_2) - \lambda_2 c_{i2}^m P_i^m(\eta)] - \tag{44}$$

$$- \lambda_2 c_{i2}^m G_{i1}^m(\zeta, \tau_1, \tau_2) G_{i4}^m(\eta, \tau_1, \tau_2)].$$

Таким образом, коэффициенты яркости, являющиеся функциями двух угловых переменных, выражаются через функции $F_{ij}^m(\zeta)$, $g_{ij}^m(\zeta)$, $f_{ij}^m(\zeta)$, и $G_{ij}^m(\zeta)$, зависящие от одной угловой переменной. Параметры τ_1 и τ_2 входят в выражения для коэффициентов яркости только через посредство этих вспомогатальных функций.

В случае изотропного рассеяния ($n = m = 0$) формулы (41) и (42) совпадают с выражением для коэффициента отражения света от двуслойной атмосферы, полученным в работе [4], а при $\tau_* = \infty$ (41), (43) и (44) переходят в соответствующие выражения для коэффициентов яркости, найденные в работе [5].

Подставляя (41)—(44) и аналогичные выражения для $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$, $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$ при $j = 2;\ 3;\ 4$ в формулы (35)—(38), мы получаем для вспомогательных функций систему нелинейных интегральных уравнений. В случае однородной атмосферы эта система превращается в известную систему уравнений для функций $\varphi_i^m(\zeta)$ и $\psi_i^m(\zeta)$ (см. [2]).

В следующей работе автора для вспомогательных функций будут выведены сравнительно простые линейные интегральные уравнения.

Ленинградский государственный
университет

BRIGHTNESS COEFFICIENTS FOR TWO-LAYER ATMOSPHERE AT ANISOTROPIC SCATTERING. I

A. K. KOLESOV

Anisotropic scattering of radiation in a two-layer atmosphere is investigated. The layers differ in phase functions and in values of optical thickness and of particle albedo. The atmosphere is supposed to be illuminated by parallel beam of radiation. The emergent intensities and the intensities of radiation on the boundary between the layers are expressed in terms of auxiliary functions of one angular variable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* Научные труды, т. 1, Изд. АН Арм.ССР, 1960.
2. *В. В. Соболев.* Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *С. Д. Гутшабаш.* Вестн. ЛГУ, № 1, 158, 1957
4. *В. В. Соболев.* Астрон. ж., 51, 50, 1974.
5. *А. К. Колесов.* Труды АО ЛГУ, 32, 1976
6. *И. Н. Минин.* Астрон. ж., 43, 1244, 1966.
7. *В. В. Соболев.* ДАН СССР, 111, 1000, 1956.
8. *S. Ueno,* Ap. J., 132, 729, 1960.
9. *Э. Г. Яновицкий.* Астрон. ж., 38, 912, 1961