

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6

МАЙ, 1970

ВЫПУСК 2

РАСПАД ОДНОРОДНОГО ВЕЩЕСТВА НА ЧАСТИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЯГОТЕНИЯ

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

Поступила 28 ноября 1969

Получено приближенное решение для задачи о росте возмущений в расширяющемся веществе без давления.

Решение качественно правильно, даже тогда, когда возмущения не малы. Бесконечная плотность получается вначале на дископодобной поверхности в результате сжатия по одной из осей.

Следующие слои сжимаются вначале адиабатически, а потом ударной волной. Анализируются физические условия в сжимающемся веществе.

Предлагается приближенное решение задачи о развитии крупномасштабной гравитационной неустойчивости на поздней нелинейной стадии, когда возмущения плотности отнюдь не малы по сравнению со средней плотностью.

Хорошо известно решение линейной задачи об эволюции малых возмущений плотности $\delta\rho/\rho$ и скорости $\vec{u} = \vec{v} - H\vec{r}$; легко также найти и смещения частиц $\vec{s} = \int \vec{u} dt$ в этом приближении. Естественная гипотеза заключается в том, что смещение \vec{s} , рассматриваемое как функция от времени и начального положения частицы q , подчиняется формулам линейного приближения даже тогда, когда возмущения плотности велики.

Решение задачи получается записанным в лагранжевых координатах. В невозмущенном решении

$$\vec{r}_0 = \frac{a(t)}{a_0} \vec{q} = A(t) \vec{q}. \quad (1)$$

Для крупномасштабных возмущений, с длиной волны во много раз больше джнсовской, влиянием давления можно пренебречь; возмущение развивается, сохраняя свою форму. Значит в предлагаемом решении

$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{r}_0 = B(t)\vec{s}(\vec{q}) + A(t)\vec{q}, \quad (2)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — известные функции времени и притом B растет быстрее, чем A ; функция $\vec{s}(\vec{q})$ определяется по начальным возмущениям плотности и скорости, которые считаются заданными на стадии, когда возмущения еще малы и линейная теория применима точно.

Формула (2) для смещения позволяет вычислить и все остальные величины: скорость и ускорение

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{B}\vec{s}(\vec{q}) + \dot{A}\vec{q}, \quad (3)$$

$$\vec{w} = \ddot{B}\vec{s}(\vec{q}) + \ddot{A}\vec{q}$$

и плотность

$$\rho = A^3 \frac{dq}{dr} \bar{\rho} = A^3 \bar{\rho} \frac{\partial(q_x, q_y, q_z)}{\partial(r_x, r_y, r_z)}, \quad (4)$$

где $\frac{\partial(q_x, q_y, q_z)}{\partial(r_x, r_y, r_z)}$ есть якобиан.

При этом \vec{u} , \vec{w} , ρ получаются выраженными через \vec{q} и t . Для того, чтобы получить наглядную картину в эйлеровых координатах, нужно еще с помощью (2) выразить \vec{q} через \vec{r} .

Характерная особенность решения (2) заключается в том, что с увеличением возмущения наступает момент t_c пересечения траекторий, т. е. появляются такие пары частиц, эйлеровы координаты которых совпадают

$$\vec{r}(\vec{q}_c + d\vec{q}_c, t_c) = \vec{r}(\vec{q}_c, t_c).$$

Это совпадение происходит при определенном выборе направления $d\vec{q}_c$. Критерием совпадения является как раз равенство нулю якобиана $\frac{\partial(r_x, r_y, r_z)}{\partial(q_x, q_y, q_z)}$. Другими словами, пересечение траекторий сопровождается обращением в бесконечность плотности вещества.

Сравнительно сложное изложение с применением якобиана и (далее) тензора деформаций связано с тем, что рассматривается задача в трехмерном пространстве. Если бы мы рассматривали одномерную задачу, то не было бы вопроса о выборе направления $d\vec{q}_c$, и

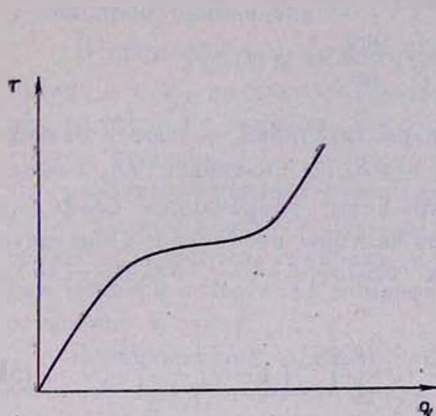


Рис. 1.

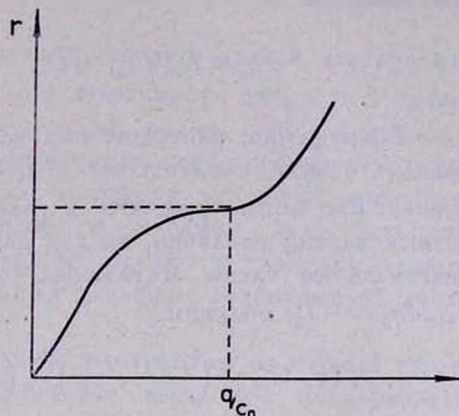


Рис. 2.

пересечение траекторий можно было бы удобно проследить на графиках $r - q$ для разных моментов времени

На рис. 1 пересечения нет, на рис. 2 пересечение (или, точнее,

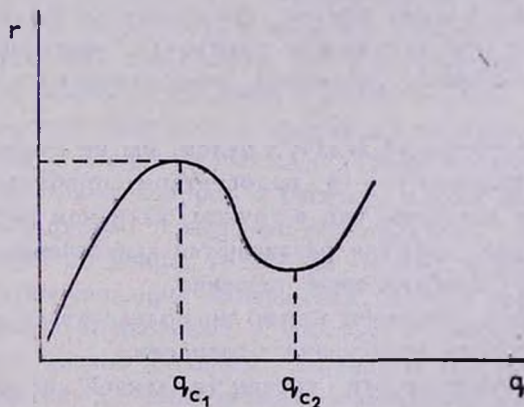


Рис. 3.

касание) двух соседних траекторий впервые появилось в точке q_{c_1} в момент t_{c_1} . На рис. 3 при $t > t_{c_1}$ касание траекторий имеет место в двух точках q_{c_1} и q_{c_2} .

В трехмерном случае происходит, по-существу, то же самое, но вдоль оси, направление которой заранее неизвестно и должно быть найдено из решения задачи.

Удобно ввести тензор деформаций $D_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$, определяя его условием

$$d\vec{r}_i = D_{ik} dq_k, \quad D_{ik} = B(t) \frac{\partial S_i}{\partial q_k} + A(t) \delta_{ik}.$$

Возмущения, растущие под влиянием тяготения, являются безвихревыми, откуда следует, что $\partial S_i / \partial q_k = \partial S_k / \partial q_i$ и тензор D_{ik} симметричен. Его можно привести к главным осям; направление осей для разных частиц различно, но для данной частицы постоянно. Обозначая диагональные члены в главных осях $\partial S_1 / \partial q_1 = -\lambda_1$, $\partial S_2 / \partial q_2 = -\lambda_2$, $\partial S_3 / \partial q_3 = -\lambda_3$, получим

$$\rho(\vec{q}, t) = \rho \left(1 - \lambda_1 \frac{B}{A}\right)^{-1} \left(1 - \lambda_2 \frac{B}{A}\right)^{-1} \left(1 - \lambda_3 \frac{B}{A}\right)^{-1}, \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — функции лагранжевой координаты частицы \vec{q} , а отношение B/A зависит только от времени. Если хотя бы одна из величин λ_i положительна, то к моменту t_c , когда $B(t_c)/A(t_c) = 1/|\lambda_i|$, произойдет обращение плотности в бесконечность.

Обращение плотности вещества в бесконечность в приближенном решении, очевидно, кладет предел применимости решения. Ясно, что в реальной задаче при увеличении плотности наступит момент, когда нельзя будет пренебречь давлением, учет которого и ограничит рост плотности.

Однако, рассматривая задачу в целом, мы не считаем пересечение траекторий и обращение $\rho \rightarrow \infty$ недостатком приближенного метода. Напротив, можно доказать, что в точном, истинном решении при равном нулю давлении события развиваются качественно точно так, как это предсказывает приближенное решение.

Приближенным решением можно воспользоваться для того, чтобы понять закономерности нарастания плотности.

В заданной совокупности частиц (в данной области изменения \vec{q}) есть определенная частица, первой достигающая бесконечной плотности в момент t_c . После этого бесконечная плотность достигается в соседних частицах. В физическом пространстве (т. е. в эйлеровых координатах \vec{r}) область бесконечной плотности представляет собой бес-

конечно тонкий диск. Количество сжатого вещества на единицу поверхности диска $\sigma_1/\text{см}^2$ конечно. Плотность максимальна в центре диска, где она возрастает как $\sqrt{t-t_0}$.

Размеры диска растут так же, как $\sqrt{t-t_c}$, так что общая масса диска пропорциональна $(t-t_c)^{3/2}$.

В предлагаемом решении момент t_c , когда в данной частице возникает $\rho = \infty$, не является особым для зависимости скорости и смещения частицы от времени. Но точно так же ведет себя частица и в точном решении: если $\rho \rightarrow \infty$, но σ конечно на всей поверхности диска, то гравитационный потенциал и сила тяготения остаются конечными сколь угодно близко к диску. Значит и в самом деле ускорение остается конечным, скорость и смещение остаются гладкими функциями времени вплоть до момента, когда давление, возникшее на диске, остановит частицу.

Возникновение дисков с большой плотностью на первый взгляд является чисто кинематическим эффектом; выше мы подчеркивали, что даже бесконечная плотность вещества в диске не вызывает особенностей скорости. Однако следует помнить, что сам закон изменения скорости, от которого зависят функции $B(t)$ и $S(q)$, в формуле (2) определяется гравитационным взаимодействием неоднородностей на всем протяжении времени до столкновения частиц.

Сжатие в диск идет за счет деформации по одной оси, перпендикулярной диску. По двум осям, лежащим в плоскости диска, может в это время происходить как сжатие, так и расширение. Поэтому совокупность частиц, образующих диск, в одних случаях может быть гравитационно связанной системой, в других же случаях диск может расширяться и в конце концов рассеяться. Таким образом, предлагаемое решение не исчерпывает вопроса о распаде однородного вещества на отдельные гравитационно связанные обособленные объекты. Но если вопрос и не решен до конца, то все же можно констатировать, что значительный этап эволюции возмущений удастся описать приближенным, но качественно правильным и простым решением.

Образование дисков большой плотности является неизбежным следствием развития длинноволновых возмущений достаточной амплитуды. Вещество, которое в приближенном решении не конденсируется в диск, останется несвязанным и в точной теории. Предлагаемое приближенное решение дает возможность выразить количество остающегося межгалактического вещества через параметры космологической модели и спектр возмущений.

Предлагаемое решение особенно хорошо подходит для рассмотрения адиабатических возмущений горячей модели.

В адиабатических возмущениях в горячей Вселенной на стадии до рекомбинации плотность барионов и температура связаны $\rho_B \sim T^3$. Как показал Силк [1], такие возмущения при длине волны меньше определенного предела (соответствующего $M_S = \rho_B \frac{\lambda^3}{8} \sim 10^{12} M_\odot$) затухают из-за фотонной вязкости. Таким образом, к моменту после рекомбинации остаются только возмущения с большей длиной волны.

Однако после рекомбинации излучение не препятствует сборанию в сгустки нейтрального газа.

При этом джинсовская длина волны, зависящая теперь только от газового давления, сразу падает до величины*, соответствующей $M_J = 10^6 M_\odot$. Таким образом, те возмущения, которые остались от периода до рекомбинации, действительно могут рассматриваться как длинноволновые в период после рекомбинации. Роль давления для этих возмущений мала, как и предполагается при пользовании решением (2).

Развивая теорию и сопоставляя ее с наблюдениями, мы либо найдем следы первичных плотных дисков в современных структурах, либо мы должны будем сделать вывод, что возмущения других типов — энтропийные, магнитные, но не адиабатические — играли главную роль в эволюции Вселенной. Для энтропийных возмущений нужно предполагать, что максимум соответствовал как раз $M_J = 10^6 M_\odot$; для таких возмущений теория неприменима и нельзя пренебречь давлением.

Потенциальность скорости. Покажем, что приближенное решение обладает также важным качественным свойством точного решения: описываемое им движение является безвихревым.

Для доказательства исходим из выражений

$$\vec{r} = A \vec{q} + B \vec{\xi}(q),$$

$$\vec{v} = \dot{A} \vec{q} + \dot{B} \vec{\xi}(q).$$

В этих выражениях $\vec{\xi}(q)$ удовлетворяет условию отсутствия вихря в q -пространстве. Физически это следует из условия рассмотрения

* Оба числа M_S и M_J даны для критической средней плотности $\bar{\rho} = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \sim 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$. Если $\bar{\rho} = \Omega \rho_c$, то $M_S \sim \Omega^{-3/2} M_J \sim \Omega^{-2}$. Если $\Omega < 0.05$, нужно учитывать гравитационное влияние излучения даже после рекомбинации [2].

возмущений, растущих под влиянием силы тяжести. Пока $b \ll a$; $\dot{b} \ll \dot{a}$ решение является точным (ошибка порядка b^2/a^2).

Но в точном решении вихрь равен нулю по общим теоремам для движения, происходящего под действием силы, обладающей потенциалом (силы тяготения).

Иначе можно увидеть то же самое, замечая, что в фурье-представлении растущим модам возмущения соответствуют продольные волны. Поэтому пекулярная скорость имеет вид

$$\vec{u} = \vec{v} - A \vec{q} = i \dot{B}(t) \int c(k) \vec{k} e^{i \vec{k} \cdot \vec{q}} d^3 k = \dot{B} \vec{\delta}(\vec{q}),$$

откуда сразу видно, что вихрь $\vec{\delta}$ равен нулю. Однако необходимо доказать нечто большее: для конечного (не малого) отношения b/a и \dot{b}/\dot{a} нужно доказать точное отсутствие вихря, притом в \vec{r} -пространстве. Прямолинейное решение задачи включает в себя решение первого уравнения относительно \vec{q} как функции \vec{r} . Подставляя затем $\vec{q}(\vec{r})$ во второе уравнение в принципе можно получить $\vec{v}(\vec{r})$ и вычислить искомый $(\text{rot } \vec{v})_i = \varepsilon_{ikl} \partial v_k / \partial r_l$. Понятно, что фактически с $\vec{\delta}(\vec{q})$, заданным в статистическом смысле, такая процедура неосуществима; она здесь описана с единственной целью пояснить сущность задачи.

Для решения задачи нужно использовать тот факт, что вихря нет в линейном приближении: ведь именно экстраполяция линейного приближения является сущностью предлагаемого решения.

Один способ заключается в том, что записываем

$$\vec{\delta}(\vec{q}) = \nabla_q \psi(\vec{q}).$$

В самом деле, если $\vec{\delta}$ безвихревое, то его можно записать как градиент скалярной функции поля $\psi(\vec{q})$.

Итак

$$\vec{r} = A \vec{q} + \nabla_q \psi(\vec{q}) = \nabla_q \left(\frac{A q^2}{2} + B \psi \right),$$

$$\vec{v} = \nabla_q \left(\frac{\dot{A} q^2}{2} + \dot{B} \psi \right).$$

Для доказательства того, что вихрь $\vec{v}(\vec{r})$ равен нулю, рассмотрим интеграл по замкнутому контуру $\oint \vec{v} d\vec{r}$. В силу однозначной связи

\vec{r} и \vec{q} , контуру интегрирования, замкнутому в r -пространстве, соответствует замкнутый контур в q -пространстве.

Остается переписать в q -пространстве выражение скалярного произведения ($\vec{v} \vec{d}r$). Получим, вводя обозначения

$$\vec{r}(x, y, z), \quad \vec{q}(\xi, \eta, \xi), \quad \psi_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \dots,$$

$$v_x(dx) = (\dot{A}\xi + B\psi_\xi) A d\xi + B\psi_{\xi\xi} d\xi + B\psi_{\xi\eta} d\eta + B\psi_{\xi\xi} d\xi,$$

$$\vec{v} \vec{d}r = \frac{AA}{2} d(q^2) + ABd(\psi) + \dot{A}B[d(\vec{q} \cdot \nabla_q \psi) d\psi] + \frac{B^2}{2} d(\nabla_q \psi)^2.$$

Поскольку $\vec{v} \vec{d}r$ удалось записать как сумму полных дифференциалов в q -пространстве, очевидно, что $\oint \equiv 0$ и вихря нет.

Второй способ доказательства того же основан на локальном подходе.

Рассмотрим тензор деформаций в q -пространстве:

$$T_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}.$$

Этот тензор симметричен — его симметрия выражает отсутствие вихря в q -пространстве, является следствием того, что $\partial \xi_i / \partial q_k = \partial \xi_k / \partial q_i$, так как ξ_i есть $\nabla_q \psi$.

Переход в r -пространство локально является аффинным преобразованием координат; произвольное аффинное преобразование могло бы нарушить симметрию (поскольку преобразуются компоненты \vec{q} , но не компоненты \vec{v}). Для правильного ответа существенно то, что совпадают главные оси тензора T_{ik} и тензора преобразования.

Выберем в данной точке q -пространства главные оси тензора T_{ik} , после чего он записывается

$$\begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{vmatrix}.$$

В этой системе скорость (i, j, k — орты)

$$\vec{v} = \vec{v}(q_0) + i T_1 (\xi + \xi_0) + j T_2 (\eta - \eta_0) + k T_3 (\xi - \xi_0).$$

Преобразование координат

$$x = x_0(q_0) + (a + bT_1)(\xi - \xi_0)$$

и аналогично для y и z .

Следовательно

$$\bar{v} = \bar{v}(q_0) + i \frac{T_1}{a + bT_1} (x - x_0) + \dots$$

Тензор деформации остался диагональным в r -пространстве в указанных осях, хотя отношение значений по разным осям изменилось. Диагональность в одной избранной системе означает симметрию как в этой, так и в любой другой системе, а симметрия тензора деформаций (в r -пространстве) совпадает с условием безвихревости.

Внутренней причиной является тот факт, что одна и та же безвихревая (по q) функция ψ определяет и скорость движения, и деформацию координат.

Заметим, что отсюда следует отсутствие вихря и в начале сжатия вещества ударной волной после достижения сингулярности ($\rho = \infty$). В первом приближении, без учета второй производной \bar{v} , ударная волна также лежит в плоскости 2 главных значений тензора T_{ik} , деформация в 4 раза (в соответствии с изменением плотности в волне) координаты, нормальной волне, не меняет диагональности тензора деформации.

Физические условия в сжатом газе. Общая картина сжатия, вытекающая из предыдущего, заключается в том, что процесс достижения большой плотности идет одномерно, решающим является движение вдоль одного из направлений. На соответствующей оси существует одна точка, в которой сжатие идет наиболее быстро и впервые достигается бесконечная плотность (в приближении нулевого начального давления). В действительности в этой точке сжатие происходит адиабатически. Ближайшие частицы также сжимаются адиабатически, но еще раньше, чем будет достигнута бесконечная плотность, эти частицы наталкиваются на слой ранее сжатого газа. Таким образом, для всех частиц, кроме одной, сжатие происходит в два этапа: сперва адиабатическое, а затем в ударной волне, останавливающей вещество.

В результате в диске возникает распределение плотности сжатого газа поперек диска с острым максимумом в середине, $\rho \sim \xi^{-1/2}$, где ξ — расстояние от средней плоскости. Покажем, как выводится этот асимптотический закон и дадим оценку входящей в него константы, рассматривая упрощенную одномерную модель.

Зададимся законом движения

$$x = t^{3/2} q - A t^{1/2} \sin kq.$$

Здесь рассматривается плоская космологическая модель $\Omega = 1$

$\rho = 1/6\pi G t^2$. Единицу времени удобно выбрать $2/3 H_0^{-1}$, H_0 — параметр Хаббла, так, чтобы в настоящее время $t = 1$; тогда $t = (1+z)^{-1/2}$, где z — красное смещение.

За единицу скорости выберем скорость света, так что единица длины равна $2/3 \frac{c}{H_0}$.

Характерная масса равна

$$M = \rho \left(\frac{\lambda}{2} \right)^3 = \rho \left(\frac{\pi}{k} \right)^3.$$

В принятых единицах

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{1}{M_\odot} \frac{3 H_0^2}{8\pi G} \pi^3 \left(\frac{c}{3 H_0} \right)^3 \frac{1}{k^3} = \frac{\pi^2}{9} \frac{c^3}{G H_0 M_\odot} \frac{1}{k^3} = 0.7 \cdot 10^{23} \frac{1}{k^3}.$$

$$k = 4000 \left(\frac{10^{12} M_\odot}{M} \right)^{1/3}.$$

Массу M не следует смешивать с массой одного диска, особенно в момент возникновения диска. Константу A — амплитуду возмущения — выразим через момент возникновения бесконечной плотности. Из условия

$$\frac{\partial x}{\partial q} = t^{3/2} - A t^{1/2} k \cos kq = 0, \quad q = 0$$

получим

$$A = t_c^{1/2} k^{-1} = (1+z_c)/k$$

Итак, основное уравнение перепишем в виде

$$kx = t^{3/2} \varphi - t^{1/2} t_c^{-3/2} \sin \varphi, \quad \varphi = kq$$

и займемся динамикой сжатия.

В порядке последовательных приближений примем, что толщина диска мала, и вещество останавливается именно там, где впервые получено $\rho = \infty$, т. е. в начале координат, $x = 0$.

Отсюда

$$\frac{t}{t_c} = \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{-2/3} = 1 + \frac{\varphi^2}{4}.$$

Величина φ удобна, поскольку через нее выражается количество вещества, приходящееся на единицу площади диска (от $-\varphi$ до $+\varphi$).

$$\begin{aligned} \mu &= 2\varphi + \frac{1}{k} \frac{2}{3} \frac{c}{H_0} \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1+z_c)^2 = \\ &= \varphi \cdot 6 \cdot 10^{-5} \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{1/2} (1+z_c)^2 \text{ г/см}^2. \end{aligned}$$

В рассматриваемом одномерном приближении доля вещества, подвергнувшегося сжатию, равна φ/π .

Если бы вещество не наталкивалось на плоскости $x=0$, то бесконечная плотность за счет касания соседних траекторий при $t < t_c$ достигалась бы там, где

$$\frac{\partial x}{\partial q} = t^{1/2} \left[1 - \left(\frac{t}{t_c} \right)^{1/2} \cos \varphi \right] = 0.$$

Сравнивая два условия

$$x = 0, \quad (t/t_c)^{1/2} = \varphi/\sin \varphi = 1 + \varphi^2/6,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = 0, \quad \left(\frac{t}{t_c} \right)^{1/2} = \frac{1}{\cos \varphi} = 1 + \frac{\varphi^2}{2},$$

мы видим, что при равном $t/t_c = 1 + \varepsilon$,

$$\varphi(x=0) = \sqrt{6\varepsilon}, \quad \varphi\left(\frac{\partial x}{\partial q} = 0\right) = \sqrt{2\varepsilon},$$

$$\varphi(x=0) = \varphi\left(\frac{\partial x}{\partial q} = 0\right) \sqrt{3}.$$

Это соотношение сохраняется в начале конденсации в любой модели, независимо от упрощающих предположений.

Асимптотически в упрощенной модели при $t \rightarrow \infty$, $\varphi(x=0) \rightarrow \pi$ (конденсируется все вещество), $\varphi\left(\frac{\partial x}{\partial q} = 0\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (т. е. без учета столкновения конденсируется половина вещества). Однако здесь одномерное рассмотрение не обобщается на трехмерную задачу.

Выразим через φ скорость, с которой вещество ударяется о диск; после точной формулы приводим простое выражение для $\varphi \ll 1$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{kt} \left(\frac{2}{3} \varphi t^{1/2} - \frac{4}{3} \frac{t^{1/2}}{t_c^{1/2}} \sin \varphi \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi t_c^{-1/2}}{k} = \\ &= -\frac{2}{3} \varphi \frac{c \sqrt{1+z_c}}{4000} \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= -\varphi \cdot 5 \cdot 10^9 \sqrt{1+z_c} \left(\frac{M}{10^{13} M_\odot} \right)^{1/2} \text{ см/сек.}$$

Отметим простое правило: скорость падения частицы на диск равна той скорости, с которой данная частица удалялась бы от центральной частицы в невозмущенном движении. Найдем плотность, до которой сжимается частица перед ударом,

$$\frac{\partial x}{\partial q} = t^{1/2} \left(1 - \frac{t^{1/2}}{t_c^{1/2}} \cos \varphi \right),$$

причем $t^{1/2}/t_c^{1/2} = (\sin \varphi / \varphi)^{-1}$ из условия $x = 0$ окончательно ($\rho_{0,sh}$ — перед ударом, $\hat{\rho}_{0,sh} = 4\rho_{0,sh}$ — после удара)

$$\frac{\rho_{0,sh}}{\rho} = \left[t^{-1/2} \frac{\partial x}{\partial q} \right]^{-1} = \left(1 - \frac{\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{-1} = 3/\varphi^2.$$

Давление, которое достигается в ударной волне, останавливающей вещество, равно $\frac{4}{3} \rho_{0,sh} u^2$.

Получим

$$\begin{aligned} p &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\varphi^2} \cdot 2 \cdot 10^{-29} (1+z_c)^3 \varphi^2 \cdot 25 \cdot 10^{12} \left(\frac{M}{10^{13} M_\odot} \right)^{1/2} (1+z) = \\ &= 10^{-16} (1+z_c)^4 (M/10^{13} M_\odot)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\varphi \ll 1$, $t - t_c \ll t_c$, $z_c - z \ll z_c$ оказывается, что давление на поверхности диска остается постоянным, не обращается ни в 0, ни в ∞ , при $\varphi \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что после прохождения фронта ударной волны вещество остается при постоянном давлении (по крайней мере пока $\varphi \ll 1$), а значит и не меняет свою плотность и не движется. Масса на единицу поверхности пропорциональна φ , $\mu = a\varphi$. Следовательно распределение плотности по толщине найдем из условия

$$d\mu = \rho dx = \frac{\rho}{\varphi^2} dx = a d\varphi,$$

откуда

$$x = \gamma \varphi^3, \quad \rho = \delta/x^{1/2}.$$

Дадим оценку максимальной и минимальной температуры сжатого вещества с учетом того, что начальная температура газа T_g отлична от нуля.

По-видимому, $T_g = T_r$ при $z > z_1$, где z_1 порядка 400 за счет неполной рекомбинации и связи электронов с излучением, а T_r — температура излучения.

Следовательно при $z = z_1$ имеем

$$T_g = 2.7 (1 + z_1), \quad \rho_g = 2 \cdot 10^{-29} (1 + z_1)^3,$$

$$p_g = RT\rho = 8.3 \cdot 10^7 \cdot 2.7 \cdot 2 \cdot 10^{-29} (1 + z_1)^4 = 5 \cdot 10^{-21} (1 + z_1)^4.$$

В момент максимального сжатия дано давление p (см. выше), и по адиабатическим формулам получим

$$T = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{2/5} = 250 (1 + z_1)^{-2/5} (1 + z_c)^{3/5} \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{1/5}$$

и соответственно для плотности

$$\rho = 2 \cdot 10^{-29} (1 + z_1)^3,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_g} \right)^{3/5} &= 10^{-29} (1 + z_1)^{9/5} (1 + z_c)^{12/5} \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{3/5} \cong \\ &\cong 4 \cdot 10^{-25} (1 + z_c)^{12/5} \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{3/5}. \end{aligned}$$

Однако эти величины относятся лишь к самой центральной плоскости.

Рассмотрим физические условия в веществе, сжатом ударной волной. При $u < 1.6 \cdot 10^9$, $T < 10^4$ °К, и водород остается нейтральным. При $u > 6 \cdot 10^9$ происходит практически полная ионизация водорода. Рассмотрим скорость рекомбинации, сравнивая ее со скоростью роста диска. Зададимся $M = 10^{12} M_\odot$ для масштаба возмущения и $z_c = 4$.

Получим

$$\begin{aligned} p &= 1.5 \cdot 10^{-13}, \quad |u| = \varphi \cdot 10^7, \quad t_c = \frac{2}{3H_0} (1 + z_c)^{-3/2} = 2 \cdot 10^{17} \cdot 0.1 = \\ &= 2 \cdot 10^{16} \text{ сек}, \quad \frac{t}{t_c} = 1 + \frac{\varphi^2}{4}, \quad t - t_c = t_c \frac{\varphi^2}{4} = 5 \cdot 10^{13} \varphi^2. \end{aligned}$$

При температуре 10^4 °К в ионизованном газе плотность $\eta = p/2KT = 0.05$ 1/см³ и характерное время рекомбинации

$$\tau = (a\eta)^{-1}, \quad \text{где } a = 4 \cdot 10^{-13}, \quad \tau = 5 \cdot 10^{13} \text{ сек}.$$

Полная ионизация происходит при $u = 6 \cdot 10^9$, $\varphi = 0.6$, при этом $t - t_c = 5 \cdot 10^{13} \cdot 0.36 = 2 \cdot 10^{14}$ сек.

Таким образом, время рекомбинации несколько меньше общего времени образования диска. В первом приближении можно считать (в типич-

ных условиях, выбранных выше для численного примера), что большая часть вещества диска представляет собой нейтральный атомный водород с температурой ниже 10^4 °К.

Образование молекул и дальнейшее охлаждение [3] здесь не рассматриваем.

Остановимся в заключение на роли тяготения в диске. Сравним с давлением ударной волны то давление, которое в середине диска создается тяготением. При поверхностной плотности μ г/см² давление тяготения равно $p_m = \frac{\pi}{2} G \mu^2$. Подставляя выражение μ , получим

$$P_m = \varphi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-16} (1 + z_c)^2 \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, отношение P_m/P_{sh} зависит только от φ и достигает 1 лишь при $\varphi \sim 1$.

$$P_m/P_{sh} = 1.6 \varphi^2.$$

Следовательно, при приближении конденсации к середине ($\varphi \sim 1 + 1.5$) тяготение в диске увеличивает в 2—3 раза давление, и диск оказывается в среднем гравитационно связанным по отношению к расширению вдоль оси конденсации.

Статистический аспект приближенной теории. Рассмотрим трехмерную задачу со спектрально заданным возмущением.

С учетом того, что в растущем типе возмущений заданы лишь продольные волны, запишем

$$\vec{r} = A \vec{q} + B \int i \vec{k} c(\vec{k}) e^{i \vec{k} \vec{q}} d^3 k,$$

где A и B суть две известные (зависящие только от космологической модели, т. е. от Ω) функции времени или красного смещения z , отношение $B/A = f$.

Тензор деформаций

$$D_{jk} - \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = A (\partial_{jk} - f \int k_j k_k c e^{i \vec{k} \vec{q}} d^3 k).$$

Отсюда для плотности получим

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{(1 - \lambda_1 f)(1 - \lambda_2 f)(1 - \lambda_3 f)}.$$

В линейном приближении

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = f(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = f \operatorname{Sp} D_{jk} \text{ и } \left(\frac{\partial \rho}{\rho} \right)^2 = f^2 \sigma^2.$$

Обратимся к статистическому анализу нелинейного выражения $\rho(x)$, следующего из приближенной теории.

Как показал А. Г. Дорошкевич, в сделанных предположениях функция распределения вероятности по трем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеет довольно сложный вид.

До диагонализации отдельно взятая компонента D_{jk} является гауссовой. Поворот тензора представляет собой линейное преобразование при данных углах поворота — но при диагонализации углы поворота зависят от самих значений компонент, поэтому $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ выражаются нелинейно через компоненты (корни кубического уравнения). Сюда добавляется еще неаналитическая процедура выбора названий: уславливаемся $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Из размерности очевидно, что вероятности зависят только от безразмерных отношений $m_1 = \lambda_1/\sigma$, $m_2 = \lambda_2/\sigma$, $m_3 = \lambda_3/\sigma$. Любопытной особенностью функции $P(m_1, m_2, m_3)$ является наличие в ней множителя $(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3)$. Вероятность совпадения или близости двух главных значений меньше, чем вероятность совпадения или близости двух независимых величин. Это обстоятельство дает дополнительный аргумент в пользу собирания вещества в диск, а не в линии или точки.

Для дальнейшего перейдем к функции одной переменной $\Phi(m)$, дающей вероятность того, что $\lambda_1 > m\sigma$; $m_1 > m$. Функция Φ получается интегрированием $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ по $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1$ в пределах $-\infty < \lambda_3 < \lambda_2$, $-\infty < \lambda_2 < \lambda_1$, $m\sigma < \lambda_1 < \infty$. Согласно Дорошкевичу, об $\Phi(m)$ известно

$$\Phi(m) \simeq 0.92 - 0.4 - 0.74 m^2 \dots, \quad m \ll 1,$$

$$\begin{aligned} \Phi(m) \simeq 0.12 m l^{-2.5m^2} \left[1 - \frac{0.6}{m^2} \left(1 - \frac{0.2}{m^2} + \frac{0.12}{m^4} - \dots \right) \right] + \\ + \frac{0.145}{m} e^{-3.75m^2} \left[1 - \frac{0.13}{m^2} + \frac{0.26}{m^4} \dots \right], \quad m \gg 1, \end{aligned}$$

Теперь можно дать выражение для доли вещества, подвергшегося бесконечному сжатию

$$\mu(t) = \Phi(m), \quad \lambda_1 f = 1, \quad \frac{\lambda_2}{\sigma} \sigma f = m \sigma f = 1, \quad m = 1/\sigma f,$$

где σ характеризует начальную амплитуду возмущения плотности, а $f(t)$ — закон нарастания возмущений. Так как $(\delta\rho/\rho)^2 = z^2 f^2$ при линейной экстраполяции самой плотности, то можно сформулировать результат следующим образом: нелинейная приближенная теория дает долю вещества, подвергшегося бесконечному сжатию, как однозначную функцию от одного только параметра — линейно экстраполированного среднего отклонения плотности. Эта связь не зависит ни от вида спектра, ни от космологической модели.

Приведем таблицу

Таблица 1

$\sqrt{(\delta\rho/\rho)^2}$	0.5	0.83	1	1.33	1.5	2	2.2	3	10
$\mu = \Phi$	10^{-5}	10^{-2}	0.023	0.16	0.2	0.33	0.48	0.62	0.873

Согласно предыдущему, на ранней стадии доля вещества, сжатого ударной волной, по крайней мере в $\sqrt{3}$ раз больше, чем количество вещества, подвергшегося бесконечному сжатию, без учета удара. Приблизительно $\mu \sqrt{3} = 0.3$ в момент, когда по линейной теории $\delta\rho/\rho = 1.45$.

С помощью таблицы и функций $f(t, \Omega)$ можно дать ответ на следующий вопрос: пусть задано значение $\mu = \mu_0$ сегодня; при каком z в среднем происходила конденсация? Более конкретно дадим $z_{1/2}$ при котором $\mu = \mu_0/2$.

Приводим несколько численных примеров

$$\Omega = 1 \begin{array}{l} \mu_0 \\ z_{1/2} \end{array} \left| \begin{array}{ll} 0.1 & 0.5 \\ 0.09 & 0.5 \end{array} \right.$$

$$\Omega = \frac{1}{30} \begin{array}{l} \mu_0 \\ z_{1/2} \end{array} \left| \begin{array}{ll} 0.5 & 0.85 \\ 4.2 & \sim 21 \end{array} \right.$$

Возможности элементарной теории без применения счетных машин, по-видимому, исчерпываются информацией того типа, который приведен выше.

Решение таких вопросов, как статистика размеров дисков, доля гравитационно-связанных пар (или групп) дисков и т. п., по-видимому, легче проводить грубым численным счетом реализаций, а не сверхточной аналитико-вероятностной теорией общего случая.

Тем более это относится к расчету дальнейшей судьбы дисков.

Пользуюсь случаем искренне поблагодарить В. Ф. Дьяченко за идею лагранжевых координат и благожелательное отношение к численным расчетам, А. Г. Дорошкевича за помощь и справедливую, острую критику.

Институт прикладной математики
АН СССР

THE SEPARATION OF UNIFORM MATTER INTO PARTS UNDER THE ACTION OF GRAVITATION

Ya. B. ZELDOVICH

An approximate solution is given for the problem of growth of perturbations during the expansion of matter without pressure.

The solution is qualitatively correct also when the perturbations are not small. Infinite density is obtained first on disclike surfaces by unilateral compression.

The following layers are compressed first adiabatically and then by a shock wave. Physical conditions in compressed matter are analysed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Silk*, *Ap. J.*, 151, 454, 1968.
2. *А. Д. Чернин*, *Астроф. ж.*, 42, 1124, 1965.
3. *R. H. Dicke*, *P. J. Peebles*, *Ap. J.*, 194, 838, 1968.
4. *А. Г. Дорошкевич*, *Астрофизика* (в печати).