АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. II. ФУНКЦИИ $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ АМБАРЦУМЯНА И ИХ МОМЕНТЫ

В. М. ЛОСКУТОВ

Поступила 18 мая 1973

Интегрированием резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$, способ вычисления которой дан в первой части работы [1], находятся функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ Амбарцумяна и их моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$. Приводятся таблицы первых шести моментов для $\tau_0 = 0.2, 0.5\ (0.5)\ 3.0$ и нескольких альбедо частицы. Путем сравнения точных значений рассматриваемых функций с даваемыми асимптотическими формулами сделана оценка точности последних.

Введение. В первой части настоящей работы [1] был описан алгоритм нахождения резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ в задаче о монохроматическом изотропном рассеянии излучения плоским слоем конечной оптической толщины τ_0 (τ — оптическая глубина точки в слое) и приведены некоторые результаты вычислений этой функции и ее моментов. Как известно [2], знание $\Phi(\tau, \tau_0)$ позволяет определить интенсивность излучения на любой оптической глубине при произвольных источниках излучения. В частности, могут быть найдены функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau)$, введенные В. А. Амбарцумяном [3, 4] при решении задачи о диффузном отражении и пропускании света плоским слоем. Согласно [2], функции Амбарцумяна выражаются через $\Phi(\tau, \tau_0)$ при помощи формул

$$\varphi(\eta, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{1}$$

$$\psi(\eta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{2}$$

где η — косинус угла между направлением луча и нормалью к слою. Часто бывают нужны и моменты этих функций

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^1 \eta^n \varphi(\eta, \tau_0)\, d\eta, \tag{3}$$

$$\beta_n(\tau_0) = \int_0^1 \eta^n \psi(\eta, \tau_0)\, d\eta. \tag{4}$$

Табулированию функций $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов посвящено довольно много работ [5—11]. В большинстве из них значения функций находились путем решения систем интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Оценить точность вычислений довольно трудно. При решении системы интегральных уравнений методом итераций для вероятности выживания кванта близкой к единице и больших τ_0 сходимость итераций медленная. Когда же решается система интегро-дифференциальных уравнений, необходимо сделать большое число шагов, прежде чем дойдем до больших τ_0. При использовании формул (1) и (2) мы просто вычисляем интегралы, и если известна точность вычисления $\Phi(\tau, \tau_0)$, то легко оценить точность находимых значений $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$. К оценке точности и сравнению с результатами других авторов мы обратимся ниже.

Способ вычислений. Мы имели, найденные в [1], значения функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \leqslant 1$ в точках $\tau = (\tau_0/2)\, e^{-x}$ и $\tau = \tau_0 - (\tau_0/2)\, e^{-x}$, а при $\tau_0 > 1$ в точках $\tau = ae^{-x}$, $\tau = \tau_0 - ae^{-x}$, во всех случаях $x = 0(\Delta x)(n \cdot \Delta x)$ и $\tau = a(\Delta\tau)\, \tau_0 - a$. В соответствии с этим интегралы в формулах (1) и (2) разбивались на два (при $\tau_0 \leqslant 1$) или три ($\tau_0 > 1$) интеграла и делались замены переменных, так что расчетные формулы принимали вид

$$\begin{aligned} \varphi(\eta, \tau_0) = 1 + a \int_0^\infty \Big[& e^{-ae^{-x}\frac{1}{\eta}} \Phi(ae^{-x}, \tau_0) + \\ & + e^{-(\tau_0 - ae^{-x})\frac{1}{\eta}} \Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) \Big] e^{-x}\, dx \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\psi(\eta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + a\int_0^\infty \left[e^{-ae^{-x}\frac{1}{\eta}} \Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) + e^{-(\tau_0 - ae^{-x})\frac{1}{\eta}} \Phi(ae^{-x}, \tau_0) \right] e^{-x}\, dx, \tag{6}$$

где при $\tau_0 \leqslant 1$ величина a равна $\tau_0/2$. При $\tau_0 > 1$ в правые части формул (5) и (6) добавлялись члены

$$\int_a^{\tau_0 - a} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau \text{ и } \int_a^{\tau_0 - a} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\, d\tau, \text{ соответственно.}$$

Все интегралы в этих формулах вычислялись по правилу Симпсона, причем верхний предел в интегралах по x заменялся на $n\Delta x$. Оставшиеся части интегралов от $n\Delta x$ до ∞ вычислялись точно с учетом того, что с заданной точностью в 5 значащих цифр функция $\Phi(ae^{-x}, \tau_0) = c \cdot x + \lambda/2$ и $\Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) = \text{const} = \Phi(\tau_0 - ae^{-n\Delta x}, \tau_0)$, когда $x \gg 1$.

Для нахождения моментов $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$ в формулах (3) и (4) производилась замена переменной $\eta = e^{-y}$ и интегралы вычислялись по формуле Гаусса — Лагерра. Использовалась 32-точечная квадратурная формула, что обеспечивает 5—6 значащих цифр.

Оценка точности получаемых значений $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ у их моментов проводилась путем проверки различных соотношений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Прежде всего проверялись равенства (см., например, [12])

$$\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 - \beta_0)\right]\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 + \beta_0)\right] = 1 - \lambda \tag{7}$$

и

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0\right)\alpha_2 + \frac{\lambda}{2}\beta_0\beta_2 + \frac{\lambda}{4}(\alpha_1^2 - \beta_1^2) = \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Во всех случаях эти равенства выполнялись с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-6}.

Кроме того, проверялись соотношения, связывающие моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$ с моментами $\Phi_n(\tau_0)$ функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ (см. [13])

$$1 + \Phi_0 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 + \beta_0)} \tag{9}$$

и

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \tau_0\beta_0}{1-\lambda} \tag{10}$$

Эти соотношения выполнялись с относительной ошибкой меньше 10^{-5}. К сожалению, все эти формулы не обеспечивают полного контроля точности функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ раздельно.

Как показало сравнение с результатами вычислений других авторов, наибольшие расхождения встречаются в значениях функции $\psi(\eta, \tau_0)$. Поэтому весьма полезным было равенство

$$\int_0^1 \frac{\psi(\eta, \tau_0)}{\eta} d\eta = \Phi(\tau_0, \tau_0), \tag{11}$$

куда входит только функция $\psi(\eta, \tau_0)$. Это соотношение у нас выполнялось с ошибкой, не превышающей единицу пятой значащей цифры. На основании изложенного мы считаем, что вычисляемые нами значения функций $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов имеют ошибку порядка 1—2 единиц пятой значащей цифры.

Проводилось также сравнение с имеющимися в литературе таблицами этих функций. Наиболее подробными являются таблицы Карлстедта и Малликина [9], в которых приводятся значения функций Амбарцумяна и их нулевых моментов с шестью значащими цифрами. При λ близких или равных 1 наши значения отличаются от значений этих авторов не более чем на 1 единицу пятой значащей цифры при $\eta \geqslant 0.03$. При меньших η различие возрастает с уменьшением η. Это обусловлено неточностью вычисления функции $\varphi(\eta)$ для полубесконечной атмосферы, используемой Карлстедтом и Малликином. С уменьшением λ возрастают различия в значениях функций $\psi(\eta, \tau_0)$ при всех значениях η, достигая нескольких единиц четвертого знака для $\lambda=0.3$. Проверка соотношения (11) показала, что $\Phi(\tau_0, \tau_0)$, вычисленная по данным указанных авторов, отличается как от наших значений этой величины, так и значений, приведенных в работе Кагивада и Калаба [14], которые согласуются с нашими в пределах нескольких единиц пятой значащей цифры.

При малых λ мы сравнили наши результаты с даннными Беллмана и др. [8]. Оказалось, что отличие их значений функций от наших не превышает единицы пятого знака.

Таким образом, сравнение с таблицами других авторов подтверждает оценку точности вычисленных нами значений функций Амбарцумяна и их моментов, сделанную ранее.

Результаты вычислений. Описанным методом были вычислены функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ с шагом по η, равным 0.01, и моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau)$ $(0 \leqslant n \leqslant 10)$ для большого набора значений λ и τ_0, близкого к набору Карлстедта и Малликина. Поскольку для большинства приложений таблицы функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ этих авторов вполне достаточны, то мы приводим в таблицах 1 и 2 лишь значения моментов $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$.

Представляет интерес сравнить точные значения рассматриваемых величин с даваемыми асимптотическими (при больших τ_0) формулами, которые были получены В. В. Соболевым [15]. Мы приведем их в форме, предложенной МакКормиком [16]:

$$\varphi(\eta, \tau_0) = \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\mu}\left[1 - \frac{k\mu}{\operatorname{th} \varkappa}\right], \tag{12}$$

$$\psi(\eta, \tau_0) = \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\mu}\,\frac{k\mu}{\operatorname{sh} \varkappa}, \tag{13}$$

и

$$\alpha_n(\tau_0) = \alpha_n - u_n \frac{ke^{-\varkappa}}{\operatorname{sh} \varkappa}, \tag{14}$$

$$\beta_n(\tau_0) = \frac{u_n k}{\operatorname{sh} \varkappa}. \tag{15}$$

Здесь k — корень характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1 + k}{1 - k} = 1, \tag{16}$$

$\alpha_n = \alpha_n(\infty)$ — моменты функции $\varphi(\eta)$, а $\varkappa = k(\tau_0 + 2\tau_e)$, где τ_e — так называемая экстраполированная длина, которая выражается через $\varphi(\eta)$ по формуле

$$\tau_e = \frac{1}{2k} \ln \frac{2\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right)(\lambda - 1 + k^2)}{1 - k^2}. \tag{17}$$

Величины u_n также выражаются через $\varphi(\eta)$:

$$u_n = \int\limits_0^1 \frac{\eta^{n+1}\varphi(\eta)}{1 - k\eta}\, d\eta. \tag{18}$$

В табл. 3 приводится относительная погрешность асимптотических формул для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ при $\eta = 1$, где наблю-

МОМЕНТЫ $\alpha_n(\tau_0)$ *Таблица 1*

τ_0	λ = 0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1.0
1	2	3	4	5	6	7	8
				α_0			
0.2	1.0956	1.1418	1.1671	1.1941	1.2082	1.2199	1.2229
0.5	1.1390	1.2165	1.2625	1.3147	1.3436	1.3683	1.3747
1.0	1.1619	1.2640	1.3302	1.4119	1.4606	1.5045	1.5163
1.5	1.1684	1.2809	1.3581	1.4595	1.5241	1.5854	1.6024
2.0	1.1705	1.2876	1.3707	1.4852	1.5623	1.6394	1.6616
2.5	1.1712	1.2903	1.3765	1.4995	1.5865	1.6779	1.7051
3.0	1.1714	1.2914	1.3793	1.5078	1.6023	1.7064	1.7386
∞	1.1716	1.2922	1.3820	1.5195	1.6345	1.8182	2.0000
				α_1			
0.2	0.55306	0.57883	0.59295	0.60799	0.61598	0.62241	0.62407
0.5	0.58063	0.62604	0.65310	0.68391	0.70099	0.71588	0.71937
1.0	0.59638	0.65830	0.69884	0.74918	0.77935	0.80659	0.81390
1.5	0.60110	0.67035	0.71849	0.78236	0.82334	0.86243	0.87329
2.0	0.60266	0.67519	0.72753	0.80056	0.85027	0.90029	0.91471
2.5	0.60319	0.67719	0.73181	0.81090	0.86748	0.92745	0.94541
3.0	0.60338	0.67804	0.73337	0.81686	0.87874	0.94765	0.96911
∞	0.60348	0.67866	0.73582	0.82532	0.90188	1.02718	1.15470
				α_2			
0.2	0.36966	0.38732	0.39700	0.40731	0.41273	0.41720	0.41834
0.5	0.38956	0.42134	0.44031	0.46193	0.47392	0.48417	0.48683
1.0	0.40143	0.44553	0.47452	0.51090	0.53228	0.55187	0.55713
1.5	0.40511	0.45484	0.48961	0.53596	0.56580	0.59435	0.60226
2.0	0.40635	0.45864	0.49666	0.55005	0.58657	0.62343	0.63407
2.5	0.40678	0.46023	0.50004	0.55811	0.59992	0.64441	0.65777
3.0	0.40694	0.46091	0.50161	0.56279	0.60870	0.66008	0.67612
∞	0.40702	0.46142	0.50322	0.56945	0.62679	0.72195	0.82035
				α_3			
0.2	0.27755	0.29094	0.29829	0.30611	0.31022	0.31362	0.31448
0.5	0.29304	0.31741	0.33195	0.34856	0.35777	0.36565	0.36769
1.0	0.30252	0.33667	0.35917	0.38721	0.40407	0.41933	0.42343
1.5	0.30533	0.34423	0.37139	0.40768	0.43109	0.45349	0.45973
2.0	0.30655	0.34736	0.37716	0.41916	0.44796	0.47709	0.48551
2.5	0.30691	0.34868	0.37995	0.42577	0.45887	0.49418	0.50480
3.0	0.30704	0.34925	0.38130	0.42961	0.46606	0.50697	0.51978
∞	0.30712	0.34968	0.38258	0.43511	0.48094	0.55766	0.63782

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
				α_4			
0.2	0.22217	0.23295	0.23886	0.24516	0.24847	0.25120	0.25190
0.5	0.23483	0.25456	0.26636	0.27981	0.28728	0.29366	0.29532
1.0	0.24270	0.27053	0.28889	0.31180	0.32558	0.33806	0.34141
1.5	0.24524	0.27689	0.29914	0.32893	0.34817	0.36639	0.37172
2.0	0.24611	0.27954	0.30403	0.33861	0.36237	0.38642	0.39338
2.5	0.24642	0.28067	0.30640	0.34421	0.37158	0.40084	0.40964
3.0	0.24654	0.28116	0.30755	0.34747	0.37767	0.41165	0.42229
∞	0.24660	0.28153	0.30866	0.35216	0.39031	0.45488	0.52223
				α_5			
0.2	0.18521	0.19423	0.19917	0.20444	0.20721	0·20949	0.21007
0.5	0.19590	0.21248	0.22238	0.23368	0.23996	0.24533	0.24672
1.0	0.20262	0.22610	0,24160	0.26095	0.27259	0.28314	0.28597
1.5	0.20481	0.23158	0.25042	0.27567	0.29199	0.30762	0.31198
2.0	0.20558	0.23388	0.25465	0.28403	0.30424	0.32472	0.33064
2.5	0.20585	0.23487	0.25671	0.28888	0.31221	0.33717	0.34469
3.0	0.20595	0.23529	0.25772	0.29172	0.31749	0.34653	0.55563
∞	0.20601	0.23562	0.25869	0.29580	0.32846	0.38377	0.44230

Таблица 2

МОМЕНТЫ $\beta_n(\tau_0)$

τ_0	λ						
	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1.0
1	2	3	4	5	6	7	8
				β_0			
0.2	0.66014	0.70237	0.72562	0.75048	0.76357	0.77438	0.77714
0.5	0.43080	0.49273	0.53051	0.57423	0.58975	0.61984	0.62534
1.0	0.23418	0.29866	0.34409	0.40344	0.44035	0.47444	0.48370
1.5	0.13358	0.18844	0.23225	0.29649	0.34082	0.38503	0.39762
2.0	0.07798	0.12098	0.15941	0.22236	0.27057	0.32277	0.33842
2.5	0.04615	0.07838	0.11032	0.16854	0.21797	0.27634	0.29486
3.0	0.02756	0.05106	0.07670	0.12850	0.17719	0.24013	0.26134

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
				β_1			
0.2	0.40145	0.42573	0.43908	0.45335	0.46086	0.46709	0.46864
0.5	0.28656	0.32493	0.34827	0.37523	0.39034	0.40732	0.40640
1.0	0.16693	0.20944	0.23922	0.27798	0.30201	0.32418	0.33019
1.5	0.09881	0.13627	0.16493	0.20917	0.23889	0.26845	0.27686
2.0	0.05906	0.08910	0.11566	0.15884	0.19174	0.22725	0.23788
2.5	0.03553	0.05842	0.08081	0.12126	0.15539	0.19555	0.20826
3.0	0.02148	0.03838	0.05654	0.09286	0.12676	0.17039	0.18507
				β_2			
0.2	0.28375	0.30056	0.30980	0.31967	0.32487	0.32915	0.33025
0.5	0.21187	0.23934	0.25603	0.27529	0.28607	0.29533	0.29774
1.0	0.12871	0.16017	0.18215	0.21069	0.22836	0.24464	0.24906
1.5	0.07914	0.10644	0.12875	0.16118	0.18341	0.20550	0.21177
2.0	0.04751	0.07055	0.09079	0.12355	0.14844	0.17526	0.18328
2.5	0.02894	0.04669	0.06392	0.09487	0.12089	0.15143	0.16109
3.0	0.01766	0.03088	0.04495	0.07291	0.09890	0.13226	0.14347
				β_3			
0.2	0.21836	0.23117	0.23821	0.24573	0.24969	0.25296	0.25379
0.5	0.16719	0.18849	0.20143	0.21635	0.22470	0.23187	0.23374
1.0	0.10432	0.12921	0.14656	0.16907	0.18300	0.19583	0.19930
1.5	0.06446	0.08715	0.10499	0.13086	0.14858	0.16616	0.17116
2.0	0.03969	0.05835	0.07468	0.10103	0.12101	0.14251	0.14894
2.5	0.02442	0.03890	0.05289	0.07793	0.09893	0.12354	0.13132
3.0	0.01501	0.02586	0.03735	0.06007	0.08112	0.10811	0.11716
				β_4			
0.2	0.17716	0.18750	0.19318	0.19925	0.20244	0.20508	0.20575
0.5	0.13776	0.15513	0.16567	0.17783	0.18463	0.19047	0.19199
1.0	0.08752	0.10808	0.12239	0.14095	0.15242	0.16299	0.16585
1.5	0.05477	0.07369	0.08853	0.11002	0.12473	0.13932	0.14346
2.0	0.03405	0.04972	0.06338	0.08531	0.10208	0.12001	0.12537
2.5	0.02110	0.03333	0.04510	0.06611	0.08370	0.10430	0.11081
3.0	0.01306	0.02226	0.03196	0.05109	0.06878	0.09142	0.09901
				β_5			
0.2	0.14984	0.15760	0.16235	0.16744	0.17011	0.17232	0.17288
0.5	0.11702	0.13166	0.14056	0.15080	0.15654	0.16146	0.16275
1.0	0.07530	0.09279	0.10496	0.12073	0.13048	0.13945	0.14189
1.5	0.04757	0.06378	0.07648	0.09485	0.10741	0.11987	0.12340
2.0	0.02980	0.04329	0.05504	0.07394	0.08824	0.10360	0.10819
2.5	0.01858	0.02916	0.03931	0.05740	0.07253	0.09231	0.09582
3.0	0.01155	0.01954	0.02793	0.04444	0.05969	0.07919	0.08572

даются наибольшие отклонения от точных значений, и для моментов $\alpha_0(\tau_0)$ и $\beta_0(\tau_0)$. Для моментов других порядков ошибки имеют приблизительно такие же величины. Как и следовало ожидать, асимптотические формулы для $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\alpha_n(\tau_0)$ дают при одном и том же τ_0 более точные результаты, чем соответствующие формулы для $\psi(\eta, \tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$.

Таблица 3

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В ПРОЦЕНТАХ

	$\varphi(1, \tau_0)$			$\psi(1, \tau_0)$		
τ_0 \ λ	1	0.95	0.7	1	0.95	0.7
2	0.6	0.5	0.3	9	13	23
3	0.2	0.1	0.05	4	6	35
5	0.01	0.01	0.01	0.6	1.5	20
	$\alpha_0(\tau_0)$			$\beta_0(\tau_0)$		
τ_0 \ λ	1	0.95	0.7	1	0.95	0.7
2	0.05	0.06	0.06	0.3	0.7	8
3	0.01	<0.01	<0.01	0.03	0.3	6
5	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	0.04	3

Из табл. 3 также следует, что при $\lambda = 1$ асимптотическими формулами для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов можно пользоваться уже при небольших τ_0. С уменьшением λ оптическая толщина слоя, при которой работают асимптотические формулы, возрастает.

Ленинградский государственный
университет

THE CALCULATION OF RADIATION FIELD UNDER THE ASSUMPTION OF MONOCHROMATIC ISOTROPIC SCATTERING. II. AMBARTSUMIAN'S φ AND ψ FUNCTIONS AND THEIR MOMENTS

V. M. LOSKUTOV

The functions $\varphi(\eta, \tau_0)$ and $\psi(\eta, \tau_0)$ and their moments $\alpha_n(\tau_0)$ and $\beta_n(\tau_0)$ are found by numerical integration using the values of the Green function $\Phi(\tau, \tau_0)$. The method of computation of $\Phi(\tau, \tau_0)$, was given in part I. The Tables of the first six moments are presented for $\tau_0 = 0.2$, 0.5 (0.5) 3.0 and for some of the partical albedo. The results are used to estimate the accuracy of the well-known asymptotic expressions of the function under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 9, 3, 347, 1973.
2. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
3. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
4. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
5. *S. Chandrasekhar, D. Elbert*, Ap. J., 115, 244, 1952.
6. *D. F. Mayers*, M. N., 123, 483, 1962.
7. *Y. Sobouti*, Ap. J., Suppl. ser., 7, No. 72, 411, 1963.
8. *R. Bellma, H. Kagiwada, R. Kalaba, S. Ueno*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 6, 251, 1966.
9. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., No. 113, 1966.
10. *H. Cohen*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer., 9, 931, 1969.
11. *J. K. Shultis*, Astron. Astrophys., 14, 463, 1971.
12. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
13. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966.
14. *H. Kagiwada, R. Kalaba*, RM 4958-PR, 1966, The RAND Corporation.
15. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
16. *N. J. McCormik*, Ap. J., 147, 816, 1967.