АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 НОЯБРЬ, 1970 ВЫПУСК 4

К ТЕОРИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Т. А. АГЕКЯН

Поступила 25 марта 1970

Написаны уравнения движения звезды, принадлежащей несферической звездной системе, стационарной в регулярном поле. Рассмотрены однофазовые звездные системы, т. е. такие системы, в которых значения трех интегралов движения одни и те же для всех звезд. Возможны однофазовые системы, в которых траектории замкнуты в сопутствующей плоскости, и, следовательно, звезды системы располагаются на некоторой двумерной поверхности. Для траекторий в таких системах найдена форма третьего интеграла движения. Эта форма третьего интеграла движения справедлива для всякого поля потенциала, создаваемого несферической стационарной в регулярном поле звездной системой. При помощи третьего интеграла движения произведен переход к уравнениям состояния звездных систем, стационарных в регулярном поле.

1. К решению основной задачи звездной динамики — построению теоретических самосогласованных моделей вращающихся звездных систем — можно идти тремя путями.

Первый путь состоит в применении гидродинамических уравнений. Совокупности дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих состояние вращающейся звездной системы, выведены в [1, 2]. Решение этих совокупностей уравнений является достижимой, но сложной задачей и еще не получено. Недостатком гидродинамического метода является то, что он не дает полного описания системы. Кроме того, он применим только к системам, достигшим квазистационарного состояния в целом. Между тем, в природе более распространены звездные системы, стационарные в регулярном поле и нестационарные в иррегулярном поле.

Второй путь — численно-экспериментальный. Метод состоит в численном решении на ЭВМ задачи n тел, n при этом можно брать небольшим. Физическое пространство системы разбивается на достаточное число малых объемов. В ходе численного решения уравнений движения для каждого объема суммируется время пребывания в нем каждого тела. Сумма таких времен для всех тел, деленная на величину объема, принимается пропорциональной средней звездной плотности для данного объема.

Введенное понятие плотности является обобщением понятия плотности на системы с небольшим числом тел. В том случае, когда n очень велико, введенное понятие плотности совпадает с обычным понятием плотности. Аналогично обобщаются понятия скорости центроида и распределения остаточных скоростей. Этим методом можно найти распределение потенциала регулярного силового поля звездной системы и оценить характеристики иррегулярного поля.

Численно-экспериментальный метод был применен к сферическим системам в работах [3, 4] и к вращающимся системам в [5]. Именно этот метод позволил построить первую самосогласованную модель вращающейся звездной системы. Однако, если n невелико, то получаемая модель есть модель вращающейся звездной системы, квазистационарной в целом. Для построения моделей систем, стационарных в регулярном поле (и не стационарных в иррегулярном поле), n должно быть настолько большим (например > 1000), чтобы время перехода нестационарной системы в состояние, стационарное в регулярном поле, было существенно меньше времени перехода в квазистационарное состояние. Для построения такой модели требуется большое количество времени на быстродействующей машине с очень большой памятью.

В настоящей статье рассматриваются возможности третьего пути— применения фазодинамического метода. Это самый сильный метод, годный в принципе для описания любых систем и способный дать полное описание систем. Успешному применению фазодинамического метода к вращающимся системам препятствовало незнание аналитической формы третьего интеграла движения. Г. Г. Кузмин и С. А. Кутузов [6] и Линден-Белл [7] рассматривали возможность построения фазодинамических моделей вращающихся систем, стационарных в регулярном поле, в предположении, что фазовая плотность зависит только от двух интегралов движения — интеграла энергии и интеграла площадей. Однако, как известно, в общем случае фазовая плотность вращающейся стационарной звездной системы зависит от трех интегралов движения.

Пусть R, φ и z — цилиндрические координаты (ось z совпадает с осью вращения системы), а Π, τ и Z — соответствующие этим координатам компоненты скорости звезды.

Обозначим

$$I = \frac{1}{2}(\Pi^2 + \tau^2 + Z^2) - \Phi(R, z) \tag{1}$$

$$J = R\cdot\tau \tag{2}$$

интегралы энергии и площадей и

$$K = K(R, z, \Pi, \tau, Z) \tag{3}$$

третий интеграл движения.

Задание фазовой плотности

$$\psi(I, J, K) \tag{4}$$

в принципе полностью определяет состояние системы, стационарной в иррегулярном поле. Стационарную звездную систему нужно представлять себе как совокупность траекторий, по которым непрерывной вереницей движутся звезды. Эти заполненные звездами траектории создают поле потенциала системы. Но и форма траекторий в свою очередь определяется полем потенциала системы.

Рассмотрим уравнения движения звезды

$$\frac{d\Pi}{dt} - \frac{J^2}{R^3} = F_R \tag{5}$$

$$\frac{dZ}{dt} = F_z \tag{6}$$

$$R\cdot\tau = J. \tag{7}$$

Допустим, что ось z является осью круговой симметрии системы. Тогда компоненты силы следующим образом выражаются через фазовую плотность:

$$F_R = -Gm \iiint\limits_{(A)}\!\!\iiint \psi(I, J, K)\cdot\frac{R-\rho\cos\varphi}{r^3}\rho\, d\rho\, d\varphi\, d\zeta\, d\Pi\, d\tau\, dZ, \tag{8}$$

$$F_z = -Gm \iiint\limits_{(A)}\!\!\iiint \psi(I, J, K)\cdot\frac{z-\zeta}{r^3}\rho\, d\rho\, d\varphi\, d\zeta\, d\Pi\, d\tau\, dZ, \tag{9}$$

где

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi + (z-\zeta)^2, \tag{10}$$

(A) — область фазового пространства, занимаемого системой.

Переходя к переменным интегрирования I, J, K, и написав левые части (5) и (6) в несколько ином виде, получим

$$\Pi \frac{\partial \Pi}{\partial R} + Z \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{J^2}{R^3} =$$
$$= - Gm \iiint\limits_{(B)} d\Phi (I, J, K) \iint\limits_{[C(I, J, K)]} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} d\rho d\zeta \int\limits_0^{2\pi} \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} d\varphi, \tag{11}$$

$$\Pi \frac{\partial Z}{\partial R} + Z \frac{\partial Z}{\partial z} =$$
$$= - Gm \iiint\limits_{(B)} d\Phi (I, J, K) \iint\limits_{[C(I, J, K)]} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} d\rho d\zeta \int\limits_0^{2\pi} \frac{z - \zeta}{r^3} d\varphi. \tag{12}$$

Здесь $\psi (I, J, K)\, dI\, dJ\, dK$ заменено посредством $d\Phi (I, J, K)$, так как в общем случае $\psi (I, J, K)$ не есть интегрируемая функция. Следовательно, соответствующий тройной интеграл есть теперь интеграл Стилтьеса.

Если бы аналитическое выражение третьего интеграла движения было известно, уравнения (11) и (12) вместе с (7) можно было бы рассматривать при любой заданной $\psi (I, J, K)$ как систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций $\Pi (R, z, I, J, K)$, $Z (R, z, I, J, K)$, $\tau (R, z, I, J, K) = J/R$. Решение этой совокупности уравнений позволило бы получить распределения всех физических характеристик в звездной системе.

Рассмотрим простейшую систему с круговой симметрией относительно оси, в которой все звезды имеют одни и те же значения I_0, J_0, K_0 интегралов движения. Такую, стационарную в регулярном поле систему уместно назвать однофазовой. Однофазовую вращающуюся систему нужно представлять себе в виде одной, в общем случае бесконечной, траектории, по которой, заполняя ее, вереницей движутся звезды.

Уравнения движения звезды в однофазовой системе имеют, следовательно, вид

$$\frac{d\Pi}{dt} - \frac{J^2}{R^3} = - Gm\alpha_0 \iint\limits_{(C)} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} d\rho d\zeta \int\limits_0^{2\pi} \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} d\varphi, \tag{13}$$

$$\frac{dZ}{dt} = - Gm\alpha_0 \iint\limits_{(C)} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} d\rho d\zeta \int^{2\pi} \frac{z - \zeta}{r^3} d\varphi. \tag{14}$$

В общем случае траектория незамкнута, и витки ее заполняют трехмерный объем — тор, сечение которого определяется областью

(C) в уравнениях (13) и (14). Рассмотрение уравнений (13) и (14) показывает, что справедливо равенство

$$\left| \Pi(R, z)\frac{\partial K}{\partial Z} - Z(R, z)\frac{\partial K}{\partial \Pi} \right| = \frac{a_0}{R \cdot D(R, z)}, \tag{15}$$

связывающее третий интеграл движения с пространственной звездной плотностью $D(R, z)$.

Аналогично, из уравнений (11) и (12) следует для третьего интеграла движения более общее уравнение

$$\left| \Pi(R, z, I, J, K)\frac{\partial K}{\partial Z} - Z(R, z, I, J, K)\frac{\partial K}{\partial \Pi} \right| = \frac{\psi(I, J, K)}{R \cdot D(R, z, I, J, K)}, \tag{16}$$

справедливое для всех значений I, J, K в этой системе. Здесь $D(R, z, I, J, K)\, dI\, dJ\, dK$ — парциальная звездная плотность тех звезд, у которых значения интегралов движения заключены в промежутках $[I, I+dI]$, $[J, J+dJ]$, $[K, K+dK]$.

Обратимся теперь к возможным частным случаям, когда в однофазовой системе траектория звезды заполняет своими витками не трехмерный объем, а двумерную поверхность. Рассмотрим движение звезды в сопутствующей плоскости ROz, то есть в плоскости, проходящей все время через ось симметрии и звезду. Каждая из координат R и z звезды в ходе ее движения, достигнув некоторого наименьшего значения, начинает возрастать, и через определенное время достигает некоторого наибольшего значения, после чего снова убывает, достигая некоторого наименьшего значения и т. д. В общем случае однофазовой системы эти наибольшие и наименьшие значения какой-либо координаты в разное время различны. Кроме того, в общем случае, момент, когда достигается наименьшее (наибольшее) значение R, не совпадает с моментом достижения наименьшего (наибольшего) значения z, (очевидно, что для z понятия наибольшее и наименьшее значение можно поменять).

При некоторых определенных соотношениях значений интегралов I_0, J_0, K_0 у траектории звезды в сопутствующей плоскости возможны две особые точки — точка возврата и точка симметрии. Точкой возврата называется точка, в которой компоненты скорости Π и Z одновременно оказываются равными нулю. Так как система стационарна в регулярном поле и имеет ось круговой симметрии, то из обратимости механического движения относительно времени следует, что, придя в сопутствующей плоскости в точку возврата, звезда остановится, а затем совершит движение по той же само́й траектории в обратном направлении.

Точки симметрии могут существовать только в системах, имеющих плоскость симметрии. Точкой симметрии назовем точку на траектории звезды, в которой равны нулю координата z и компонент скорости Π. Придя в точку симметрии, звезда затем (вследствие наличия плоскости симметрии) движется по траектории, которая является зеркальным отображением относительно плоскости симметрии той части траектории, по которой звезда приближалась к точке симметрии.

Если траектория звезды имеет менее двух особых точек, то она незамкнута в сопутствующей плоскости. Витки траектории в пространстве заполняют трехмерную область -- тор некругового сечения.

Если траектория имеет две особые точки, находящиеся на конечном расстоянии (вдоль траектории) друг от друга, то в сопутствующей плоскости траектория звезды замкнута. Витки траектории в пространстве в общем случае заполняют двумерную поверхность.

Если обе особые точки являются точками симметрии, то примерами замкнутых траекторий в сопутствующей плоскости являются траектории, приведенные на рис. 1 (a, b, c). Пунктиром обозначена плоскость симметрии.

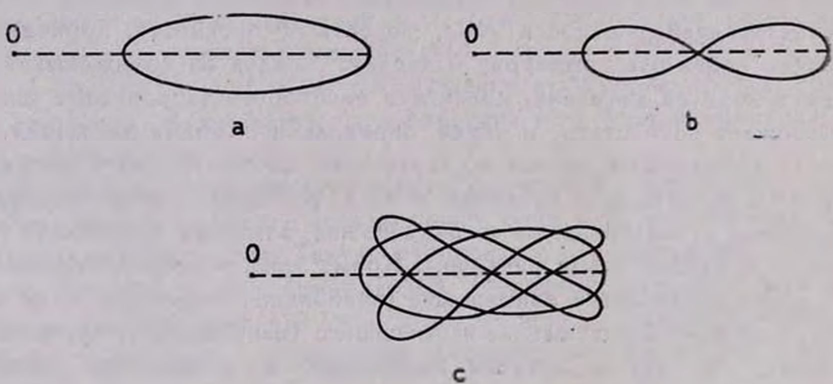

Рис. 1.

Примеры траекторий, у которых обе особые точки являются точками возврата, приведены на рис. 2 (a, b).

Пример траектории, у которой одна особая точка есть точка возврата, а другая есть точка симметрии, приведен на рис. 3. В этом случае, очевидно, должна существовать и вторая точка возврата.

Траекторий с большим числом особых точек быть не может.

При наличии двух точек возврата замкнутость траектории в сопутствующей плоскости понимается в том смысле, что приведенный на рисунках отрезок траектории звезда попеременно проходит в прямом и обратном направлениях.

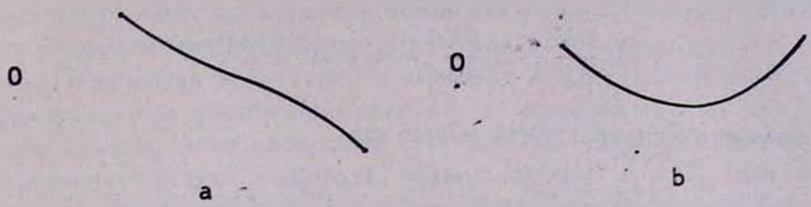

Рис. 2.

В примерах, приведенных на рис. 2 (a и b), система не имеет плоскости симметрии. Следовательно, доказательство существования у стационарных звездных систем плоскости симметрии, данное Г. М. Идлисом [9, 10] и Г. Г. Кузминым [11], справедливо лишь для систем стационарных и в иррегулярном поле. Системы, стационарные только в регулярном поле, могут и не иметь экваториальной плоскости симметрии.

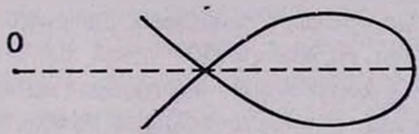

Рис. 3.

Если траектория звезды в однофазовой вращающейся системе замкнута в сопутствующей плоскости, то уравнения (13) и (14) принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{J^2}{R^3} = -2Gma_0 \int\limits_{(S_1)}^{(S_2)} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} ds \int\limits_0^{2\pi} \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} d\varphi, \tag{17}$$

$$\frac{\partial Z}{dt} = -2Gma_0 \int\limits_{(S_1)}^{(S_2)} \left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right|^{-1} ds \int\limits_0^{2\pi} \frac{z - \zeta}{r^3} d\varphi, \tag{18}$$

где интеграл по переменной S есть криволинейный интеграл первого рода от особой точки (S_1) до особой точки (S_2).

Можно видеть, что выражение, стоящее в скобках в уравнениях (17) и (18), также удовлетворяет уравнению (15), в котором, однако, $R \cdot D(R, z)$ должно быть заменено проекцией линейной плотности вдоль траектории на сопутствующую плоскость. Но эта проекция обратно пропорциональна скорости звезды в сопутствующей плоскости. Следовательно, уравнение (15) для однофазовой системы с замкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями принимает форму

$$\left| \Pi \frac{\partial K}{\partial Z} - Z \frac{\partial K}{\partial \Pi} \right| = \alpha_0 \sqrt{\Pi^2 + Z^2}. \tag{19}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$K = \alpha_0 \sqrt{\Pi^2 + Z^2} \operatorname{arctg} \frac{\Pi}{Z} + \eta (\Pi^2 + Z^2) + \chi (\tau, R, z), \tag{20}$$

где η и χ — произвольные функции. В конкретной системе это, конечно, некоторые определенные функции.

Таким образом, для однофазовых вращающихся систем с замкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями получена форма третьего интеграла движения. Подстановка (20) в уравнение Больцмана не приводит к тождеству, показывая, что форма (20) не есть универсальная форма третьего интеграла движения. Она справедлива лишь для звезд, движущихся в поле потенциала, создаваемом стационарной вращающейся однофазовой звездной системой с замкнутой в сопутствующей плоскости траекторией.

Перейдем к вопросу конкретного построения однофазовых вращающихся систем с замкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями. Напишем для этого уравнения (17) и (18) в виде

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{J^2}{R^3} - a \int\limits_{(S_1)}^{(S_2)} (\Pi^2 + Z^2)^{-\frac{1}{2}} ds \int\limits_0^{2\pi} \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} d\varphi, \tag{21}$$

$$\frac{dZ}{dt} = - a \int\limits_{(S_1)}^{(S_2)} (\Pi^2 + Z^2)^{-\frac{1}{2}} ds \int\limits_0^{2\pi} \frac{z - \zeta}{r^3} d\varphi, \tag{22}$$

где

$$a = 2Gm\alpha_0,$$

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi + (z - \zeta)^2.$$

Решение возможно методом последовательных приближений.

Для того, например, чтобы построить модель системы типа, изображенного на рис. 1, нужно задать J, a, а также значения R_1 и Z_1 в точке (S_1). Значения z и Π в этой точке равны нулю. Затем нужно на глаз вычертить траекторию, соответствующую рис. 1. Эта траектория может быть принята за нулевое приближение. Она задаст значения ρ и ζ, для всех S от (S_1) до (S_2). Величину $(Z^2+\Pi^2)^{-\frac{1}{2}}$ под интегралом в нулевом приближении можно считать постоянной, равной Z^{-1}. После этого дифференциальные уравнения могут численно интегрироваться. Полученная траектория и значения Z и Π на ней должны рассматриваться как первое приближение, с которым теперь нужно вычислять правые части уравнений (21) и (22). Одновременно в новых приближениях нужно подбирать новые значения a и Z_1 (или J) так, чтобы траектория приходила в точку (S_2) и имела в ней $\Pi=0$.

Траектории, которые будут получены предлагаемым методом, определяются силовым полем, создаваемым звездами, движущимися по этим самым траекториям. В этом их отличие от траекторий, рассматривавшихся в литературе ранее (например [8], [12—16]), где силовое поле имело смысл внешнего поля и не являлось полем, которое может создать некоторая звездная система, стационарная в регулярном поле. Это, конечно, не умаляет важных результатов, полученных в упомянутых работах.

Для того, чтобы перейти к общему случаю однофазовой системы с незамкнутой в сопутствующей плоскости траекторией рассмотрим сначала такую систему с замкнутой в сопутствующей плоскости траекторией, у которой дуга $(S_1\ S_2)$ имеет очень большое число n пересечений с плоскостью $z=0$. Назовем эту систему системой I. Если n достаточно велико, то можно утверждать, что существует такая однофазовая система с незамкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями (система II), у которой распределение фазовой плотности будет сколь угодно мало отличаться от распределения фазовой плотности в системе I. Справедливо и обратное утверждение: для любой системы II найдется система I со сколь угодно близким к ней распределением фазовой плотности.

Для систем I справедливо уравнение (19), следовательно, оно справедливо и для любых систем II, то есть однофазовых систем с незамкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями. Сравнивая (15) и (19), мы находим, что пространственная звездная плотность в однофазовой системе с незамкнутыми в сопутствующей плоскости траекториями удовлетворяет равенству

$$D(R, z)=\frac{1}{R\sqrt{\Pi^2(R, z)+Z^2(R, z)}}. \tag{23}$$

Соответственно, уравнения движения звезды в такой системе принимают вид

$$\Pi\frac{\partial\Pi}{\partial R}+Z\frac{\partial\Pi}{\partial z}-\frac{J^2}{R^3}=$$
$$=-Gm\alpha_0\iint\limits_{(C)}(\Pi^2+Z^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\zeta\int\limits_0^{2\pi}\frac{R-\rho\cos\varphi}{r^3}d\varphi, \tag{24}$$

$$\Pi\frac{\partial Z}{\partial R}+Z\frac{\partial Z}{\partial z}=$$
$$=-Gm\alpha_0\iint\limits_{(C)}(\Pi^2+Z^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\zeta\int\limits_0^{2\pi}\frac{z-\zeta}{r^3}d\varphi. \tag{25}$$

Систему интегро-дифференциальных (в частных производных) уравнений (24 — 25) также можно решать, применяя последовательные приближения.

Аналогично, нетрудно заключить, что третий интеграл движения в форме (20) справедлив и для любой многофазовой системы. Этот интеграл движения не является универсальным в том смысле, что он не удовлетворяется при любом стационарном потенциале. Однако он удовлетворяется при всяком потенциале, создаваемом стационарной несферической звездной системой.

Уравнения движения (11 — 12) для общего случая многофазовой системы могут быть написаны в виде

$$\Pi\frac{\partial\Pi}{\partial R}+Z\frac{\partial\Pi}{\partial Z}-\frac{J^2}{R^3}=$$
$$=-Gm\iiint\limits_{(B)}d\Phi(I,J,K)\iint\limits_{[C(I,J,K)]}(\Pi^2+Z^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\zeta\int\limits_0^{2\pi}\frac{R-\rho\cos\varphi}{r^3}d\varphi, \tag{26}$$

$$\Pi\frac{\partial Z}{\partial R}+Z\frac{\partial Z}{\partial z}=$$
$$=-Gm\iiint\limits_{(B)}d\Phi(I,J,K)\iint\limits_{[C(I,J,K)]}(\Pi^2+Z^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\zeta\int\limits_0^{2\pi}\frac{z-\zeta}{r^3}d\varphi. \tag{27}$$

В заключение заметим, что возможен случай, когда траектория звезд в однофазовой вращающейся стационарной в регулярном поле системе замкнута не только в сопутствующей плоскости, но и в трехмерном пространстве. Это будет в том случае, когда период прохождения всего отрезка траектории в соприкасающейся плоскости и период полного оборота около оси вращения соизмеримы. В этом случае ось z не будет осью круговой симметрии. Более того, как легко усмотреть, в этом случае стационарная в регулярном поле система может вообще не иметь оси симметрии.

Ленинградский государственный
университет

ON THE THEORY OF ROTATING STELLAR SYSTEMS

T. A. AGEKIAN

The equations of star motion in the selfgravitating nonspherical system, stationary in the regular field, are obtained. The phase density depending on three isolating integral of motion, is used. Stellar systems, cosisting of one single trajectory, are possible. In the case of trajectory closed in the meridional plane, it is found that the Jacobian of transition from the velocity space to the space of isolating integrals of motion has an analytical from

$$R^{-1}(\Pi^2+Z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

It is shown that this analytical form of Jacobian is exact in the general case of nonspherical systems, stationary in the regular field. Hence it becomes possible in principle to construct the model of nonspherical stationary stellar system if the phase density depending on integrals of motion is given.

The revealed analytical form of the Jacobian determines the form

$$\sqrt{\Pi^2+Z^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\Pi}{Z}+a\right)+\chi(\tau, R, z)$$

for the third integral of motion, the term $\chi(\tau, R, z)$ still remaining unknown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж.,43, 425, 1966.
2. *Т. А. Агекян, И. М. Михаиле*, Астрофизика, 5, 623. 1969.
3. *Т. А. Агекян, А. С. Баранов*, Астрофизика, 5, 305, 1969.
4. *А. С. Баранов*, Астрофизика, 6, 261, 1970.
5. *Т. А. Агекян, С. П. Якимов*, Труды АО ЛГУ (в печати).

6. *Г. Г. Кузмин, С. А. Кутузов*, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 27, 82, 1962.
7. *D. Lynden-Bell*, MN, 123, 447, 1962.
8. *A. Ollongren*, BAN, 16, No 521, 241, 1962.
9. *Г. М. Идлис*, Астрон. ж., 36, 85, 1959.
10. *Г. М. Идлис*, Изв. Астрофиз. ин-та АН Каз. ССР, 13, 3, 1962.
11. *Г. Г. Кузмин*, Публикации Тартуской астрон. обс., 34, 9, 1963/64.
12. *B. Barbanis*, A. J., 70, 285, 1965.
13. *G. Contopoulos*, Z. Astrophys., 49, 273, 1960.
14. *G. Contopoulos*, A. J., 68, 763, 1963.
15. *G. Contopoulos, L. Woltjer*, Ap. J., 140, 1106, 1964.
16. *G. Contopoulos*, A. J., 70, 526, 1965.