

## ЭВОЛЮЦИЯ БЕЛОГО КАРЛИКА ПРИ АККРЕЦИИ БОГАТОГО ВОДОРОДОМ ВЕЩЕСТВА. I

Ю. Н. РЕДКОВОРОДЫЙ

Поступила 1 ноября 1971

Рассмотрена эволюция гелиевого белого карлика с равномерно возрастающей за счет аккреции водородной оболочкой. Расчеты проводились на основе метода Хения в предположении квазистатичности аккреции. Построена эволюционная последовательность моделей, свидетельствующая о возникновении в нижних слоях водородной оболочки слоевого источника энергии, который оказывается термически нестабильным. Показано, что ускоренный рост температуры в слое горения водорода имеет место и после того, как скорость аккреции по каким-либо причинам резко уменьшится, если только масса накопленного водорода превышает некоторое критическое значение. Полученные результаты можно связать с феноменами новых, повторных и карликовых новых, имеющих место в тесных двойных системах.

1. *Введение.* Исследование эволюции белых карликов, содержащих в оболочке водород, представляет значительный интерес. Соображения о возможной неустойчивости таких звезд были высказаны в 1950 г. в работах Леду [1] и Ли [2]. Несколько позже Местелом [3] было сделано предположение о тепловой неустойчивости во внешних слоях белого карлика при наличии аккреции водорода и предложена упрощенная модель развития такой неустойчивости. В то время идея Местела не получила большого распространения и должным образом не развивалась. Интерес к этой гипотезе возродился в последние годы в связи с исследованиями причин переменности в тесных двойных системах. Однако в большинстве работ по аккреции белым карликом водорода [4—8], следуя Местелу [3], принят весьма упрощенный подход к проблеме: структура звезды в области слоевого источника энергии получается путем „сшивки“ изотермического ядра и лучистой оболочки, используются приближенные формулы Крамерса для коэффициента поглощения, степенная зависимость ядерного энерговыделе-

ния от температуры и нулевые граничные условия на поверхности звезды; тепловая задача рассматривается отдельно от гидростатической, подобно тому, как это делается в случае полностью вырожденных конфигураций.

Возможность развития термической неустойчивости при горении водорода на периферии белого карлика в конечном счете зависит от соотношения между скоростью локального нагревания и скоростью охлаждения вследствие как теплоотвода (резко возрастающего при заметном вырождении вещества — за счет электронной теплопроводности), так и возможного расширения оболочки (при недостаточном вырождении). Поскольку физические параметры вещества во внешних слоях белого карлика изменяются чрезвычайно быстро с глубиной, то ход эволюции звезды должен существенно зависеть от точного местоположения слоевого источника энергии. Введение же вышеупомянутых упрощающих предположений, оправданных при рассмотрении звезды в целом, в данном случае приводит к такому чрезмерному „огрублению“ структуры внешних слоев белого карлика, что принципиальный вывод о наличии термической неустойчивости может оказаться необоснованным.

Таким образом, даже сам факт возможности теплового взрыва (не говоря уже о развитии его во времени) может быть установлен, как нам кажется, только при строгом подходе к решению задачи об аккреции водорода на белый карлик путем непосредственного решения системы уравнений внутреннего строения звезды с использованием точных выражений для энерговыделения [9, 10], новейших данных о коэффициентах поглощения [11] и электронном экранировании при термоядерных реакциях [12]. По возможности необходимо отказаться и от остальных упрощений, таких, например, как использование нулевых граничных условий, поскольку слоевой источник энергии располагается недалеко от поверхности звезды. Наиболее близко к выполнению такой программы подошли Джанноне и Вейгерт [4], однако серьезным недостатком их работы является использование нулевых граничных условий и учет эффекта экранирования по приближенным формулам Салпитера [13]. Кроме того, полученные в [4] результаты в значительной степени обесцениваются тем, что в работе использован первоначальный вариант таблиц Кокса и др. для непрозрачностей, оказавшийся ошибочным [14], и не учтены последние уточнения в скорости протон-протонной реакции [9].

В данной работе излагается метод расчета эволюционной последовательности моделей для белого карлика, на поверхности которого имеет место аккреция богатого водородом вещества, а также приводятся результаты расчетов этим методом эволюции белого карлика с гелиевым ядром и начальной массой  $M = 0.5 M_{\odot}$  в случае

$M = 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ . В отличие от работ [4—8] описываемый метод основан на численном решении исходной системы уравнений внутреннего строения звезды с ненулевыми граничными условиями и при значительно более точном учете всех эффектов тепловыделения и теплоотвода.

Помимо обычных допущений, которые делаются при расчетах сферически симметричных моделей звезд, мы используем следующие упрощающие предположения:

1) Принято, что приобретаемые звездой слои водорода являются оптически тонкими, так что кинетическая энергия упавшего на звезду вещества подвергается диссипации и переизлучается вовне (например, в рентгеновском диапазоне [5]). В таком случае мы имеем дело с квазистатической аккрецией, т. е. скорость вещества в момент присоединения к звезде можно считать равной нулю, так что в самых верхних слоях оболочки  $L \cong \text{const}$ . Оценка показывает, что даже при невысоких темпах аккреции ( $10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ ) поток кинетической энергии на поверхность белого карлика достигает значительной величины, однако приближение „медленной“ аккреции оправдывается тем, что точный учет доли „переизлученной“ кинетической энергии представляет собой весьма сложную задачу. С другой стороны, данное предположение согласуется с общепринятым квазистатическим приближением в теории внутреннего строения звезд, при котором динамический член в уравнении гидростатического равновесия считается равным нулю.

2) Согласно результатам работ [4, 8] промежутки времени, в течение которого может развиваться термическая неустойчивость, составляет величину  $\tau \sim 10^8 \text{ лет}$ . С помощью известного соотношения  $(\Delta l)^2 \sim D \cdot \tau$  ( $D$  — коэффициент диффузии) нетрудно убедиться в том, что ширина  $\Delta l$  диффузионного „размытия“ границы He—H за время  $\tau$  много меньше толщины невырожденной оболочки, т. е. хорошим приближением является скачкообразное изменение химического состава на границе между веществом звезды и накопленным в результате аккреции водородом.

3) Малость величины  $\tau$  по сравнению со временем „ядерной“ эволюции звезд на главной последовательности позволяет пренебречь изменением химического состава за счет выгорания водорода. Действительно, как видно из приводимых ниже результатов, на протяжении всех расчетов в любой точке звезды удельная мощность энерговыделения  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon \ll \frac{E_*}{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени, отделяющий данную модель от предыдущей;  $E_*$  — количество энергии, выделяющееся при полном превращении 1 г водорода в гелий. Следовательно, изменение концентрации водорода  $|\Delta X| \sim (\varepsilon/E_*) \Delta t \ll 1$ .

2. *Основные уравнения. Физические условия в белом карлике.* Если в качестве независимой переменной использовать массовую переменную  $\xi$ , то система уравнений структуры звезды принимает вид [15]

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{Gm\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dm}{d\xi} - 4\pi r^2 \rho \frac{\partial r}{\partial \xi} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial l}{d\xi} - \frac{dm}{d\xi} \left[ \varepsilon - \frac{\partial E}{\partial t} - P \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{6\kappa pl}{64\pi\sigma T^3 r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \nabla > \nabla_{\text{ад}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} + P \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad \text{при } \nabla \geq \nabla_{\text{ад}};$$

где

$$\Delta = \frac{3}{64\pi\sigma G} \frac{\kappa l P}{m T^4}; \quad (6)$$

$m(\xi)$ ,  $l(\xi, t)$  и  $r(\xi, t)$  — масса, светимость и радиус для сферы, соответствующей некоторому значению  $\xi$  (в отличие от  $M$ ,  $L$  и  $R$  — массы, светимости и радиуса звезды в целом);  $\nabla_{\text{ад}}$  — адиабатический градиент (см. раздел 5). Величины  $P$ ,  $E$ ,  $\kappa$  и  $\varepsilon$  в (2)–(6) являются функциями  $\rho$ ,  $T$  и химсостава (параметры  $X$ ,  $Y$ ,... считаются не зависящими от времени — см. выше).

а) *Уравнение состояния.* Оценка показывает, что в условиях белого карлика давлением излучения можно пренебречь, т. е.

$$P = P_i + P_e.$$

Величина  $P_i$  представляет собой давление идеального бoльцмановского газа ядер с молекулярным весом  $\mu_i = (X + 1/4 Y)^{-1}$  [16], тогда как при вычислении давления электронов  $P_e$  электронный газ рассматривается в общем случае как частично вырожденный и  $P_e$  есть

функция  $\rho$ ,  $\gamma$  и параметра вырождения  $\psi$ , являющегося корнем уравнения [16, 17] .

$$\rho = \frac{4\pi}{h^3} \frac{2m_H}{1+X} (2m_e k T)^{3/2} F_{1/2}(\psi), \quad (7)$$

где  $F_{1/2}(\psi)$  — функция Ферми—Дирака индекса  $1/2$  (в глубоких слоях звезд учитывается возможность релятивистского вырождения).

б) *Внутренняя энергия.* Как известно [17], удельная внутренняя энергия связана с давлением и плотностью посредством соотношения

$$E = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho}, \quad (8)$$

справедливого при любой степени вырождения электронного газа. Выражение для  $E$  несколько усложняется, когда у газа электронов становится заметной роль эффектов СТО. В этом случае

$$E = E_i + E_e,$$

где  $E_i$  — удельная энергия бoльцмановского газа ядер, а в известном выражении для  $E_e$  как функции  $\rho$  и параметров химсостава [17] необходимо исключить удельную энергию покоя электронов

$$m_e c^2 \frac{n_e}{\rho} = \frac{n_e c^2}{2m_H} (1 + X). \quad (9)$$

в) *Ядерные реакции.* В интересующем нас диапазоне температур энерговыделение определяется реакциями горения водорода

$$\varepsilon = \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CNO}, \quad (10)$$

где в известном выражении для величины  $\varepsilon_{pp}$ , соответствующей протон-протонному циклу [10], численный коэффициент увеличен на 12.5%, в соответствии с результатами работы [9], а для поправочного множителя на экранирование  $f_{pp}$  используются результаты развитой в [12] теории эффекта электронного экранирования при термоядерных реакциях:

$$f_{pp} = \exp \left\{ \frac{5 \sqrt{2} e^{5/2}}{4k} \left( \frac{\pi m_e}{h^2 m_H} \right)^{1/4} \frac{\rho^{1/4} (1+X)^{1/4}}{T} \right\}. \quad (11)$$

Мощность энерговыделения по углеродно-азотному циклу  $\varepsilon_{CNO}$  рассчитывалась в соответствии с [10]; для поправочного множителя  $f_N$  имеем [12]

$$f_N = f_{pp}^7. \quad (12)$$

г) *Непрозрачность*. Электронное вырождение существенно изменяет и процесс теплоотвода в белом карлике. Резкое возрастание электронной теплопроводности приводит к тому, что, несмотря на пониженную непрозрачность вырожденного газа, перенос энергии путем теплопроводности становится порядка, а в недрах звезды — много больше лучистого. Для учета роли теплопроводности необходимо обычный коэффициент поглощения  $\kappa_r$ , соответствующий лучистому переносу, заменить эффективным коэффициентом поглощения

$$\kappa = \left( \frac{1}{\kappa_r} + \frac{1}{\kappa_e} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\kappa_e = \frac{16 \sigma T^3}{3\rho\lambda_e}, \quad (14)$$

$\lambda_e$  — теплопроводность электронного газа (теплопроводностью газа ядер можно пренебречь). Значения функции  $\kappa_r = \kappa_r(\rho, T, X_i)$  вычислялись с помощью таблиц Кокса—Стюарта [11] путем двумерной линейной интерполяции  $\lg \kappa_r$  по  $\lg \rho$  и  $\lg T$ . Ввиду того, что  $\kappa_e$  с наступлением вырождения возрастает очень резко, процедура интерполяции для  $\kappa_e$  сопряжена со значительными погрешностями, и потому  $\kappa_e$  определялось непосредственно по (14). Для вычисления  $\lambda_e = \lambda_e(\rho, T, X_i)$  мы использовали зависимости, приведенные в работе [2] и полученные с помощью уравнения Больцмана в приближении парного столкновения.

3. *Граничные условия*. Уравнения (2)—(5) должны быть дополнены граничными условиями. Условия в центре очевидны:

$$r(\xi_0) = 0; \quad l(\xi_0) = 0, \quad (15)$$

где  $\xi_0$  соответствует центру звезды ( $m(\xi_0) = 0$ ). Выбор граничных условий на поверхности определяется тем, что в атмосфере звезды уравнение (5) уже неприменимо и должно быть заменено более сложным. Следовательно, если  $\xi_j$  соответствует поверхности ( $m(\xi_j) = M$ ), то наружные граничные условия для уравнений (2)—(5) должны быть заданы при некотором значении  $\xi_{j-1}$ , соответствующем более глубоким слоям звезды ( $m(\xi_{j-1}) < M$ ), где уже справедливо уравнение (5). При решении системы (2)—(5) релаксационным методом (см. ниже) наружные граничные условия целесообразно задавать в следующем виде [15]:

$$r(\xi_{j-1}) = \varphi_1(R, L); \quad (16)$$

$$l(\xi_{j-1}) = \varphi_2(R, L); \quad (17)$$

$$T(\xi_{j-1}) = \varphi_3(R, L); \quad (18)$$

$$\rho(\xi_{j-1}) = \varphi_4(R, L), \quad (19)$$

где  $R$  и  $L$  — радиус и светимость звезды.  $\xi_{j-1}$  — лагранжева координата, соответствующая оптической глубине, для которой уже справедливо уравнение (5). Точное определение функций  $\varphi_i(R, L)$  является задачей теории звездных атмосфер. При расчете моделей звезд практически наиболее удобным представляется предварительное вычисление значений  $\varphi_i$  в определенных точках плоскости  $(R, L)$  с последующей интерполяцией для получения  $\varphi_i(R, L)$  в нужной точке  $(R, L)$  [15].

Для определения функций  $\varphi_i(R, L)$  мы использовали результаты работы А. Колесова [18] по теории водородных атмосфер белых карликов. Как показано в [18], при достаточно больших  $T_0$  (температура на поверхности звезды) и невысоких  $g$  (ускорение силы тяжести на поверхности) условие гидростатического равновесия с хорошей точностью аппроксимируется более простым уравнением, численное интегрирование которого (при заданном значении  $T_0$ ) позволяет получить модель водородной атмосферы белого карлика в следующем виде:

$$P(\tau) = \sqrt{g} \eta_1(\tau); \quad (20)$$

$$\rho(\tau) = \sqrt{g} \eta_2(\tau); \quad (21)$$

$$T(\tau) = T_* \left[ \frac{3}{4} (q(\tau) + \tau) \right]^{1/4}, \quad (22)$$

где  $\tau$  — средняя оптическая глубина;  $q(\tau)$  — функция Хопфа;  $g = GM/R^2$  — ускорение силы тяжести на поверхности звезды.

Таблицы функций  $\eta_1(\tau)$  и  $\eta_2(\tau)$  при  $\tau = 0 + 10$  получены в [18] для трех значений температуры на поверхности:  $T_0 = 12\,000^\circ$ ;  $15\,000^\circ$ ;  $20\,000^\circ\text{K}$ . Нижняя граница водородной атмосферы, соответствующая  $\tau = 10$ , была выбрана в качестве слоя, в котором задаются граничные условия (16)–(19). Функция  $\varphi_1(R, L)$  получалась следующим образом. За внешнюю поверхность звезды принят слой атмосферы, в котором

$$T(\tau_*) = T_*.$$

С помощью (22) можно получить, что  $\tau_* = 0.64$ . Тогда геометрическая

высота  $H$  атмосферы, как это следует из условия гидростатического равновесия, равна

$$H = \int_0^H dh = \frac{1}{g} \int_{P(\tau_e)}^{P(10.0)} \frac{dP}{\rho} = \frac{R^2}{GM} \int_{P(\tau_e)}^{P(10.0)} \frac{dP}{\rho}. \quad (23)$$

Интеграл в (23) находился численным методом с помощью таблиц для  $\gamma_1(\tau)$  и  $\gamma_2(\tau)$  [18], причем, как видно из (20), (21) значения интеграла зависят только от величины  $T_0$ , однозначно связанной с эффективной температурой  $T_0$ , которая очевидным образом выражается через  $R$ ,  $L$ . Следовательно,  $H = H(R, L)$  и

$$\varphi_1(R, L) = R - H(R, L), \quad (24)$$

где  $H(R, L)$  определяется с помощью соотношения (23).

Поскольку в пределах атмосферы с хорошей точностью  $L = \text{const}$ , то для функции  $\varphi_2(R, L)$ , очевидно, имеем

$$\varphi_2(R, L) = L. \quad (25)$$

Функция  $\varphi_3(R, L)$  тоже имеет достаточно простой вид. Действительно, с помощью (22) и соотношения

$$L = 4\pi R^2 \tau T_0^4$$

получим

$$\varphi_3(R, L) = \left[ \frac{3(q(10.0) + 10.0)}{16\pi\sigma} \right]^{1/4} L^{1/4} R^{-1/2}. \quad (26)$$

Согласно (21), для функции  $\varphi_4(R, L)$ , представляющей собой плотность „на дне“ атмосферы, можем написать

$$\varphi_4(R, L) = (GM)^{1/2} \eta_2(10.0) R^{-1}. \quad (27)$$

Таким образом, функции  $\varphi_2(R, L)$  и  $\varphi_3(R, L)$  оказываются заданными аналитически. Что касается функций  $\varphi_1(R, L)$  и  $\varphi_4(R, L)$ , то, пользуясь величиной  $\int \frac{dP}{\rho}$  и  $\eta_0(10)$  для трех значений  $T_0$  и варьируя  $R$ , можно по (23), (24) и (27) построить на плоскости  $(R, L)$  сеть значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_4$ , по которым с помощью двумерной интерполяции находятся  $\varphi_1(R, L)$  и  $\varphi_4(R, L)$ .

4. *Метод расчета.* Следуя [4], независимую переменную  $\xi$  мы вводим с помощью преобразования

$$\xi = \ln \left( 1.00001 - \frac{M_r}{M} \right), \quad (28)$$

где  $M$  — масса звезды. Поскольку диапазоны изменения  $P$ ,  $\rho$  и  $l$  по объему звезды слишком велики, то вместо этих величин использовались искусственные переменные

$$p \equiv P^{1/4}, \quad q \equiv \rho^{1/3}, \quad F \equiv \frac{l}{\xi^2}. \quad (29)$$

Далее выбиралось некоторое разбиение интервала  $(\xi_0, \xi_J)$ , соответствующее разбиению звезды на  $J$  тонких сферических слоев ( $J = 80 \div 150$ ) и система уравнений структуры звезды заменялась системой из  $4J$  уравнений в конечных разностях [15], представляющей собой (в совокупности с граничными условиями) полную систему уравнений относительно переменных

$$r_0, \dots, r_J, F_0, \dots, F_J, T_0, \dots, T_J, q_0, \dots, q_J, \quad (30)$$

описывающих структуру звезды.

Система уравнений в конечных разностях решалась релаксационным методом Хеннея [15]. Все необходимые вычисления выполнялись с помощью ЭВМ „Минск-22“. Расчет очередной модели начинается с выбора шага по времени  $\Delta t$ , определяющего увеличение массы звезды  $\Delta M = \dot{M} \Delta t$  (по сравнению с предыдущей моделью), где  $\dot{M}$  — скорость аккреции. Программа расчета была построена таким образом, что модель звезды (30) на каждом этапе эволюции вычислялась путем итераций, причем очередное приближение считалось окончательным, когда максимальная величина относительных поправок к значениям переменных (30) оказывалась не превосходящей значения  $\varepsilon_{\max} = 10^{-4}$ .

5. *Начальная модель.* Особая ситуация возникает при построении начальной модели, так как описанный выше алгоритм предполагает известной предшествующую модель звезды. Исключение представляет собой химический состав недр звезды, поскольку рассматриваемый в данной работе белый карлик имеет весьма простую историю (тривиальное остывание гомогенной звезды). Еще одно существенное упрощение связано с тем, что химический состав возникающей в момент  $t = 0$  у белого карлика водородной оболочки тоже

можно считать неизменным на протяжении расчетов (см. выше). Таким образом, звезда представляется состоящей из двух гомогенных частей: „ядра“ (1) и „оболочки“ (2), в качестве химического состава которых мы выбрали, соответственно, смеси CSMIX X и CSMIX VI [11]:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.000; & Y_1 &= 0.996; & Z_1 &= 0.004; \\ X_2 &= 0.996; & Y_2 &= 0.000; & Z_2 &= 0.004. \end{aligned} \quad (31)$$

Трудности при вычислении остальных величин связаны с тем, что в начале расчетов совершенно отсутствует информация о величинах  $\partial E/\partial t$  и  $\partial/\partial t(1/\rho)$  в уравнении (4); с другой стороны, поскольку в этот момент  $\varepsilon \equiv 0$ , аппроксимация  $\partial E/\partial t = \partial/\partial t(1/\rho) \cong 0$  совершенно непригодна. Остроумный способ получения начальной модели белого карлика, использованный в работе [4], состоит в том, что вычисления начинают со стационарной гелиевой звезды ( $\varepsilon \neq 0$ ) и затем от модели к модели формально „выключают“ реакции горения гелия. В результате такой фиктивной „эволюции“ звезда охлаждается к состоянию белого карлика, которое может быть использовано в качестве начального при дальнейших расчетах [4]. Одна из серии полученных таким путем в [4] гомогенных моделей (модель № 26 — см., [4], стр. 49) с „возрастом“  $t = 1.43 \cdot 10^8$  лет (считая от момента полного выключения горения He) была взята нами за основу при построении начальной модели в данной работе. Приведенная в [4] таблица недостаточно „подробна“, и число слоев было увеличено (примерно в 6 раз) путем кубичной интерполяции. Кроме того, граничные условия на поверхности звезды предполагают наличие атмосферы из чистого водорода (см. выше), поэтому к звезде с помощью соотношений (16)—(19) была „пришита“ соответствующая водородная атмосфера. Масса атмосферы, величину которой можно оценить, зная давление  $P$  на уровне  $\tau = 10.0$  (см. (20)), составляет ничтожную долю от массы звезды ( $\leq 10^{-16}$ ), поэтому для всех рассчитываемых далее моделей было принято  $\xi_{j-1} = \xi_j$ . С целью устранения погрешностей, внесенных при интерполяции и т. д., было проведено „сглаживание“ такой модели, состоящее в том, что описанным в разделе 4 методом, но при  $\Delta M = 0$  было сделано 5 шагов по времени—общей длительностью  $6.3 \cdot 10^7$  лет. Полученная таким образом слегка „остывшая“ модель была, наконец, принята в качестве начальной. Эта модель имеет следующие основные параметры:

$$\begin{aligned} M &= 0.5 M_{\odot}; & L &= 1.0337 \cdot 10^{32} \text{ эрг/сек}; \\ \lg T_* &= 4.2805; & R &= 1.0580 \cdot 10^9 \text{ см} \end{aligned} \quad (32)$$

и отличается от приведенной в [4] модели несколько более высокой плотностью и более низкой температурой в центре.

Несмотря на то, что масса водородной оболочки у модели (32) весьма мала, введение атмосферы из водорода устраняет возможность возникновения вблизи поверхности звезды конвективной зоны, обусловленной неполной ионизацией He. Температура „под атмосферой“ уже такова, что можно считать гелий полностью ионизованным. Это позволяет максимально упростить вычисление адиабатического градиента, т. е. принять

$$\nabla_{ad} \cong 0.4. \quad (33)$$

Дополнительным аргументом в пользу (33) является тот факт, что в горячих звездах главной последовательности неполная ионизация He вообще не приводит к конвекции, а конвективная зона неполной ионизации HeII совсем незначительна [19].

6. *Результаты расчетов.* Ниже приводятся результаты расчетов эволюции белого карлика с начальной массой  $M_0 = 0.5 M_{\odot}$  на стадии квазистатической аккреции водорода. Основная серия из 84 моделей была получена в предположении, что скорость прироста водородной оболочки постоянна и равна

$$\dot{M} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}. \quad (34)$$

Основные параметры полученных моделей, в том числе и возраст  $t$ , отсчитанный от момента начала аккреции  $t = 0$ , сведены в табл. 1 ( $T_H$ ,  $\rho_H$  и  $\psi_H$  — соответственно, температура, плотность и параметр вырождения в самой нижней части водородной оболочки).

Как видно из табл. 1, расчеты охватывают период  $T \sim 0.8 \cdot 10^8$  лет, ничтожный по сравнению со временем  $\tau$  охлаждения звезды в целом ( $\sim 10^8$  лет). С другой стороны, согласно (34), полное изменение массы звезды за время  $T$  составляет  $\Delta M \approx 0.8 \cdot 10^{-3} M_{\odot} \ll M_0$ . Поэтому возмущения в структуре глубоких недр звезды оказываются весьма незначительными. Например, изменения плотности и температуры в центре на протяжении расчетов составляют всего

$$\frac{\Delta \rho_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}} \sim 1\%. \quad \frac{\Delta T_{\text{ц}}}{T_{\text{ц}}} \sim 0.1\%.$$

Это отнюдь не относится к внешним слоям звезды, которые и являются далее основным объектом наших исследований.

а) *Формирование слоевого энергоисточника.* Аккреция приводит к значительному росту размеров белого карлика. Общее увеличение радиуса  $R$  звезды (к концу расчетов) составляет  $\approx 55\%$  по сравнению с начальной моделью, или  $\approx 35\%$  по сравнению с моделью I.

Таблица 1

| № модель | $t \cdot 10^{-6}$ (лет) | $M/M_{\odot}$ | $\lg T_H$ | $\lg \rho_H$ | $\psi_H$ | $L \cdot 10^{-31}$ | $\lg T_c$ |
|----------|-------------------------|---------------|-----------|--------------|----------|--------------------|-----------|
| 0        | 0                       | 0.5000000     | 4.5040    | -6.3227      | —        | 10.337             | 4.2805    |
| 1        | 0.10                    | 0.5001000     | 7.0395    | +2.5053      | 0.468    | 12.739             | 4.2643    |
| 3        | 0.30                    | 0.5003000     | 7.1348    | 2.9738       | 1.630    | 30.074             | 4.3524    |
| 22       | 0.49940                 | 0.5004994     | 7.2060    | 3.1419       | 1.887    | 67.472             | 4.4332    |
| 31       | 0.59940                 | 0.5005994     | 7.2470    | 3.1853       | 1.809    | 92.820             | 4.4584    |
| 32       | 0.60940                 | 0.5006094     | 7.2515    | 3.1884       | 1.794    | 95.933             | 4.4607    |
| 50       | 0.73690                 | 0.5007369     | 7.3135    | 3.2124       | 1.512    | 201.940            | 4.5144    |
| 63       | 0.80590                 | 0.5008059     | 7.3921    | 3.1777       | 0.945    | 346.530            | 4.5706    |
| 69       | 0.81130                 | 0.5008113     | 7.4342    | 3.1382       | 0.600    | 488.511            | 4.5945    |
| 76       | 0.812380                | 0.5008124     | 7.4837    | 3.0891       | 0.213    | 527.815            | 4.6085    |
| 79       | 0.812585                | 0.5008124     | 7.5060    | 3.0671       | 0.049    | 509.875            | 4.6079    |
| 82       | 0.812665                | 0.5008124     | 7.5365    | 3.0368       | -0.169   | 496.536            | 4.6065    |
| 84       | 0.812698                | 0.5008124     | 7.4748    | 2.9981       | -0.439   | 489.194            | 4.6052    |

Однако во внутренних слоях звезды изменения  $r$  не столь значительны и, более того, уже на небольшом удалении от поверхности  $dr/dt < 0$ . Очевидное объяснение этого состоит в том, что вещество звезды сжимается под действием веса присоединяемого водорода ( $dp/dt > 0$ ). Эффект сжатия, совершенно ничтожный в центральных областях, особенно заметен на периферии, и это определяет ход дальнейшей эволюции. На рис. 1, иллюстрирующем изменение со временем радиуса  $r_H$  нижней границы водородной оболочки, видно, что уже на первых этапах аккреции граница He—H быстро перемещается вглубь — в область более высоких  $\rho$  и  $T$ . На рис. 2 представлено распределение температуры во внешней части звезды на различных стадиях эволюции (цифры указывают номер модели, вертикальной чертой отмечено местоположение границы He—H). Как видно из рис. 1 и 2, растущая водородная оболочка играет роль „поршня“, приводящего к сжатию и нагреву внешних слоев белого карлика. В результате такого процесса недр звезды ( $M_r/M \lesssim 0.995$ ) становятся все более изотермичными, а зависимость  $T(M_r/M)$  вскоре перестает быть монотонной (см. рис. 2). Максимум в распределении температуры, возникающий в модели 32 ( $t = 0.6094 \cdot 10^6$  лет) при  $(M_r/M)_m = 0.9988709$  ( $\lg T_m = 7.2515$ ,  $\lg \rho_m =$

$\approx 3.1884$ ,  $\psi_m = 1.794$ ), располагается несколько выше нижней границы водорода  $(M_r/M)'_H = 0.9988318$ .

Для исследования эволюции внешних слоев белого карлика удобно рассматривать зависимость  $T_H(\rho_H)$ , представленную на рис. 3 ( $T_H$  и  $\rho_H$  — температура и плотность на „дне“ водородной оболочки); цифры указывают номер модели (см. табл. 1). Пунктирная кривая на рис. 3 соответствует результатам, полученным в работе [4]. Нетрудно видеть, что между моделями 3 и 31 сжатие вещества вблизи границы He—H является квазиadiaбатическим: действительно, наклон соответствующей части кривой  $T_H(\rho_H)$  весьма близок к характерному для адиабаты значению  $((\partial \ln T)/(\partial \ln \rho))_{ad} = \gamma - 1 = 0.67$  (см. рис. 3). Об-

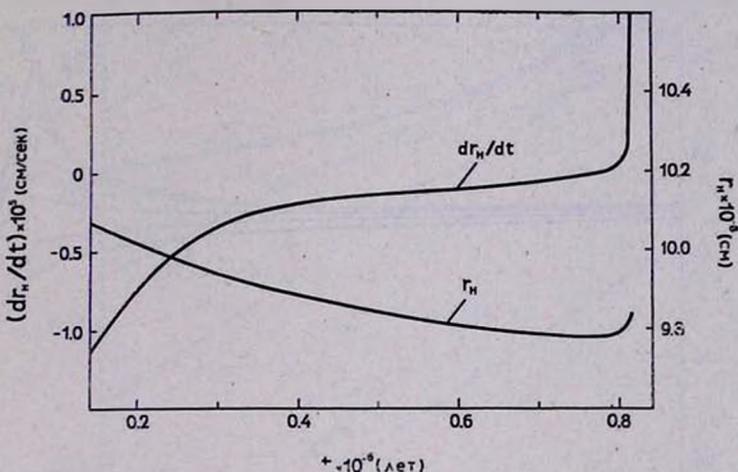


Рис. 1. Изменение со временем радиуса ( $r_H$ ) и скорости перемещения ( $dr_H/dt$ ) нижней границы водородной оболочки.

разование температурного максимума приводит к тому, что наряду с обычным потоком энергии к поверхности ( $L_r > 0$ ) возникает поток энергии в недра звезды ( $L_r < 0$ ). Однако решающую роль на данном этапе эволюции играет то обстоятельство, что существенный рост температуры имеет место в области с незначительным уже вырождением ( $\psi \lesssim 2$ ), где электронная теплопроводность еще не настолько велика, чтобы воспрепятствовать дальнейшему повышению температуры. Хотя по мере опускания водорода в глубь звезды влияние теплопроводности электронами становится все более заметным, как видно из рис. 2, температурный максимум постепенно смещается от границы He—H в сторону менее вырожденных слоев — достигнутая

температура оказывается все же достаточной для зажигания термоядерных реакций в нижней части водородной оболочки.

Резкое увеличение энерговыделения в втой части звезды приводит к еще более крутому росту  $T_H$  на рис. 3, и нагрев приобретает ускоренный характер. Область интенсивного энерговыделения весьма узка — ее „полуширина“ (по  $\epsilon$ ) в модели 32 составляет около 1% от радиуса и менее 0.05% от массы звезды — и, как видно из рис. 2, имеет тенденцию к еще большей локализации в последующих моделях. Таким образом, вскоре после образования максимума в распределении температуры можно говорить о возникновении слоевого источника энергии, расположенного в нижней части водородной оболочки и соответствующего  $\rho \sim 10^3$  г/см<sup>3</sup>. Максимум температуры и

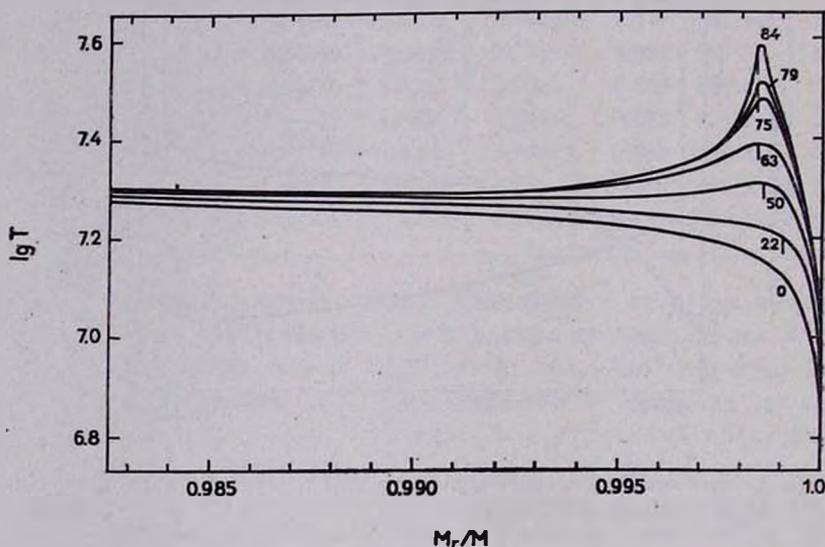


Рис. 2. Распределение температуры во внешних слоях белого карлика на различных стадиях эволюции. Цифры указывают номер модели. Вертикальным штрихом отмечена граница He—H.

энерговыделения находится в непосредственной близости от границы He—H (см. рис. 2), так что используемые нами значения температуры  $T_H$  и плотности  $\rho_H$  в самом нижнем слое водорода довольно точно характеризуют физические условия в слоевом энергоисточнике.

б) *Термическая неустойчивость во внешних слоях белого карлика.* Как известно [4, 20], характер тепловой неустойчивости в слоевом источнике энергии зависит от степени вырождения вещества.

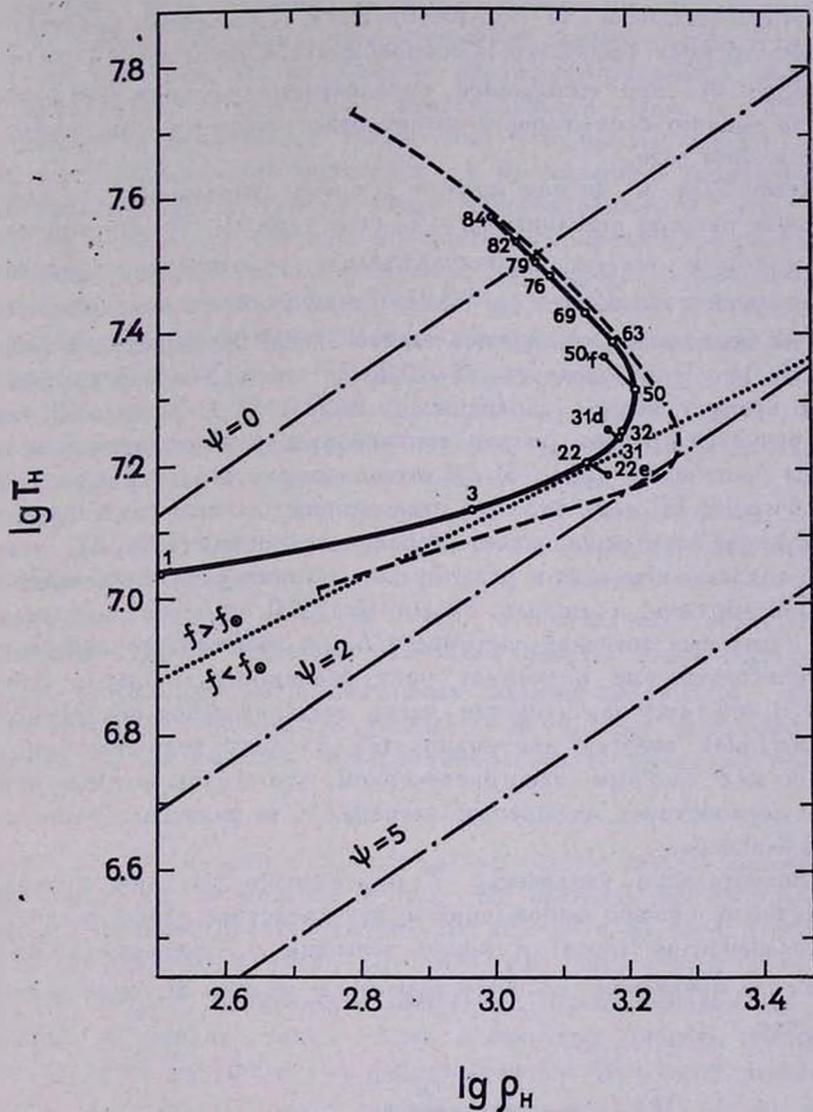


Рис. 3. Зависимость температуры ( $T_H$ ) от плотности ( $\rho_H$ ) для нижней границы водородной оболочки. Цифрами отмечены номера моделей. Штрих-пунктиром указаны линии уровня параметра вырождения  $\psi$ . Пунктирная кривая соответствует результатам работы [4].

В предельном случае сильного вырождения имеет место неустойчивость типа „вспышки“ ( $\dot{T} > 0$ ,  $\rho \approx 0$ ). Если вырождение недостаточно сильное, то рост температуры сопровождается уменьшением плотности ( $\dot{T} > 0$ ,  $\rho < 0$ ); при выполнении определенных условий [20] неустойчивость тонкого слоя горения может развиваться и в совершенно невырожденном газе.

Поскольку в данном случае степень вырождения в слоевом источнике энергии невелика,  $\psi_H < 2$ , (см. табл. 1), то неустойчивость типа вспышки весьма непродолжительна — плотность  $\rho_H$  достигает максимального значения  $\lg \rho_H = 3.2131$  и сохраняется таковой (с точностью до нескольких единиц последнего знака) примерно для моделей 50 ÷ 57, что соответствует  $\Delta t \approx 0.25 \cdot 10^8$  лет. Условно „вспышкой“ можно назвать период эволюции от модели 31 до модели 63, характеризующийся крутым ростом температуры и незначительным изменением плотности (рис. 3). Длительность этого периода составляет  $\Delta t \approx 0.2 \cdot 10^8$  лет, что в 3 раза меньше длительности всей предшествующей эволюции после начала аккреции (табл. 1), тем не менее вспышка приводит к резкому возрастанию энерговыделения — от  $\epsilon \approx 1500$  эрг/г.сек в модели 31 до  $\epsilon \approx 15000$  эрг/г.сек в модели 63. Рост локальных значений светимости  $L_r$  на внешней стороне слоевого энергоисточника уже опережает рост светимости звезды  $L$ . Это говорит о том, что значительная часть выделяющейся при термоядерных реакциях энергии аккумулируется в слоях вещества непосредственно над слоевым энергоисточником, что в свою очередь чрезвычайно способствует ускорению нагрева, т. е. развитию термической неустойчивости.

Значительное увеличение  $T$  при условии  $\rho \approx \text{const}$  приводит к дальнейшему снятию вырождения и, как следствие этого, расширению разогревающихся слоев: к концу вспышки  $\psi_H$  уменьшается почти в 2 раза по сравнению со значением  $\psi_H$  в модели 31, причем за счет того, что

$$\rho_H < 0$$

движение изображающей звезду точки  $(\rho_H, T_H)$  на рис. 3 как раз способствует наибо́льшему падению  $\psi_H$  („трек“ на рис. 3 становится перпендикулярным линиям  $\psi = \text{const}$ ). Однако с началом расширения оболочки рост температуры  $T_H$  не только приостанавливается, а, напротив, становится еще более ускоренным (табл. 1). Таким образом, вслед за авторами работы [4] мы можем сделать вывод, что вспышка имеет своим непосредственным продолжением неустой-

чивость 2-го типа (см. выше), впервые изученную Шварцшильдом и Хармом [20]. Возникновению такой неустойчивости способствует небольшая ширина возникающего при вспышке слоевого энергоисточника; интересно отметить, что дальнейшая эволюция приводит к еще большей локализации термической неустойчивости (рис. 2). Развитие неустойчивости облегчается также тем, что при  $\lg T > 7.3$  главная роль в энерговыделении переходит от  $pp$ -реакций к реакциям углеродно-азотного цикла, гораздо более чувствительным к росту температуры и в большей степени подверженным эффекту экранирования [12]. Кроме того, снятие вырождения, приводящее к расширению и тем самым несколько „демпфирующее“ неустойчивость, косвенно все же способствует развитию теплового взрыва, поскольку падение электронной теплопроводности уменьшает роль теплоотвода  $L_r^-$  в недра звезды. Характерно, что температурный максимум (рис. 2), первоначально смещающийся в сторону меньших плотностей, в дальнейшем вновь приближается к границе водорода с гелием.

Важнейшая особенность развивающегося теплового взрыва состоит в том, что скорость энерговыделения в слое горения водорода систематически превышает теплоотвод, в том числе по направлению к поверхности звезды, несмотря на то, что локальная светимость  $L_r^+$  на внешней стороне слоевого источника энергии очень быстро возрастает: в последней из рассчитанных моделей величина  $L_r^+$  почти в 20 раз превышает светимость звезды  $L$ . Вследствие этого рост температуры  $T_H$  чрезвычайно быстро ускоряется со временем: величина

$$\tau = T_H / \dot{T}_H$$

меняется от  $\tau \approx 10^6$  лет в модели 31 до  $\tau \approx 10^5$  лет в модели 63 и равна  $\tau \approx 250$  лет в модели 84 (шаг по времени для этих моделей выбирался равным, соответственно,  $10^6$ ;  $0.5 \cdot 10^4$  и 13 лет). Начиная с модели 75, шаг по времени  $\Delta t < 100$  лет, так что в силу (34)  $\Delta M < 10^{-7} M_\odot$ , и поскольку вычисления производились на ЭВМ „Минск-22“ (разрядная сетка — семь десятичных знаков), то расчет моделей 75÷84 выполнялся в предположении  $M = \text{const}$ . Сравнение моделей для  $\Delta t \geq 100$  лет, рассчитанных при  $\Delta M = \dot{M} \cdot \Delta t$  и при  $\Delta M = 0$ , показывает, что такое формальное „выключение“ аккреции на последней стадии вычислений не сказывается, по-видимому, на точности расчетов теплового взрыва в нижней части водородной оболочки.

Вследствие ускоренности нагрева во времени среднее значение энерговыделения  $\epsilon$  в слое горения водорода оказывается весьма небольшим, так как, несмотря на то, что в конце расчетов  $\epsilon$  достигает

величин  $\sim 10^7$  эрг/г·сек, в подавляющей части полного времени эволюции значения  $\epsilon$  невысоки. Это ведет, во-первых, к тому, что средняя величина потока энергии в недра звезды тоже незначительна и, как уже было отмечено, тепловой взрыв на поверхности ядра белого карлика индуцирует в его недрах лишь малые возмущения. Во-вторых, малость  $\epsilon$  означает, что можно пренебречь выгоранием водорода в слоевом энергоисточнике и считать химический состав не зависящим от времени — как и было принято нами при расчетах.

Рассмотрим подробнее перемещения границы He—H. Как видно из рис. 1, на котором представлены в зависимости от времени радиус  $r_H$  и скорость  $dr_H/dt$  нижней [границы H-оболочки, начальные стадии аккреции сопровождаются довольно быстрым движением водорода к центру белого карлика — скорость  $dr_H/dt < 0$  и медленно падает со временем от  $\approx -1 \cdot 10^{-5}$  см/сек в моделях 1 и 2 до  $\approx -1 \cdot 10^{-6}$  см/сек в модели 50. Далее  $r_H$  достигает минимального значения, скорость  $dr_H/dt \approx 0$  в модели 55 и развитие неустойчивости 2-го типа ( $\rho < 0$ ) сопровождается ускоренным расширением, не успевающим, правда, значительно увеличить  $r_H$  (рис. 1).

Причиной, по которой вычисления были приостановлены на модели 84, оказалось не возрастание роли динамических эффектов (как предполагалось до начала расчетов), а трудности численного характера, связанные с ростом погрешностей округления при вычислении членов вида  $\partial E/\partial t$  и  $\partial/\partial t(1/\rho)$  в уравнении (4).

Вследствие резкого возрастания температуры вблизи границы He—H температурный градиент в оболочке звезды на последних стадиях расчета весьма велик, и, начиная с модели 76, над слоевым источником энергии возникает зона конвективного равновесия, которая увеличивается в размерах от модели к модели, захватывая все более удаленные от центра части звезды.

Как видно из табл. 1, аккреция водорода приводит к весьма ощутимому росту светимости  $L$  и эффективной температуры белого карлика, максимальное изменение которых в процессе расчета составляет

$$\Delta \lg L \cong 1.71; \quad \Delta \lg T_e \cong 0.328,$$

что значительно превосходит соответствующие значения 0.945 и 0.203, полученные для аналогичного случая в работе [4]. Небольшое уменьшение  $L$  и  $T_e$  на самых последних стадиях расчета (после модели 76), характерное и для моделей Джинноне и Вейгерта [4], можно отнести

за счет некоторой некорректности вблизи поверхности звезды аппроксимации  $\Delta M = 0$ , используемой при малых  $\Delta t$ .

Отметим, что значительное увеличение радиуса звезды в процессе аккреции—отношение  $(\Delta \ln R)/(\Delta \ln M)$  у нас составляет  $\approx 205$  (считая от модели 1), в отличие от  $\approx 100$  в работе [4]—можно сопоставить с наблюдательными данными: как известно, для Сириуса В наблюдения дают для  $R$  величины, почти вдвое превышающие теоретическое (чандрасекаровское) значение [21].

в) Эволюция при  $\dot{M} \neq \text{const}$ . Описанные выше результаты получены при условии  $\dot{M} = \text{const}$ , выбор которого продиктован прежде всего соображениями простоты. При  $\dot{M} \neq \text{const}$  расчет по той же схеме не вызывает никаких принципиальных затруднений, однако в настоящее время трудно отдать предпочтение какой-либо конкретной зависимости  $\dot{M}(t)$ . Можно предполагать, что функция  $\dot{M}(t)$  должна быть убывающей. Наиболее простым образом это может быть смоделировано „выключением“ аккреции с какого-либо момента времени и исследованием дальнейшей эволюции звезды с  $\dot{M} = \text{const}$ .

Результаты расчета таких дополнительных ветвей эволюции, имеющих началом модели 22, 31 и 50, представлены в таблицах 2—4.

Таблица 2

| № модели | $t \cdot 10^{-6}$ (лет) | $M/M_{\odot}$ | $\lg T_H$ | $\lg \rho_H$ | $\psi_H$ | $\lg T_e$ |
|----------|-------------------------|---------------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 22       | 0.4994+0                | 0.5004994     | 7.2060    | 3.1419       | 1.887    | 4.4332    |
| 22a      | + 0.25                  | „             | 7.2027    | 3.1453       | 1.923    | 4.4005    |
| 22b      | + 2.25                  | „             | 7.2017    | 3.1463       | 1.935    | 4.3961    |
| 22c      | +10.00                  | „             | 7.2007    | 3.1488       | 1.952    | 4.3846    |
| 22d      | +12.00                  | „             | 7.2003    | 3.1494       | 1.957    | 4.3842    |
| 22e      | +20.00                  | „             | 7.1999    | 3.1534       | 1.982    | 4.3829    |

Как видно из табл. 4 и рис. 3, эволюция звезды в ветви 50—50f приводит к дальнейшему увеличению интенсивности слоевого энерго-источника и развитию тепловой неустойчивости (правда, со значительно меньшей скоростью, чем при расчетах с  $\dot{M}'_1 = 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ ). В случае 31—31d первоначальный рост  $T_H$  настолько замедляется (см. табл. 3), что можно сделать вывод об исчезновении термической неустойчивости и установлении стационарного состояния (отметим, что образование температурного максимума во внешней части звезды происходит между моделями 31 и 50—в модели 32).

Что касается моделей 22—22е, то, как видно из табл. 2, на этом пути звезда просто охлаждается — правда, весьма медленно, так что и здесь можно говорить о достижении некоторого стационарного состояния.

Таблица 3

| № модели | $t \cdot 10^{-6}$ (лет) | $M/M_{\odot}$ | $\lg T_H$ | $\lg \rho_H$ | $\psi_H$ | $\lg T_e$ |
|----------|-------------------------|---------------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 31       | 0.5994 + 0              | 0.5005994     | 7.2470    | 3.1853       | 1.809    | 4.4584    |
| 31a      | " + 1.00                | "             | 7.2566    | 3.1769       | 1.714    | 4.4413    |
| 31b      | " + 3.00                | "             | 7.2588    | 3.1748       | 1.692    | 4.4433    |
| 31c      | " + 10.00               | "             | 7.2594    | 3.1750       | 1.689    | 4.4440    |
| 31d      | " + 12.00               | "             | 7.2594    | 3.1753       | 1.690    | 4.4440    |

Расчеты в дополнительных ветвях эволюции были приостановлены ввиду того, что при больших величинах  $t$  (см. табл. 2—4) химический состав уже нельзя считать постоянным, учет же этого сопряжен с коренной перестройкой программы расчета на ЭВМ. Тем

Таблица 4

| № модели | $t \cdot 10^{-6}$ (лет) | $M/M_{\odot}$ | $\lg T_H$ | $\lg \rho_H$ | $\psi_H$ | $\lg T_e$ |
|----------|-------------------------|---------------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 50       | 0.7369 + 0              | 0.5007369     | 8.3135    | 3.2124       | 1.512    | 4.5144    |
| 50a      | " + 0.0800              | "             | 7.3286    | 3.1989       | 1.370    | 4.5144    |
| 50b      | " + 0.2021              | "             | 7.3427    | 3.1855       | 1.240    | 4.5394    |
| 50c      | " + 0.2521              | "             | 7.3470    | 3.1809       | 1.199    | 4.5439    |
| 50d      | " + 0.3521              | "             | 7.3566    | 3.1709       | 1.110    | 4.5527    |
| 50e      | " + 0.4000              | "             | 7.3621    | 3.1652       | 1.060    | 4.5568    |
| 50f      | " + 0.4300              | "             | 7.3665    | 3.1605       | 1.020    | 4.5594    |

не менее полученные результаты позволяют нам заключить, что для рассмотренного гелиевого белого карлика ( $M = 0.5 M_{\odot}$ ,  $L = 1.0337 \cdot 10^{32}$  эрг/сек,  $\lg T_e = 4.2805$ ) возникновение термически нестабильного слоя горения водорода возможно лишь при условии, что масса накопленной в результате аккреции оболочки во всяком случае превышает „критическое“ значение

$$(M_H)_{кр} = 0.6 \cdot 10^{-3} M_{\odot},$$

соответствующее, примерно, модели 31 (см. рис. 3 и табл. 1).

Автор выражает глубокую благодарность В. В. Порфирьеву за интерес к работе и за полезные замечания, сделанные при обсуждении полученных результатов.

Главная астрономическая обсерватория  
АН УССР

## THE EVOLUTION OF WHITE DWARF WITH ACCRETION OF HYDROGEN RICH MATTER. I.

Yu. O. REDKOBORODY

An evolutionary sequence was calculated for a white dwarf on which a hydrogen rich envelope is assumed to increase with time. The stellar models have been computed by integrating numerically the system of stellar structure equations by means of the Henyey method. An accretion of matter was assumed to be quasistatic. Near the point of the chemical discontinuity a temperature maximum is shown to be built up, after hydrogen is ignited a thin shell energy source is formed. The new shell source is thermally unstable. The resulting thermal runaway was followed numerically. The burning of the hydrogen is shown to become unstable when the mass of the hydrogen envelope exceeds some critical value.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. Ledoux, E. Sauventer-Goffin, Ap. J., 111, 611, 1950.
2. T. D. Lee, Ap. J., 111, 625, 1950.
3. L. Mestel, M.N., 112, 583, 1952.
4. P. Giannone, A. Weigert, Z. Astrophys., 67, 41, 1967.
5. W. K. Rose, Ap. J., 152, 245, 1968.
6. W. C. Saslow, M.N., 138, 337, 1968.
7. S. Hayakawa, D. Sugimoto, Astrophys. Space Sci., 1, No. 2, 1968.
8. L. Sacco, Pubbl. Oss. Astr. Padova, No. 145, 1968.
9. J. N. Bahcall, R. M. May, Ap. J., 152, No. 1, L. 17, 1968.
10. Landolt-Börnstein, Num. data and functional relations in sci. and techn., New series, I, Springer-Verlag, 1965.
11. А. Н. Кокко, Дж. Н. Стюарт, Научн. информ. АС АН СССР, вып. 15, М., 1969.
12. В. В. Порфирьев, Ю. Н. Редкобородый, Астрофизика, 5, 393, 1969.
13. E. Salpeter, Austr. J. Phys., 7, 373, 1954.
14. J. Baerentzen, Ap. J., 151, No. 3, Part 2, 1968.
15. L. G. Henyey, J. E. Forbes, N. L. Gould, Ap. J., 139, No. 1, 1964.
16. М. Шварцшильд, Строение и эволюция звезд, ИЛ, М., 1967.
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Наука, М., 1964.

18. *A. K. Колесов*, *Астрон. ж.*, 41, 2, 1964.
19. *В. Г. Горбачкий*, *A. K. Колесов*, *Астрофизика*, 2, стр. 273, 1966.
20. *M. Schwarzschild*, *R. Härm*, *Ap. J.*, 142, 855, 1965.
21. *L. Mestel*, *Stellar Structure*, ed. by *L. H. Aller* and *D. B. McLaughlin*, University of Chicago Press, 1965, p. 298.