АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 НОЯБРЬ, 1971 ВЫПУСК 4

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ. I. ИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 26 января 1971
Пересмотрена 9 июня 1971

Рассматривается линейная задача переноса излучения в спектральной линии в плоскопараллельном слое конечной толщины, при общих предположениях о функции перераспределения по частотам, не зависящей от угла рассеяния. Решение полученной системы интегральных уравнений сводится к решению некоторых функциональных уравнений вольтерровского типа. Некоторые вычисления проведены в случае допплеровского уширения линии.

Как известно, при рассмотрении задач переноса излучения в спектральных линиях необходимо учесть перераспределение по частотам при элементарном акте рассеяния. Вопрос о перераспределении по частотам при учете различных физических причин, приводящих к некогерентности рассеяния, являлся предметом многочисленных исследований. Однако математические трудности, возникающие при рассмотрении задач переноса при некогерентном рассеянии, заставляли прибегать к тем или иным упрощающим предположениям о функции перераспределения по частотам. В данное время общепринятым является предположение о полностью некогерентном рассеянии* (B), дающее относительно хорошее приближение к истинному закону перераспределения при достаточно большой плотности атомов [1]. Однако часто оно становится неудовлетворительным. Предположение же о когерентности акта рассеяния (A) при решении задач переноса в спектральных линиях в настоящее время делается редко, в основном при рассмотрении нелинейных задач полихроматического рассеяния.

* Мы будем пользоваться обозначениями и терминологией, приведенными в [1], гл. VIII.

Предположения A и B являются противоположными в том отношении, что коэффициент линейной корреляции между частотами поглощенного и переизлученного квантов равен 1 и 0 соответственно.

Целью настоящей работы, состоящей из серии статей, является рассмотрение задачи переноса резонансного излучения в плоскопараллельном слое, при более общих предположениях о виде функции перераспределения по частотам при элементарном акте рассеяния.

В основе исследований, проведенных в данной статье, лежит следующее представление функции перераспределения по частотам $\beta(x', x)$:

$$\beta(x', x) \approx \beta_n(x', x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x') \alpha_k(x), \tag{D}$$

функции $\alpha_k(x)$ предполагаются линейно-независимыми на любом интервале.

При A и B соответственно имеем

$$\beta(x', x) = \alpha(x') \delta(x' - x) \tag{A}$$

$$\delta(x', x) = A \alpha(x') \alpha(x), \tag{B}$$

где $\alpha(x)$ — контур коэффициента поглощения, $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu$ — безразмерная частота.

При предположении D, как и при A и B, распределение по частотам переизлученных квантов считается не зависящим от угла рассеяния.

Метод, примененный для решения задачи, опирается на математическую реализацию применения принципа инвариантности Амбарцумяна и позволяет свести решение задачи к некоторым функциональным уравнениям, легко решаемым численно.

Последующие статьи данной серии, выполненные совместно с А. Г. Никогосяном, посвящены рассмотрению задачи некогерентного рассеяния, с учетом зависимости функции перераспределения от угла рассеяния и несферичности индикатрисы рассеяния, в конечной и полубесконечной средах. Рассмотрен также случай оптически толстой среды. Приведены результаты численного решения функциональных уравнений, полученных в настоящей и последующих статьях с указанием методики решения. Намечается рассмотреть задачу Шустера об образовании спектральных линий, а также задачу диффузного отражения и прохождения. В качестве применения решений в случае полубесконечной среды будет рассмотрена задача об образовании линий в изотермической атмосфере (задача Эддингтона).

1. *Перенос резонансного излучения в плоскопараллельном слое конечной толщины.* Пусть плоскопараллельный слой состоит из двухуровенных атомов. Оптические свойства среды описываются набором величин τ_0; λ; $\alpha(x)$; $\beta(x', x)$; причем $\tau_0 < \infty$ представляет собой оптическую толщину слоя в центре спектральной линии, λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рессеяния. Индикатриса рассеяния предполагается сферической.

Следуя вероятностному методу В. В. Соболева, введем форму $P(\tau, \eta, x', x)\,dx d\eta$, представляющую собой вероятность того, что квант, имеющий при поглощении на оптической глубине τ (в центре линии) частоту x', после ряда рассеяний выйдет из границы $\tau = \tau_0$ слоя в виде кванта с частотой, заключенной между x и $x + dx$, под некоторым углом к нормали, косинус которого лежит между η и $\eta + d\eta$.

Функция $P(\tau, \eta, x', x)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$P(\tau, \eta, x', x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}\alpha(x)} g(x', x) + \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x', x'')\,\alpha(x'')\,dx'' \int_0^{\tau_0} E_i[\alpha(x'')\,|\tau - \tau'|]\,P(\tau', \eta, x'', x)\,d\tau'; \tag{1}$$

где $g(x', x) = \dfrac{1}{\alpha(x')}\beta(x', x)$.

При предположении, что перераспределение происходит по закону D, вместо (1) будем иметь

$$\alpha(x')\,P(\tau, \eta, x', x)\,e^{\frac{\tau_0}{\eta}\alpha(x)} = \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x')\,Q_k(\tau, \eta, x), \tag{2}$$

где введено обозначение

$$Q_m(\tau, \eta, x) = \alpha_m(x) e^{\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)} + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x'')\,dx'' \int_0^{\tau_0} E_i[\alpha(x'')\,|\tau - \tau'|]\,[\alpha(x'')\,e^{\frac{\tau_0}{\eta}\alpha(x)}\,P(\tau', \eta, x'', x)]\,d\tau'. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получается следующая система интегральных уравнений для определения функций $Q_m(\tau, \eta, x)$:

$$Q_m(\tau, \eta, x) = \alpha_m(x) e^{-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)} + \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau-\tau'|)\, Q_k(\tau', \eta, x)\, d\tau'; \tag{4}$$

$$m = 1, \ldots, n.$$

Элементы матрицы $\| K_{mk} \|$ имеют вид

$$K_{mk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_k(x)\,\alpha_m(x)\, E_1[\alpha(x)\tau]\, dx = \int_0^{\infty} G_{mk}(s)\, e^{-\tau s}\, ds, \tag{5}$$

где

$$G_{mk}(s) = \frac{1}{s}\int_{x(s)}^{\infty} [\alpha_m(x)\,\alpha_k(x) + \alpha_m(-x)\,\alpha_k(-x)]\, dx \tag{6}$$

$x(s) = 0$ при $s \geqslant 1$; $\alpha[x(s)] = s$ при $s < 1$; $x(s) \geqslant 0$.

Отметим, что достаточно полное исследование систем вида

$$\chi_p(x) - \sum_{q=1}^{n}\int_0^{\infty} K_{pq}(x-t)\,\chi_q(t)\, dt = f_p(x)$$

проведено в работе И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2].

Наряду с системой (4) рассмотрим следующие системы интегральных уравнений: j-я система имеет вид

$$U_{mj}(\tau, \tau_0, s) = \delta_{mj} e^{-\tau s} + \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau-\tau'|)\, U_{kj}(\tau', \tau_0, s)\, d\tau' \tag{7}$$

$$m = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n;$$

δ_{mj} — символ Кронеккера.

В системах (7) явно указана зависимость решений U_{mj} от параметра s и от верхнего предела интегрирования τ_0.

Функции $Q_m(\tau, \eta, x)$ легко выражаются через функции $U_{mj}(\tau, \tau_0, s)$:

$$Q_m(\tau, \eta, x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\, U_{mj}\left[\tau, \tau_0, \frac{\alpha(x)}{\eta}\right]. \tag{8}$$

Дифференцируя обе части (7) по τ_0, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{mj}}{\partial \tau_0} &= \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n} K_{mp}(\tau_0-\tau)\,\varphi_{pj}(\tau_0, s) + \\
&+ \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau-\tau'|)\,\frac{\partial U_{kj}(\tau', \tau_0, s)}{\partial \tau_0}\,d\tau',
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где обозначено

$$
\varphi_{pj}(\tau_0, s) = U_{pj}(\tau_0, \tau_0, s). \tag{10}
$$

Введем вспомогательные функции $V_{mj}^{pq}(\tau, \tau_0, s)$, удовлетворяющие системам

$$
\begin{aligned}
V_{mj}^{pq}(\tau, \tau_0, s) &= K_{mp}(\tau_0-\tau)\,\varphi_{pj}(\tau_0, s)\,\delta_{mq} + \\
&+ \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau-\tau'|)\,V_{kj}^{pq}(\tau', \tau_0, s)\,d\tau'.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Очевидно, что

$$
\frac{\partial U_{mj}}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} V_{mj}^{pq}(\tau, \tau_0, s). \tag{12}
$$

С другой стороны, функции V_{mj}^{pq} выражаются через функции U_{mj} следующим образом:

$$
V_{mj}^{pq}(\tau, \tau_0, s) = \varphi_{pj}(\tau_0, s)\int_0^{\infty} G_{qp}(s')\,e^{-\tau_0 s'}\,U_{mq}(\tau, \tau_0, s')\,ds'. \tag{13}
$$

Следовательно

$$
\frac{\partial U_{mj}(\tau, \tau_0, s)}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \varphi_{pj}(\tau_0, s)\int_0^{\infty} G_{qp}(s')\,e^{-\tau_0 s'}\,U_{mq}(\tau, \tau_0, s')\,ds'. \tag{14}
$$

Умножая обе части (14) на $e^{\tau z}$ (z новый параметр) и интегрируя по τ от 0 до τ_0, с учетом тождества

$$
\int_a^x \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\,dt = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t, x)\,dt - f(x, x),
$$

олучаем

$$\frac{\partial W_{mj}(z, s, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \sum_{p=1}^{n} \varphi_{pj}(\tau_0, s) \Bigg[\delta_{mp} e^{-\tau_0 s} + \frac{\lambda}{2} \sum_{q=1}^{n} \int_0^\infty G_{qp}(s') e^{-\tau_0 s'} W_{mq}(z, s', \tau_0) \, ds' \Bigg], \tag{15}$$

где введено обозначение

$$W_{mj}(z, s, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} U_{mj}(\tau, \tau_0, s) e^{-\tau z} d\tau. \tag{16}$$

Из (7), (10) и (5) получается следующее выражение для $\varphi_{pj}(\tau_0, s)$:

$$\varphi_{pj}(\tau_0, s) = \delta_{pj} e^{-\tau_0 s} + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty G_{pk}(s') e^{-\tau_0 s'} W_{kj}(s', s, \tau_0) \, ds', \tag{17}$$

подставляя которое в (15), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций W_{mj}

$$\frac{\partial W_{mj}(z, s, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \sum_{p=1}^{n} \Bigg[\delta_{pj} e^{-\tau_0 s} + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty G_{pk}(s') e^{-\tau_0 s'} W_{kj}(s', s, \tau_0) \, ds' \Bigg] \times$$
$$\times \Bigg[\delta_{mp} e^{-\tau_0 z} + \frac{\lambda}{2} \sum_{q=1}^{n} \int_0^\infty G_{pq}(s') e^{-\tau_0 s'} W_{mq}(z, s', \tau_0) \, ds' \Bigg], \tag{18}$$

с начальными условиями

$$W_{mj}(z, s, 0) = 0. \tag{19}$$

Система (18) обладает следующим свойством симметричности: она не изменяется при одновременной перестановке индексов и первых двух аргументов. Исходя из единственности решения задачи (18)—(19) (что можно доказать), заключаем, что

$$W_{mj}(z, s, \tau_0) = W_{jm}(s, z, \tau_0). \tag{20}$$

Из (12), (14), (17) получаем

$$\frac{\partial W_{mj}(z, s, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \sum_{p=1}^{n} \varphi_{pm}(\tau_0, z) \varphi_{pj}(\tau_0, s), \tag{21}$$

откуда (с учетом (19))

$$W_{mj}(z, s, \tau_0) = \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\tau_0} \varphi_{pm}(r, z)\, \varphi_{pj}(r, s)\, dr. \tag{22}$$

Подставляя выражение (22) в (17), получаем

$$\varphi_{pj}(\tau_0, s) = \delta_{pj} e^{\tau_0 s} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{n} \int_0^{\tau_0} \varphi_{lj}(r, s)\, \psi_{lp}(r, \tau_0)\, dr, \tag{23}$$

где введено обозначение

$$\psi_{lp}(r, \tau_0) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} G_{mp}(s')\, \varphi_{lm}(r, s') \right] e^{-\tau_0 s'} ds'. \tag{24}$$

Умножая обе части уравнения (23) на $G_{j\mu}(s)\, e^{-us}$, где μ — некоторый индекс, а $u > \tau_0$ — новый параметр, интегрируя по s и суммируя по j, для определения функций $\{\psi_{lp}\}$ получаем следующую систему функциональных уравнений:

$$\psi_{p\mu}(\tau_0, u) = K_{p\mu}(u - \tau_0) + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{n} \int_0^{\tau_0} \psi_{lp}(r, \tau_0)\, \psi_{l\mu}(r, u)\, dr. \tag{25}$$

Система (25) принадлежит вольтерровскому типу, ее решение можно осуществить постепенно, переходя от меньших значений τ_0 к большим (при произвольном $u > \tau_0$), начиная с $\tau_0 = 0$. При известных функциях $\psi_{p\mu}$ функции φ_{pj} можно определить из систем (23), представляющих собой линейные системы уравнений Вольтерра с матрицей-ядром $\|\psi_{lp}\|$ (j и s — параметры). Функции φ_{pj} можно определить также из соотношений (24): обращением преобразования Лапласа можно найти функции

$$\omega_{lp}(r, s) = \sum_{m=1}^{n} G_{mp}(s)\, \varphi_{lm}(r, s), \tag{26}$$

после чего функции $\varphi_{lm}(r, s)$ определяются решением системы линейных алгебраических уравнений. При любом s определитель $|G_{mp}(s)|$ отличен от нуля, так как является определителем Грама для системы линейно независимых функций $\{a_k(x)\}$.

Знание функций φ_{pj} позволяет решить задачу диффузного отражения при произвольном распределении внешних источников.

В самом деле, пусть $\rho(\tau_0, x', x, \eta, \zeta)\,dx\,d\eta$ представляет собой вероятность того, что квант частотой x', падающий на границу $\tau=\tau_0$ среды под углом $\arccos\zeta$ к нормали, диффузно отразится из среды в виде кванта с частотой между x и $x+dx$, под некоторым углом к нормали, косинус которого лежит между η и $\eta+d\eta$. Функция ρ выражается через функцию $P(\tau, \eta, x', x)$ следующим образом:

$$\rho(\tau_0, x', x, \eta, \zeta)=\int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\zeta}\alpha(x')} P(\tau, \eta, x', x)\frac{\alpha(x')}{\zeta}\,d\tau, \tag{27}$$

откуда

$$\rho(\tau_0, x', x, \eta, \zeta)=\frac{\lambda}{2\zeta}\exp\left\{-\left[\frac{\alpha(x)}{\eta}+\frac{\alpha(x')}{\zeta}\right]\tau_0\right\}\times$$

$$\times\int_0^{\tau_0}\sum_{m=1}^{n}A_m\alpha_m(x')\,Q_m(\tau, \eta, x)\,e^{\frac{\tau}{\zeta}\alpha(x')}\,d\tau= \tag{28}$$

$$=\frac{\lambda}{2\zeta}\exp\left\{-\left[\frac{\alpha(x)}{\eta}+\frac{\alpha(x')}{\zeta}\right]\tau_0\right\}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_m(x')\,\alpha_j(x)\,W_{mj}\left[\frac{\alpha(x')}{\zeta}, \frac{\alpha(x)}{\eta}, \tau_0\right].$$

Функции W_{mj} выражаются через φ_{pj} по формуле (22).

Для определения внутреннего светового режима необходимо решить еще одну систему линейных уравнений Вольтерра. Интегрируя обе части соотношений (14) по τ_0 с учетом условий (10), получаем

$$U_{mj}(\tau, \tau_0, s)=\varphi_{mj}(\tau_0, s)+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n}\int_{\tau}^{\tau_0}\varphi_{pj}(r, s)\,E_{mp}(\tau, r)\,dr, \tag{29}$$

где

$$E_{mp}(\tau, r)=\int_0^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{n}G_{pq}(s')\,U_{mq}(\tau, r, s')\right]e^{-rs'}ds'. \tag{30}$$

Умножая обе части (29) на $G_{lj}(s)e^{-\tau_0 s}$, суммируя по j и интегрируя по s от 0 до ∞, для определения функций $\{E_{pq}\}$ получаем упомянутую систему линейных уравнений Вольтерра

$$E_{ml}(\tau, \tau_0)=\psi_{ml}(\tau, \tau_0)+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n}\int_{\tau}^{\tau_0}\psi_{pl}(r, \tau_0)\,E_{mp}(\tau, r)\,dr, \tag{31}$$

в которой m и τ играют роль параметра.

Важно отметить, что как в системе (23), так и в (31) матрицей-ядром служит $\|\psi_{ml}\|$, фундаментальным образом связанная с $\|K_{ml}\|$ по соотношениям (25).

Знание функций $\{E_{mp}\}$ позволяет определить функции $|U_{mq}|$ двумя различными способами. Первый способ: можно воспользоваться соотношениями (30) — обращение преобразований Лапласа и решение системы линейных алгебраических уравнений, определитель которой совпадает с определителем системы (26). Второй способ: по формуле (29) функции U_{mj} выражаются через $\{\varphi_{mj}\}$ и $\{E_{mp}\}$.

Случай $\tau_0 = \infty$ нуждается в отдельном исследовании.

2. *О представлении* D. Естественно осуществить представление D заменой функции $\beta(x', x)$ конечной частичной суммой ее разложения по своим собственным функциям на $(-\infty, \infty)$

$$\beta(x', x) \approx \beta_n(x', x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k(x')\,\bar{\alpha}_k(x)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x')\,\alpha_k(x). \tag{32}$$

Функции $\bar{\alpha}_k(x)$ являются нормированными решениями уравнения

$$\begin{gathered} \bar{\alpha}_k(x) = \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x', x)\,\bar{\alpha}_k(x')\,dx'; \\ \alpha_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\bar{\alpha}_k(x) \quad (\text{все } \lambda_k \text{ положительные}) \end{gathered} \tag{33}$$

Эта частичная сумма при фиксированном n дает наилучшее среднеквадратичное приближение на плоскости (x', x) к функции $\beta(x', x)$ среди всевозможных представлений D. Можно было бы сумму $\beta_n(x', x)$ подчинить дополнительному требованию, обеспечивающему выполнение соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta_n(x', x)\,dx = \alpha(x'), \tag{34}$$

имея в виду, что аналогичным свойством обладает функция $\beta(x', x)$ (что следует из вероятностного смысла функции $g(x', x)$). Однако точное выполнение условия (32) нам представляется необязательным. В случае представления (32) точность выполнения соотношения (33) согласуется с точностью аппроксимации функции $\beta(x', x)$ частичной суммой $\bar{\beta}_n(x', x)$. Сказанное мы относим также к приближению о полном перераспределении по частотам B. Без какого-нибудь ущерба в отношении математической сложности и применимости разработанной теории к решению соответствующих уравнений можно было бы функцию $\beta(x', x)$ заменить не выражением $A\alpha(x')\alpha(x)$, а функцией вида

$$\bar{\beta}_1(x', x) = \frac{1}{\lambda_1}\alpha_1(x')\alpha_1(x), \tag{32_1}$$

где λ_1 — наименьшее по модулю собственное число ядра $\beta(x', x)$ на $(-\infty, \infty)$, а $\alpha_1(x)$ — соответствующая нормированная собственная функция. Вычисления, приведенные в конце данного раздела, указывают на целесообразность такого подхода.

Заметим, что при приближенном решении различных квантомеханических задач условие нормировки, как правило, не накладывается на приближенно построенные волновые функции.

Может быть, следовало бы потребовать близость функции $\beta_n(x', x)$ к функции $\beta(x', x)$ не по L_2, а по другой метрике, возможно, по метрике C (с подходящим весом). Этот вопрос требует тщательного анализа.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Из систем (25) видно, что если матрица $\|K_{mj}\|$ имеет диагональный вид, то матрица $\|\psi_{mj}\|$ также является диагональной, и система (25), как и (4) и (7), распадается на отдельные уравнения. Есть некоторые основания предполагать, что ортогональность системы $\{\alpha_k(x)\}$ на $(-\infty, \infty)$ влечет за собой малость недиагональных элементов матрицы $\|G_{mj}\|$, следовательно и $\|K_{mj}\|$, тогда, как видно из (6), при $m \neq j$ функции $G_{mj}(s)$ являются финитными: $G_{mj}(s) = 0$ при $s \geqslant 1$, а при $s < 1$ имеем

$$G_{mj}(s) = -\frac{1}{s}\int_{-x(s)}^{x(s)} \alpha_m(x)\alpha_j(x)\,dx. \tag{35}$$

Малость недиагональных элементов матрицы-ядра $\|K_{mj}\|$ может быть использована следующим образом: матрицу $\|K_{mj}\|$ можно представить в виде суммы диагональной матрицы и (самосопряженного) возмущения и решение системы (25) искать в виде ряда по степеням возмущения.

Существуют различные методы приближенного построения собственных функций интегрального оператора — метод наименьших квадратов, метод моментов и т. д. (см., напр., [3]). Рассмотрим один частный случай, когда довольно эффективным является применение метода Ритца.

Пусть функция $\beta(x', x)$ имеет вид

$$\beta(x', x) = \int\limits_{\max(|x'|, |x|)}^{\infty} e^{-z^2} dz. \qquad C$$

Как хорошо известно [1], [4], такой вид функции $\beta(x', x)$ соответствует случаю, когда ширина линии обусловлена тепловым движением атомов (допплеровское уширение), при усреднении по направлениям. Очевидно, что в случае C собственные функции $\alpha_k(x)$ $\beta(x', x)$ четные: $\alpha_k(-x) = \alpha_k(x)$, поэтому они удовлетворяют уравнению

$$\alpha_k(x) = 2\lambda_k \int\limits_0^{\infty} \beta(x', x)\, \alpha_k(x')\, dx'. \tag{36}$$

С учетом C получаем

$$\alpha_k(x) = 2\lambda_k \Phi(x) \int\limits_0^{x} \alpha_k(x')\, dx' + 2\lambda_k \int\limits_x^{\infty} \Phi(x')\, \alpha_k(x')\, dx', \tag{37}$$

где обозначено

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} dz. \tag{38}$$

Из (35) и (36) можно получить, что функция

$$y_k(x) = \int\limits_0^{x} \alpha_k(x')\, dx' \tag{39}$$

является решением следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} + 2\lambda_k e^{-x^2} y_k = 0 \tag{40}$$

$$y_k(0) = y_k'(\infty) = 0. \tag{41}$$

К решению задачи (40)—(41) применяем метод Ритца.

Рассмотрим функционал

$$J(y)=\int\limits_0^\infty [y'^2-2\lambda e^{-x^2}y^2]\,dx. \tag{42}$$

Решения задачи (40)—(41) сообщают функционалу $J(y)$ локальный экстремум в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (41). Ищем экстремали функционала (42) в подпространстве линейных комбинаций координатных функций $\sigma_m(x)$ следующего вида:

$$\sigma_m(x)=\int\limits_0^x e^{-mx^2}dx \quad (m=1,\dots,n), \tag{43}$$

которые линейно независимы и удовлетворяют граничным условиям типа (41).

$$y=\sum_{m=1}^n c_m\sigma_m(x). \tag{44}$$

На этом подпространстве функционал $J(y)$ становится функцией от n переменных: $J(y)=\Phi_1(c_1,\dots,c_n)$.

При выполнении соответствующих вычислений для нахождения экстремальных точек, получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n c_m[\alpha_{km}-2\lambda\beta_{km}]=0, \tag{45}$$

где обозначено

$$\alpha_{km}=\int\limits_0^\infty \sigma'_k(x)\sigma'_m(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k+m}}, \tag{46}$$

$$\beta_{km}=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sigma_k(x)\sigma_m(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{km}}\arcsin\sqrt{\frac{km}{(k+1)(m+1)}}. \tag{47}$$

Собственные числа λ_s определяются из характеристического уравнения

$$\Delta(2\lambda)=0, \tag{48}$$

где $\Delta(2\lambda)$ — определитель системы (45). Условие (48) является необходимым для того, чтобы система (45) имела нетривиальные решения.

Производя соответствующие вычисления, при $n = 3$, когда в качестве координатных функций взяты σ_1, σ_2, σ_4, получаем следующие значения для собственных чисел:

$$\lambda_1 \approx 1.342021; \quad \lambda_2 \approx 8.90545; \quad \lambda_3 \approx 23.59302; \tag{49}$$

а соответствующие собственные функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ суть

$$\sqrt{\lambda_1}\,\alpha_1(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}[0.720058e^{-x^2} + 0.638917\,e^{-2x^2} - 0.089916\,e^{-4x^2}],$$

$$\sqrt{\lambda_2}\,\alpha_2(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}[-2.938233e^{-x^2} + 1.100864e^{-2x^2} + 3.071861\,e^{-4x^2}], \tag{50}$$

$$\sqrt{\lambda_3}\,\alpha_3(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}[8.821329\,e^{-x^2} - 20.699990e^{-2x^2} + 12.825419\,e^{-4x^2}].$$

Небезынтересно сравнение среднеквадратичных отклонений некоторых функций от функции $\beta(x', x)$, даваемой формулой C, на плоскости (x', x), причем $\|f(x, y)\| = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x, y)\,dxdy\right]^{1/2}$.

$$\left\|\beta(x', x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x'^2+x^2)}\right\| \approx 0.203\|\beta\|,$$

$$\|\beta(x'', x) - \alpha_1(x')\alpha_1(x)\| \approx 0,165\|\beta\|,$$

$$\left\|\beta(x', x) - \sum_{n=0}^{2}\alpha_k(x')\,\alpha_k(x)\right\| \approx 0.072\|\beta\|,$$

$$\left\|\beta(x', x) - \sum_{k=1}^{3}\alpha_k(x')\,\alpha_k(x)\right\| \approx 0.053\|\beta\|,$$

а

$$\|\beta\| = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1},$$

откуда видно, что относительная среднеквадратичная ошибка в случае (32_1) около 1.23 раза меньше, чем в случае при обычном предположении о полном перераспределении по частотам.

3. *Табулирование ядер.* В частном случае допплеровского уширения линии, когда профиль коэффициента поглощения $\alpha(x) = e^{-x^2}$, а собственные функции $\alpha_k(x)$ представляются в виде линейных комби-

наций функций e^{-mx^2}, элементы матрицы-ядра $\|K_{mk}\|$ представляются в виде линейных комбинаций функций $N_k(\tau)$:

$$N_k(\tau) \equiv N_{k1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} E_1(\tau e^{-x^2})\, dx. \tag{51}$$

Для функций $N_{k1}(\tau)$ справедливы следующие разложения [5]:

$$N_{k1}(\tau) = -\frac{\gamma}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k\sqrt{k}} - \frac{\ln \tau}{\sqrt{k}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\tau^m}{m \cdot m! \sqrt{k+m}}, \tag{52}$$

где $\gamma = 0.5772157\ldots$ — постоянная Эйлера.

Автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну за важные указания, а также Р. С. Варданяну и А. Г. Никогосяну за полезное обсуждение.

Институт математики
АН АрмССР

NONCOHERENT SCATTERING. I. ISOTROPIC SCATTERING

N. B. YENGIBARIAN

The linear problem of noncoherent scattering in plane-parallel finite layer is considered. Systems of integral equation are obtained which are reduced, to certain functional equations. Some concrete calculations in the case of Doppler broadening of line have been carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, УМН, 13, вып. 2, 1958.
3. *В. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова*, Численные методы анализа, Госиздат, ФМН, М., 1963.
4. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
5. *В. В. Иванов, В. Т. Щербаков*, Астрофизика, 1, 31, 1965.