АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 АВГУСТ, 1971 ВЫПУСК 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. Л. АФАНАСЬЕВ

Поступила 29 апреля 1969
Пересмотрена 1 сентября 1970

В работе обобщен метод „полос" В. А. Амбарцумяна на системы со сфероидальной симметрией. Полученные соотношения применены к вычислению отношения масса—светимость у двух эллиптических галактик—NGC 4406 ($f/f_{\odot} = 46$) и NGC 4486 ($f/f_{\odot} = 48$).

Приведенные в работе оценки находятся в удовлетворительном согласии с результатами других авторов.

Потенциальную энергию гравитирующей системы можно найти, зная закон распределения объемной плотности вещества. Если система сферически симметрична, то объемная плотность найдется из наблюдаемой в картинной плоскости путем решения интегрального уравнения Абеля. В работе В. А. Амбарцумяна [1] предложен простой способ нахождения потенциальной энергии сферически симметричной системы. В. А. Амбарцумяном показано, что при проектировании функции распределения объемной плотности на произвольную ось потенциальная энергия системы будет пропорциональна интегралу от квадрата одномерной функции распределения плотности („функции полосы"), взятому по всей области.

Целью настоящей работы явилось обобщение метода В. А. Амбарцумяна на системы со сфероидальной симметрией.

1. Под системой со сфероидальной симметрией мы будем понимать такую систему, у которой поверхности равной плотности являются подобными и подобно расположенными сфероидами семейства, определяемого уравнением

$$e^2 (x'^2 + u'^2) + z'^2 = e^2 k^2, \tag{1}$$

где e — истинная сферичность системы, а плоскость $z'=0$ экваториальная. Функцию распределения объемной плотности в такой системе можно представить как функцию параметра k в обобщенных сферических координатах, задаваемых формулами

$$\begin{aligned} x' &= k\cos\theta_1\sin\theta_2, \\ y' &= k\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ z' &= ke\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Спроектируем функцию распределения плотности $\rho)k)$ на картинную плоскость. Если угол наклона луча зрения к оси симметрии системы обозначить через i, а через x и y — декартовы координаты в картинной плоскости, то наблюдаемая функция распределения плотности определится из выражения

$$P(x, y) = 2\frac{e}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha_0(x,y)}^{\infty}\frac{\rho(\alpha)\,\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\alpha_0^2(xy)}}, \tag{3}$$

где
$$\alpha_0(x, y) = \sqrt{x^2+y^2/\varepsilon^2},$$
а
$$\varepsilon = \sqrt{e^2\sin^2 i+\cos^2 i} \tag{4}$$

— видимая сферичность системы. Вывод уравнения, подобного уравнению (3), приведен в работе П. Н. Холопова [2]. Заметим, что ось x направлена вдоль большой полуоси системы, а ось y — вдоль малой.

Одномерная функция распределения плотности вдоль малой полуоси системы найдется интегрированием $P(x, y)$ по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\varphi(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Производя в (5) замену переменных интегрирования

$$x = \sqrt{k^2-\frac{y^2}{\varepsilon^2}}\cos\omega \quad \text{и} \quad \sqrt{\alpha^2-\alpha_0^2(x, y)} = \sqrt{k^2-\frac{y^2}{\varepsilon^2}}\sin\omega$$

и выполняя интегрирование по k от y/ε до ∞ и по ω от 0 до $\pi/2$, получим

$$\varphi(y) = 2\pi\frac{e}{\varepsilon}\int\limits_{y/\varepsilon}^{\infty}\rho(k)\,k\,dk. \tag{6}$$

Аналогично получим выражение для функции распределения плотности вдоль оси x

$$\psi(x) = 2\pi e \int_x^\infty \rho(k)\, k dk. \tag{7}$$

Введем $\Phi(y/\varepsilon) = \varphi(y)$, тогда из (6) следует равенство

$$\frac{d}{d\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)} \Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = -2\pi \frac{e}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \frac{y}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Аналогично получим равенство для $\psi(x)$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = -2\pi e \rho(x)\, x. \tag{9}$$

2. Для вычисления потенциальной энергии системы выделим в объеме тонкий слой E_k, ограниченный двумя подобными сфероидами с полуосями k, ke и $(k+\Delta k)$, $(k+\Delta k)e$. Тогда элемент объема массой dm' в точке P' внутри слоя E_k обладает потенциальной энергией (взятой с обратным знаком)

$$dU' = V(P')\, dm', \tag{10}$$

где $V(P')$ — потенциал, создаваемый слоем во внутренней точке P'. Согласно теореме Ньютона о постоянстве потенциала внутри однородного эллипсоидального слоя [3], имеем

$$V(P') = V(k) = 4C(e)\, \gamma\pi e \rho(k)\, k dk, \tag{11}$$

где

$$C(e) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)\sqrt{e^2+s}},$$

а γ — постоянная тяготения. Интегрируя (10) по объему, ограниченному слоем E_k в обобщенных сферических координатах (2), получим для энергии внутренней массы в потенциальном поле слоя E_k выражение

$$U' = V(k) \iiint dm' = 4\pi e V(k) \int_0^\infty \rho(k')\, k'^2 dk'. \tag{12}$$

Очевидно, что потенциальная энергия всей системы найдется интегрированием (12) по k. Интегрируя в пределах от 0 до ∞, получим

$$U = 16\pi^2\gamma\, e^2 C(e) \int\limits_0^\infty \rho(k)\, k \int\limits_0^\infty \rho(k')\, k'^2 dk' dk. \tag{13}$$

Интегрируя (13) по частям и воспользовавшись выражениями (6) и (8), для потенциальной энергии системы U, выраженной через $\varphi(y)$, получим

$$U = \gamma C(e)\,\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy. \tag{14}$$

Коэффициент $C(e)$ в (14) выражается через элементарные функции и равен $1/\sqrt{1-e^2}\cdot\arccos e$. Как видно, он зависит только от истинной сферичности, которая из наблюдений не определяется, но связана с видимой сферичностью ε и углом наклона i соотношением (4). Предположим, что ось симметрии систем направлена случайно, что эквивалентно выбору наудачу точки на единичной сфере. Тогда угол наклона i будет случайной величиной, распределенной с плотностью $\sin i$. Усредняя $C(e)$ по углу наклона i в пределах от $\arccos \varepsilon$ до $\pi/2$, перепишем (14) в виде

$$U = \gamma \overline{C}(\varepsilon)\,\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy, \tag{15}$$

где $\overline{C}(\varepsilon)$ — усредненное по углу наклона значение $C(e)$. Интервал углов, в котором производилось усреднение, выбран из очевидного условия

$$0 \leqslant e \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично, воспользовавшись (7) и (9), а также учтя сказанное выше, получим для потенциальной энергии, выраженной через $\psi(x)$, следующее выражение:

$$U = \gamma \overline{C}(\varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\psi(x)]^2 dx. \tag{16}$$

Вычисленные значения $\overline{C}(\varepsilon)$, а также относительные среднеквадратичные уклонения, приведены в табл. 1.

Таким образом, формулы (15) и (16) дают нам математическое ожидание величины потенциальной энергии системы, ориентированной случайно. Из табл. 1 видно, что погрешность среднего значения не превышает 22% и максимальна для систем с видимой сферичностью, равной единице.

Таблица 1

ε	$\overline{C}(\varepsilon)$	$\sqrt{\dfrac{\overline{C^2(\varepsilon)} - \overline{C(\varepsilon)}^2}{\overline{C(\varepsilon)}^2}}$
0.0	1.571	0.000
0.1	1.492	0.021
0.2	1.431	0.032
0.3	1.372	0.049
0.4	1.317	0.071
0.5	1.266	0.092
0.6	1.216	0.118
0.7	1.163	0.152
0.8	1.120	0.168
0.9	1.067	0.189
1.0	1.000	0.220

Приведенные выше соображения можно применить к системе, у которой поверхности равной плотности — подобные эллипсоиды. В этом случае вычисление математического ожидания потенциальной энергии будет более сложным, так как коэффициенты, зависящие от сжатий, не будут элементарными функциями последних.

3. Применим полученные выражения к определению отношения масса — светимость f в эллиптических галактиках, форма которых близка к сфероидальной.

Считая галактику стационарной и воспользовавшись выражением (16), запишем теорему о вириале в виде

$$M\sigma^2 = |U| = \gamma\overline{C}(\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(x)]^2 dx, \qquad (17)$$

где M — полная масса галактики, а σ^2 — дисперсия модулей пространственных скоростей. Если направление вектора пространственной скорости и его модуль — независимые случайные величины, то

$$\sigma^2 = A\sigma_r^2, \qquad (18)$$

где σ_r^2 — дисперсия лучевых скоростей, а A — коэффициент пропорциональности. При случайной ориентации векторов пространственной скорости в смысле, указанном ниже, имеем

$$A = 3.$$

Тогда, предположив постоянство отношения масса — светимость f во всем объеме галактики и учитывая принятую связь между σ^2 и σ_r^2, получим из (17) соотношение для вычисления f. Переходя, таким образом, в (17) от интегрирования к суммированию и воспользовавшись (18), получим:

$$f/f_\odot = 1.437 \cdot 10^5 \frac{\sigma_r^2 (L/L_\odot)\, \Delta x}{\overline{C}(e) \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} (L/L_\odot)_{x_j}}, \tag{19}$$

где $(L/L_\odot)$ — интегральная светимость галактики, $(L/L_\odot)_{x_j}$ — светимость в j-ой полосе, параллельной малой полуоси, Δx — ширина полосы в *кпс* и σ_r^2 — дисперсия лучевых скоростей в *км²/сек²*.

Таблица 2

Галактика	Тип	$f/f_\odot$		
		А	Ф	П
NGC 4406	E3	46 ± 7	34	33
NGC 4486	E0	48 ± 9	22	—

Мы вычислили $f/f_\odot$ у двух эллиптических галактик в Деве, для которых в [4] приведены подробные карты распределения поверхностной яркости и в работе Минковского [5] определены величины σ_r^2 в центральных частях. Полученные результаты, наряду с оценками других авторов, приведены в табл. 2. В таблице помещены оценки $f/f_\odot$ по данным, соответственно: автора — А, Фиша [6] — Ф, Поведы [7] — П. Все данные соответствуют значению параметра Хаббла $H = 75$ *км/сек·Мпс*. Погрешность, указанная в оценке автора, определяется погрешностью усреднения по углу наклона. В действительности оценки более грубые, так как предположения, принятые при выводе формулы (19), мало обоснованы.

В заключение выражаю благодарность И. Д. Караченцеву и В. Ю. Теребижу за обсуждение работы.

Кафедра астрономии
Киевского университета

THE DETERMINATION OF THE POTENTIAL ENERGY OF A GRAVITATIONAL SYSTEM WITH THE SPHEROIDAL SYMMETRY

V. L. AFANASJEV

It has been generalized Ambartsumian „strips" method on the systems with the spheroidal symmetry.

Received relationships were applied to the determination of mass-luminosity ratio for two elliptical galaxies NGC 4406 ($f/f_{\odot} = 46$), NGC 4486 ($f/f_{\odot} = 48$).

Calculated result accords satisfactory with the values of other authors.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 24, 875, 1935.
2. *П. Н. Холопов*, Астрон. ж., 26, 110, 1949.
3. *Г. Н. Дубошин*, Теория притяжения, Физматгиз, М., 1961, стр. 161.
4. *Б. Е. Маркарян, Э. Я. Оганесян, С. Н. Аракелян*, Астрофизика, 1, 33, 1965.
5. *R. Minkowski*, Problems of Extra Galactic Research, I. A. U. Symp. No. 15, The MacMillan Company, N. Y., 1961.
6. *R. A. Fish*, Ap. J., 139, 284, 1964.
7. *A. Poveda*, Ap. J., 134, 910, 1961.