АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 МАЙ, 1974 ВЫПУСК 2

ГЛУБИННЫЙ РЕЖИМ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Х. ДОМКЕ

Поступила 3 января 1974

Разложением матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям уравнение переноса в изотропной среде сведено к независимым уравнениям для азимутальных фурье-компонент. При наличии у процесса рассеяния отражательной инвариантности глубинный режим определяется двухкомпонентным векторным уравнением для не зависящей от азимута части параметров Стокса I и Q. Дан способ определения наименьшего корня характеристического уравнения k и нахождения светового поля в глубоких слоях. При малом истинном поглощении линейная поляризация в глубинном режиме в изотропной среде всегда порядка $(1-\lambda)$ или меньше.

1. *Введение.* В глубоких слоях полубесконечной среды, освещенной с поверхности, устанавливается асимптотический световой режим, который имеет довольно простые характеристики даже при сложном законе рассеяния. Глубинный световой режим представляет большой интерес не только для астрофизики, но и для геофизики, а также для общей теории переноса излучения при решении различных асимптотических задач для полубесконечной среды или атмосферы большой оптической толщины.

В ряде работ [1—5], а также в [6, 7] поле излучения в глубоких слоях исследовалось в рамках скалярной теории переноса, т. е. без учета поляризации. Теоретическое исследование свойств поляризации света в глубоких слоях полубесконечной среды для релеевского рассеяния дается В. В. Соболевым [8]. Для более общего закона рассеяния Г. В. Розенбергом [9] предложен метод нахождения глубинного распределения интенсивности и поляризации света, который применяется и в [10]. По этому методу поле излучения в глубоких слоях получается при помощи решения некоторой последовательности интегральных уравнений.

В настоящей работе предлагается другой способ нахождения глубинного поля поляризованного света в макроскопически изотропной атмосфере при произвольном законе рассеяния. Следуя соображениям Кушера и Рибарича [11], мы сводим уравнение переноса к независимым уравнениям для отдельных фурье-компонент по азимуту при помощи разложения матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям. Далее, в [11] было показано, что векторное уравнение переноса для азимутально симметричной части поля излучения может расщепляться на две независимые системы для параметров Стокса (I, Q) и (V, U), соответственно. Используя рекуррентные свойства обобщенных сферических функций [12], можно дать систематический способ определения наименьшего корня характеристического уравнения и нахождения пространственно-углового распределения и поляризации света в глубоких слоях.

2. *Уравнения переноса.* Рассмотрим плоскопараллельную полубесконечную атмосферу, на границу которой по направлению (μ_0, φ_0) падает излучение, описываемое вектором Стокса πF. Здесь μ обозначает косинус угла между направлением распространения света и внутренней нормалью к слоям, а φ — азимут. Уравнение переноса для вектора Стокса $I(\tau, \mu, \varphi)$ диффузного излучения имеет вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) = -I(\tau, \mu, \varphi) + \frac{1}{4} S(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} d\varphi' S(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi'), \tag{1}$$

где τ — оптическая глубина, а $S(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ — матрица рассеяния. В качестве параметров поляризации удобно выбрать параметры, введенные в [11],

$$I = \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \\ I_{-0} \\ I_{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где (I, Q, U, V) — обычные параметры Стокса [6], которые относятся к линейным состояниям $e_1 = e_l$, $e_2 = e_r$ поляризации параллельно и перпендикулярно к меридиональной плоскости.

В изотропной среде матрица рассеяния S может зависеть лишь от вращения g, которое переводит систему ортов (e_1, e_2, e_z), к которой относится вектор Стокса рассеянного излучения, в систему (e_1', e_2', e_z'), к которой относится вектор Стокса падающего излучения. При этом e_z — направление распространения света, а (e_1, e_2) — орты линейных состояний поляризации. Поэтому естественно разложить элементы матрицы рассеяния $S = S(g)$ по неприводимым представлениям $T^l(g)$ группы пространственных вращений.

При повороте ортов (e_1, e_2) вокруг e_z на угол φ элементы вектора (2) преобразуются согласно закону

$$I_n' = e^{in\varphi} I_n. \tag{3}$$

Тогда из общих правил разложения величин по неприводимым представлениям $T^l(g)$ группы вращения [12] следует, что элементы матрицы рассеяния в представлении (2) имеют разложение вида

$$S_{mn}(g) = \sum_{l=\max(|n|,\ |m|)}^{\infty} T^l_{mn}(g)\, p^l_{mn}. \tag{4}$$

Если вращение g задано эйлеровыми углами $(\varphi_1, \vartheta, \varphi_2)$, то

$$T^l_{mn}(g) = e^{-im\varphi_1} P^l_{mn}(\cos\vartheta)\, e^{-in\varphi_2}, \tag{5}$$

где $P^l_{mn}(\cos\vartheta)$ — обобщенные сферические функции. Если орты e_1, e_2 поляризаций относятся к плоскости рассеяния, то очевидно, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, и, согласно (4) и (5), имеем

$$S_{mn}(\cos\vartheta) = \sum_{l=\max(|m|,\ |n|)}^{\infty} p^l_{mn} P^l_{mn}(\cos\vartheta),$$

где ϑ — угол рассеяния.

В дальнейшем будем относить параметры поляризации к линейным поляризациям относительно меридиональной плоскости. Применяя теорему сложения [12], будем иметь

$$T^l_{mn}(g) = (-1)^m \sum_{s=-|l|}^{+|l|} P^l_{ms}(\mu) P^l_{sn}(\mu')\, e^{is(\varphi-\varphi')}(-1)^s. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), для матрицы рассеяния $S(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ получим

$$S_{mn}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{l=0}^{N} \sum_{s=-|l|}^{+|l|} P^l_{ms}(\mu)\, P^l_{sn}(\mu')\, e^{is(\varphi-\varphi')}(-1)^s p^l_{mn}, \tag{7}$$

$$(m, n = 2, 0, -0, -2).$$

Введем матрицы

$$\begin{aligned} \{P_s^l(\mu)\}_{mn} &= \delta_{mn} P_{ms}^l(\mu), \\ \{p^l\}_{mn} &= p_{mn}^l \end{aligned} \tag{8}$$

и поменяем в (7) порядок суммирования. Тогда матрица $S(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ окажется представленной в виде

$$S(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{s=-N}^{+N} e^{is(\varphi-\varphi')} P_s(\mu, \mu'), \tag{9}$$

где

$$P_s(\mu, \mu') = (-1)^s \sum_{l=|s|}^{N} P_s^l(\mu) p^l P_s^l(\mu'). \tag{10}$$

Предположим, что процесс рассеяния инвариантен при обращении времени (принцип взаимности), а также при отражении относительно плоскости рассеяния. Тогда матрица рассеяния может зависеть лишь от шести независимых вещественных функций [13, 14]. Вместе с соотношениями $I_n = I_{-n}^*$ ($n = 2, 0, -0, -2$) между параметрами Кущера-Рибарича (2) указанные инвариантности приводят к дополнительным условиям, которым должны подчиняться коэффициенты разложения p_{mn}^l. Эти условия имеют вид [11]

$$\begin{gathered} p_{mn}^l = p_{nm}^l = p_{-m,-n}^l; \\ p_{m,m}^l,\ p_{m,-m}^l \text{ — вещественны}, \\ p_{2\,0}^l = p_{2,-0}^{l*}. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, матрицы p^l действительно содержат лишь шесть независимых вещественных параметров.

Используя (11), а также соотношения [12]

$$\begin{aligned} P_{ms}^l(-\mu) &= (-1)^{l+m+s} P_{m,-s}^l(\mu), \\ P_{-m,-n}^l(\mu) &= P_{m,n}^l(\mu), \end{aligned} \tag{12}$$

легко найти, что

$$p_s^T(\mu, \mu') = p_s(\mu', \mu) = p_{-s}(-\mu', -\mu), \tag{13}$$

где верхний индекс T означает транспонирование.

Представим $I(\tau, \mu, \varphi)$ в виде

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{s=-N}^{+N} I_s(\tau, \mu) e^{is(\varphi-\varphi_0)}. \tag{14}$$

Из (9) и (1) легко получить независимые уравнения переноса для отдельных азимутальных фурье-компонент

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_s(\tau, \mu) = -I_s(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' p_s(\mu, \mu') I_s(\tau, \mu') + \frac{1}{4} p_s(\mu, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} F, \qquad (s = -N, \ldots, +N). \tag{15}$$

Уравнение (15) при $s = 0$ допускает дальнейшее расщепление. Определим матричные операторы $A_{\pm}$ и векторы $i_{\pm}$:

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad i_+ = A_+ I = \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix}; \quad i_- = A_- I = \begin{pmatrix} iU \\ V \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Из (8), (11) и (12) следует, что

$$A_{\pm} P_0^l(\mu) = p^l(\mu) A_{\pm}; \quad p^l(\mu) = \begin{pmatrix} P_{20}^l(\mu) & 0 \\ 0 & P_{00}^l(\mu) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$A_{\pm} p^l = p^l_{\pm} A_{\pm}; \quad p^l_{\pm} = \begin{pmatrix} p^l_{-2,2} \pm p^l_{22} & p^l_{-2,0} \pm p^l_{20} \\ p^l_{20} \pm p^l_{-2,0} & p^l_{-0,0} \pm p^l_{0,0} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Поэтому, применяя A_+ и A_- слева к (15) и учитывая (16)—(18), получим отдельные уравнения для $i_+(\tau, \mu)$ и $i_-(\tau, \mu)$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} i_{\pm}(\tau, \mu) = -i_{\pm}(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' p_{\pm}(\mu, \mu') i_{\pm}(\tau, \mu') + \frac{1}{4} p_{\pm}(\mu, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} F_{\pm}, \tag{19}$$

где

$$p_{\pm}(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^{N} p^l(\mu) p^l_{\pm} p^l(\mu'). \tag{20}$$

Следует подчеркнуть, что рассмотренное только что расщепление в уравнении для $s = 0$ является следствием инвариантности рассеяния относительно пространственного отражения. Если изотропная среда состоит, например, из случайно ориентированных частиц без плоскости симметрии, то такого упрощения уравнения переноса, вообще говоря, не существует.

3. *Поле излучения в глубоких слоях.* В достаточно глубоких слоях поле излучения не должно зависеть от деталей углового распределения и поляризации падающего излучения. В частности, оно не зависит от азимута φ. Кроме того, из физического смысла параметров Стокса следует, что с ростом оптической глубины τ вектор I_- не может убывать медленнее I_+. Поэтому на достаточно больших оптических глубинах поле излучения определяется лишь уравнением (19) для индекса $+$, которое при $\tau \gg 1$ принимает вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_+(\tau, \mu) = -I_+(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' p_+(\mu, \mu') I_+(\mu'). \tag{21}$$

В дальнейшем индекс $+$ будет опускаться.

Решение уравнения (21) ищем в виде

$$I(\tau, \mu) = I(\mu) e^{-k\tau}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), найдем для $I(\mu)$ интегральное характеристическое уравнение

$$I(\mu)(1 - k\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' p(\mu, \mu') I(\mu'), \tag{23}$$

причем k определяется условием разрешимости этого уравнения.

Перепишем (23) в виде

$$I(\mu)(1 - k\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \left[p(\mu, \mu') \pi^{-1}(\mu') - p\left(\mu, \frac{1}{k}\right) \pi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \right] \times$$
$$\times \pi(\mu') I(\mu') + p\left(\mu, \frac{1}{k}\right) M, \tag{24}$$

где

$$M = \pi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \pi(\mu') I(\mu'). \tag{25}$$

а $\pi(\mu)$ — некоторая (пока не определенная) матрица — функция, которую мы выберем позже из соображений удобства.

Введем матрицу — функцию $\Psi(\mu, 1/k)$, определив ее как решение уравнения

$$\Psi\left(\mu, \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} d\mu' \frac{\left[p(\mu, \mu')\pi^{-1}(\mu') - p\left(\mu, \frac{1}{k}\right)\pi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\right]}{\frac{1}{k} - \mu'} \times$$
$$\times \Psi\left(\mu', \frac{1}{k}\right) + p\left(\mu', \frac{1}{k}\right). \tag{26}$$

Из (24) видно, что

$$l(\mu) = \frac{\Psi\left(\mu, \frac{1}{k}\right)}{1 - k\mu} M. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (25), получаем алгебраическое уравнение для вектора M

$$T\left(\frac{1}{k}\right) M = 0, \tag{28}$$

где

$$T\left(\frac{1}{k}\right) = E - \pi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} d\mu' \frac{\pi(\mu')\Psi\left(\mu', \frac{1}{k}\right)}{1 - k\mu'}. \tag{29}$$

Параметр k определяется условием разрешимости уравнения (28):

$$\det T\left(\frac{1}{k}\right) = 0. \tag{30}$$

Поскольку в $T(1/k)$ входит $\Psi(\mu, 1/k)$, параметр k можно найти только совместным решением уравнений (30) и (26). Однако ниже мы покажем, что при помощи рекуррентных свойств обобщенных сферических функций решение уравнения (26) можно представить в виде некоторого разложения, что дает алгоритм нахождения k и $l(\mu)$ без решения каких-либо интегральных уравнений.

4. *Исследование характеристического уравнения.* Чтобы найти решение характеристического уравнения (23), рассмотрим сначала функцию $\Psi(\mu, 1/k)$, определенную уравнением (26). Подставляя выражение (20) для $p(\mu, \mu')$ в (26), находим

$$\Psi\left(\mu, \frac{1}{k}\right) = \sum_{l=0}^{N} P^l(\mu) p^l R^l\left(\frac{1}{k}\right), \tag{31}$$

где

$$R^l(z) = \sum_{l'=0}^{N} z \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \, \frac{p^l(\mu')\,\pi^{-1}(\mu') - p^l(z)\,\pi^{-1}(z)}{z - \mu'} \times$$
$$\times \pi(\mu')\, p^{l'}(\mu')\, p^{l'} R^{l'}(z) + p^l(z). \tag{32}$$

Диагональные матрицы $p^l(\mu)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям [12]:

$$A^{l+1} p^{l+1}(\mu) + A^l p^{l-1}(\mu) = (2l+1)\,\mu p^l(\mu), \tag{33}$$

где

$$p^0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p^1(\mu) = \mu p^0(\mu),$$

$$p^2(\mu) = \begin{pmatrix} P^2_{20}(\mu) & 0 \\ 0 & P^2_{00}(\mu) \end{pmatrix}, \qquad A^l = \begin{pmatrix} [l^2-4]^{1/2} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы $p^l(\mu)$ представимы в виде

$$p^l(\mu) = D^l(\mu) \begin{pmatrix} P^2_{20}(\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Здесь $D^l(\mu)$ — диагональная матрица, элементы которой являются полиномами порядка $(l-2)$ или l. Она также удовлетворяет рекуррентному соотношению (33). Для матриц $p^l(\mu)$ имеет место соотношение [12]

$$\int_{-1}^{+1} d\mu\, p^l(\mu)\, p^{l'}(\mu) = \frac{2}{2l+1} E_l \delta_{ll'}, \tag{35}$$

где

$$E_l = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & l \geqslant 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & l < 2. \end{cases}$$

Из (32) видно, что матрицу $\pi(\mu)$ удобно выбрать в виде

$$\pi(\mu) = \begin{pmatrix} P^2_{20}(\mu) & 0 \\ 0 & P^0_{00}(\mu) \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Учитывая (35) и вводя обозначение

$$C_{ll'}(z) = -\int_{-1}^{1} d\mu' \frac{D^l(\mu') - D^l(z)}{z - \mu'} \pi(\mu') p^{l'}(\mu'), \tag{37}$$

из (32) получаем

$$R^l(z) = p^l(z) - \frac{1}{2} z \sum_{l'=0}^{l-1} C_{ll'}(z) p^{l'} R^{l'}(z). \tag{38}$$

Функции $C_{ll'}(z)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A^{l+1} C_{l+1,\,l'}(z) + A^l C_{l-1,\,l'} = (2l+1) z C_{l,\,l'}(z) + \delta_{l,\,l'} E_l \cdot 2,$$

$$C_{l,\,l'} \equiv 0, \qquad l \leqslant l', \tag{39}$$

которое легко получить из формул (33)—(35). При помощи (38) и (39) находим искомое соотношение

$$A^{l+1} R^{l+1}(z) + A^l R^{l-1}(z) = [(2l+1) E_l - p^l] z R^l(z). \tag{40}$$

При этом из (38) следует, что

$$R^0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^1(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1(z) \end{pmatrix}, \quad R^2(z) = \begin{pmatrix} P_{20}^2(z) & 0 \\ 0 & r_2(z) \end{pmatrix},$$

где

$$r_1(z) = (1-\lambda) z, \qquad r_2(z) = \frac{1}{2} [(1-\lambda)(3-p^1) z^2 - 1],$$

$$\lambda = (p_{00}^0 + p_{0,\,-0}^0), \qquad p^1 = p_{00}^1 + p_{0,\,-0}^1. \tag{41}$$

Формула (40) есть матричный аналог хорошо известной рекуррентной формулы для R-полиномов, используемых в скалярной теории неизотропного рассеяния [8].

Введем векторы

$$\xi^l = R^l\left(\frac{1}{k}\right) M, \tag{42}$$

которые появляются в (27), если подставить туда $\Psi\left(\mu, \frac{1}{k}\right)$ из (31). Они, очевидно, удовлетворяют рекуррентному соотношению [11]

$$A^{l+1} \xi^{l+1} + A^l \xi^{l-1} = h^l \xi^l \frac{1}{k},$$

$$h^l = (2l+1) E_l - p^l. \tag{43}$$

Нормируем $l(\mu)$ так, что

$$\xi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Соотношение (43) содержит еще одну, пока неизвестную постоянную γ, входящую в ξ^2.

$$\xi^2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ r_2\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Введем матрицы C_l соотношением

$$\xi^l\left(\frac{1}{k}\right) = C_l\left(\frac{1}{k}\right)\xi^{l-1}\left(\frac{1}{k}\right). \tag{46}$$

Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A^{l+1}C_{l+1}C_l + A^l = \frac{1}{k}h_lC_l, \tag{47}$$

где

$$C_1 = r_1\left(\frac{1}{k}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & r_2\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}\frac{1}{r_2\left(\frac{1}{k}\right)}. \tag{48}$$

Из (47) следует, что

$$C_l = [h_l - kA^{l+1}C_{l+1}]^{-1}kA^l, \quad l \geqslant 2 \tag{49}$$

Чтобы найти выражение для k, подставим (49) в вытекающую из (45) и (48) формулу

$$\xi^2 = C_2C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ r_2\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}. \tag{50}$$

В результате находим

$$\xi^2 = [h_2 - kA^3C_3]^{-1}(1-\lambda)\,2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ r_2\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Если учесть (42), то отсюда следует, что

$$k^2 = (1-\lambda)\left\{(3-p^1) - 4k^2(0,\ 1)[h_2 - kA^3C_3]^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \tag{52}$$

и

$$\gamma = 2(1-\lambda)(1,\ 0)\,[h_2 - kA^3C_3]^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{53}$$

В этих формулах C_3 должно находиться из (49).

5. *Почти консервативное рассеяние.* Формула (52) позволяет найти k методом последовательных приближений включением все большего числа членов при вычислении C_3 при помощи (49). При малом истинном поглощении $(1-\lambda) \ll 1$ получающийся ряд сходится быстро. В первом приближении находим из (52)

$$k_{(1)} = [(1-\lambda)(3-p^1)]^{1/2} + 0((1-\lambda)^{3/2}), \tag{54}$$

т. е. точно такой же результат, как в скалярной теории. Во втором приближении имеем

$$k_{(2)} = [(1-\lambda)(3-p^1)]^{1/2}\left|1-(1-\lambda)\,4\,(0,1)\,\{h_2\}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|^{1/2} + \\ + 0((1-\lambda)^{5/2}). \tag{55}$$

Подчеркнем, что из (52) k можно найти с любой точностью, независимо от нахождения $\Psi(\mu,\ 1/k)$. При помощи (53) находим γ для малых $(1-\lambda)$

$$\gamma = 2(1-\lambda)(1,\ 0)\,h_2^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{56}$$

Наконец, рассмотрим вектор Стокса $i(\mu)$ (27) глубинного режима. При учете (31) и (42) получим

$$i(\mu) = \frac{1}{1-k\mu}\sum_{l=0}^{N} p^l(\mu)\,p^l\xi^l\left(\frac{1}{k}\right). \tag{57}$$

Используя (43), (51) и (54), находим, что при малом истинном поглощении с точностью до членов порядка $(1-\lambda)^{3/2}$

$$i(\mu) = \left(1+3\mu\frac{(1-\lambda)^{1/2}}{(3-p^1)^{1/2}}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\mu^2(1-\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \\ + (1-\lambda)\,2p^2(\mu)\,p^2h_2^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0((1-\lambda)^{3/2}). \tag{58}$$

Здесь

$$p^2(\mu) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}(1-\mu^2) & 0\\ 0 & (3\mu^2-1)\end{pmatrix}.$$

Обсудим формулу (58). Можно показать, что в глубинном режиме в изотропной среде появление линейной поляризации в линейных по μ членах запрещено симметрией задачи. При малом истинном поглощении эффекты поляризации в глубоких слоях изотропной среды, согласно (58), имеют порядок $(1-\lambda)$ или меньше. Тем самым мы получаем оценку точности расчета полей излучения по скалярной теории переноса, по крайней мере для глубоких слоев. Кроме того, формула (58) дает возможность измерением линейной поляризации получить непосредственно информацию о фазовой матрице. Если же закон рассеяния известен, то мы получаем тем самым метод определения параметра λ.

Формулы (57), (55) и рекуррентное соотношение (43) были получены еще в работе Кущера и Рибарича [11]. Изложенный выше способ нахождения k и γ можно рассматривать как обобщение известного в скалярной теории метода определения k по цепной дроби [4, 7].

В качестве примера применим полученные только что формулы для нахождения глубинного светового режима при молекулярном рассеянии. Для молекулярного рассеяния матрицы p^l имеют вид [6, 11]

$$p^0 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p^1 = 0, \quad p^2 = 3c\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \tag{59}$$

($c = 1$ — релеевское рассеяние, $c = 0$ — изотропное рассеяние). Подставляя (59) в (58), найдем

$$\begin{aligned} i_M(\mu) = (1 + 3(1-\lambda)^{3/2}\mu + 3\mu^2(1-\lambda)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + (1-\lambda)\frac{c}{10-7c} \begin{pmatrix} -3(1-\mu^2) \\ 3\mu^2 - 1 \end{pmatrix} + 0((1-\lambda)^{3/2}). \end{aligned} \tag{60}$$

Отсюда следует, что максимальная степень поляризации в глубоких слоях, которая достигается при $\mu = 0$, равна

$$p_{\max} = -\frac{3c(1-\lambda)}{10-7c} + 0((1-\lambda)^{3/2}). \tag{61}$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. В. Иванову за ценные замечания и дискуссии.

Центральный институт астрофизики
АН ГДР

POLARIZED RADIATION IN DEEP LAYERS OF A SEMI-INFINITE ATMOSPHERE

H. DOMKE

Expanding the scattering matrix in generalized spherical functions the transport equation for an isotropic medium is reduced to independent equations for the Fourier components in azimuth. If the scattering process is invariant to the reflection, the radiation field in deep layers is described by a two component vector equation for the azimuth-independent components of the Stokes parameters I and Q. A method is given for calculating the smallest root of the characteristic equation and of the radiation field in deep layers. For small true absorption ($(1-\lambda) \ll 1$) the plane polarization deep inside an isotropic medium is of the order of $(1-\lambda)$ or smaller.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.
2. *В. В. Соболев*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 273, 1944.
3. *Л. М. Романова*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 9, 1294, 1962.
4. *В. М. Лоскутов*, Вестн. ЛГУ № 13, 143, 1969.
5. *М. В. Масленников*, Проблема Милна с анизотропным рассеянием, Труды Матем ин-та АН СССР, вып. 97, 1968.
6. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
7. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
8. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГТТИ, М., 1956.
9. *Г. В. Розенберг*, в сб. „Спектроскопия светорассеивающих сред", Изд-во АН БССР, Минск, 1963, стр. 5.
10. *Э. П. Зеге, Л. И. Кардаш*, Ж. прикл. спектроск., 17, 861, 1972.
11. *I. Kuščer, M. Ribaric*, Optica acta, 6, 42, 1959.
12. *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро*, Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
13. *H. C. van de Hulst*, Light scattering by small particles, Wiley, New York, 1957, (русск. пер. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М., 1961).
14. *J. W. Hovenier*, J. Atmosph. Sci., 26, 488, 1969.