АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 НОЯБРЬ, 1968 ВЫПУСК 4

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ. I

Г. С. СААКЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 17 апреля 1968

Рассмотрен релятивистский вариант обобщенной теории гравитации. Сформулированы законы сохранения. Выведены уравнения поля для внутренней области сферически-симметрического распределения масс и приведено внешнее решение, служащее в качестве условий на поверхности конфигурации.

Построены модели массивных сверхплотных статических конфигураций, обладающих чрезвычайно большими дефектом массы и гравитационным красным смещением.

1. За последние два десятилетия в астрофизике был открыт ряд важных явлений, не нашедших пока последовательного, лишенного противоречий теоретического объяснения. По-видимому, преждевременно говорить о неполноте существующей физической теории, однако имеются некоторые основания сомневаться в ее безграничной применимости. Поэтому, одновременно с исследованиями, опирающимися на уже установленные законы физики, вполне разумно предпринимать поиски решений возникших проблем на новых путях, не исключающих возможность видоизменения некоторых из этих законов. В этом смысле заманчивые, далеко еще не до конца исследованные возможности, нам кажется, скрыты в обобщенной теории гравитации, развитой в основном в работах Иордана и сотрудников [1, 2]. Этому вопросу посвящена также работа [3]. В основу этой теории заложена идея Дирака [4] о возможном непостоянстве гравитационной константы. Интересно отметить, что эта теория гармонирует с некоторыми космогоническими представлениями Амбарцумяна [5, 7], которые, по сути дела, являются логическим обобщением большого количества наблюдательных фактов.

Не все аспекты модифицированной теории гравитации хорошо разработаны, и, что особенно важно, она не доведена до такого уровня, чтобы можно было говорить о ее сравнении с астрономическими фактами. Поэтому необходимо получить новые эффекты, несодержащиеся в теории тяготения Ньютона—Эйнштейна. Нам хотелось бы подчеркнуть условность развиваемой теории: о справедливости ее можно говорить лишь после сравнения предсказываемых эффектов с наблюдательными фактами.

В наших предыдущих работах [8—10] исследовался ньютоновский вариант обобщенной теории гравитации. Поле характеризовалось двумя скалярными функциями, а именно, потенциалом φ и гравитационным скаляром k (под этим подразумевается гравитационная „постоянная", которая в обобщенной теории считается переменной). Были рассчитаны параметры моделей статических сферических конфигураций, состоящих из несжимаемой жидкости, вырожденного газа нейтронов и вырожденного электронно-ядерного газа. Оказалось, что при разумном выборе граничных условий во всех случаях гравитационный скаляр в центре конфигураций исчезает, а при удалении от него монотонно растет и на бесконечности стремится к ньютоновскому значению. Далее, кривая зависимости массы M от плотности в центре ρ_0 состоит из двух ветвей, то есть функция $M(\rho_0)$ является двузначной. Нижняя ветвь, названная нормальной, весьма мало отличается от соответствующей кривой $M(\rho_0)$, полученной на основе обычной теории тяготения. Другая, так называемая аномальная ветвь, изображает барионные и электронные конфигурации с массами от весьма маленьких до порядка галактической и выше. Радиусы этих тел меньше их гравитационного радиуса*, поэтому эти результаты даже в качественном отношении нуждаются в проверке на основе релятивистской теории.

Эта и последующий ряд наших работ посвящаются обобщенной теории гравитации Эйнштейна. Следуя Дираку и Иордану, гравитационную „постоянную" мы будем считать функцией пространственно-временных координат. Очевидно, всякие изменения в существующей теории гравитации должны быть согласованы с известными фактами небесной механики. Принцип соответствия подробно будет обсуждаться в нашей следующей работе.

2. В обобщенной теории гравитации поле характеризуется 11 независимыми функциями: компонентами метрического тензора g_{ik} и скаляром $\varkappa = 8\pi k/c^2$. В основу теории кладется вариационный принцип Иордана

---

* Мы сохраняем такое название для величины $r_g = 2M$, хотя даже в релятивистском варианте обобщенной теории сингулярность типа шварцшильдовской отсутствует.

$$S = \frac{c}{2}\int \varkappa^{\eta}\left(R + \frac{2\varkappa}{c^2}\Lambda + \zeta g^{ik}\frac{\varkappa_i \varkappa_k}{\varkappa^2}\right)\sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна пространства, Λ — плотность функции Лагранжа для вещества, $\varkappa_i = \partial\varkappa/\partial x^i$, η и ζ — безразмерные постоянные параметры новой теории. Принятое выражение для действия S, помимо хорошо известных стандартных свойств, удовлетворяет следующим требованиям: при $\varkappa = \mathrm{const}$ оно совпадает с соответствующим выражением в теории гравитации Эйнштейна и, кроме того, не содержит новых размерных постоянных. Квадрат четырехмерного интервала мы пишем в виде

$$ds^2 = -g_{ik}\,dx^i dx^k. \tag{2}$$

Для вариации действия имеем

$$\begin{gathered}\delta S = \int \varkappa^{\eta}\Bigg\{\Bigg[R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} - \frac{\varkappa}{c^2}T_{ik} + (\zeta - \eta(\eta-1))\frac{\varkappa_i\varkappa_k}{\varkappa^2} - \eta\frac{\varkappa_{i;k}}{\varkappa} + \\ + \eta g_{ik}\frac{\varkappa^l_{;l}}{\varkappa} - \frac{\zeta - 2\eta(\eta-1)}{2}g_{ik}\frac{\varkappa_l\varkappa^l}{\varkappa^2}\Bigg]\delta g^{ik} + \frac{\eta}{\varkappa}\Bigg[R + \frac{2(\eta+1)}{\eta c^2}\varkappa\Lambda - \\ - \frac{\zeta(\eta-2)}{\eta}\frac{\varkappa_l\varkappa^l}{\varkappa^2} - \frac{2\zeta}{\eta}\frac{\varkappa^l_{;l}}{\varkappa^2}\Bigg]\delta\varkappa\Bigg\}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где ; означает ковариантное дифференцирование, $\varkappa^l = g^{lk}\varkappa_k$, а тензор энергии-импульса связан с плотностью функции Лагранжа Λ соотношением

$$T_{ik} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial g^{ik}_{;l}}\right].$$

Для сплошной среды, при отсутствии диссипативных процессов

$$T_{ik} = (P + \rho)u_i u_k + Pg_{ik}, \tag{4}$$

где P — давление, ρ — плотность энергии и u_i — четырехмерная скорость.

Из (2) получается следующая система уравнений

$$\begin{gathered}[\zeta - \eta(\eta-1)]\frac{\varkappa_i\varkappa_k}{\varkappa^2} - \eta\frac{\varkappa_{i;k}}{\varkappa} + g_{ik}\left[\eta\frac{\varkappa^l_{;l}}{\varkappa} - \frac{\zeta - 2\eta(\eta-1)}{2}\frac{\varkappa_l\varkappa^l}{\varkappa^2}\right] + \\ + R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{\varkappa}{c^2}T_{ik},\end{gathered} \tag{5}$$

$$R + \frac{2(\eta+1)}{\eta c^2}\varkappa\Lambda - \frac{\zeta(\eta-2)}{\eta}\frac{\varkappa_l\varkappa^l}{\varkappa^2} - \frac{2\zeta}{\eta}\frac{\varkappa^l_{;l}}{\varkappa} = 0. \tag{6}$$

Полученные уравнения можно привести к более удобному виду. С этой целью первое из них умножим на g^{ik} и просуммируем по повторяющимся индексам, затем, учитывая второе уравнение, находим

$$\frac{\varkappa^{l}_{;l}}{\varkappa}+(\eta-1)\frac{\varkappa_l\varkappa^l}{\varkappa^2}=\frac{\eta\varkappa}{c^2(3\eta^2-2\zeta)}\left(T-2\frac{\eta+1}{\eta}\Lambda\right). \qquad (7)$$

Теперь уравнение (6) умножим на $g_{ik}/2$, и сложим с (5), далее, учитывая (7), получаем

$$R_{ik}-\eta\frac{\varkappa_{i;k}}{\varkappa}+[\zeta-\eta(\eta-1)]\frac{\varkappa_i\varkappa_k}{\varkappa^2}=$$
$$=\frac{\varkappa}{c^2}\left(T_{ik}+\frac{\zeta-\eta^2}{3\eta^2-2\zeta}Tg_{ik}\right)-\frac{\eta(\eta+1)\varkappa\Lambda g_{ik}}{c^2(3\eta^2-2\zeta)}. \qquad (8)$$

Для того, чтобы перейти к обозначениям Иордана [1], в вышеприведенных формулах мы должны сделать следующие подстановки

$$g_{ik}\to-g_{ik},\quad \varkappa_k\to\varkappa_k,\quad \Lambda\to-\Lambda,\quad R\to R,\quad T\to-T.$$

Заметим, что в вариационном принципе (1) можно R заменить величиной

$$G=g^{ik}\left[(\Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm}-\Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km})+\frac{\eta}{\varkappa}(\Gamma^{l}_{ik}\varkappa_l-\Gamma^{m}_{im}\varkappa_k)\right], \qquad (9)$$

которая не содержит вторых производных от g_{ik}. Хотя G не является скаляром, но $\int\varkappa^{\eta}G\sqrt{-g}\,d\Omega$ является скаляром и совпадает с $\int\varkappa^{\eta}R\sqrt{-g}\,d\Omega$.

3. Уравнения движения можно получить из следующего вариационного принципа

$$\delta S_m=\delta\int\varkappa^{\eta+1}\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega=0. \qquad (10)$$

Здесь варьированию подлежат траектории частиц,

$$x'^k=x^k+\xi^k,$$

где ξ^k — бесконечно малые величины. При этом для δg^{ik} и $\delta\varkappa$ получается

$$\delta g^{ik}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i},\qquad \delta\varkappa=-\varkappa_k\xi^k. \qquad (11)$$

Из (10) с учетом (11) получаем

$$\delta S_m = \int [-(\eta+1)\varkappa^{\eta}\sqrt{-g}\,\Lambda\varkappa_{,l}\,\xi^l + \varkappa^{\eta+1}\,\delta(\sqrt{-g}\,\Lambda)]\,d\Omega =$$

$$= \int [(\varkappa^{\eta+1}\,T_l^k)_{;k} - (\eta+1)\,\varkappa^{\eta}\,\Lambda\varkappa_{,l}]\,\xi^l\sqrt{-g}\,d\Omega = 0.$$

Отсюда из условия произвольности вариаций координат ξ^l следует

$$(\varkappa^{\eta+1}\,T_l^k)_{;k} = (\eta+1)\,\varkappa^{\eta}\,\Lambda\varkappa_{,l}. \tag{12}$$

Это и есть искомые уравнения гидродинамики.

Соотношение (12) можно получить и непосредственно из уравнений поля. С этой целью в (5) сперва поднимем индекс k, умножим на $\varkappa^{\eta}$ и затем вычислим ковариантную производную по k. Далее (6) умножим на $0.5\,\eta\varkappa^{\eta-1}\,\varkappa_{,k}\,\delta_l^k$ и полученное уравнение сложим с предыдущим, в результате получаем соотношение (12).

При наличии электромагнитного поля в формуле (1) под интегралом необходимо добавить следующие два члена

$$\frac{2\varkappa}{c^3}A_k\,j^k - \frac{\varkappa}{8\pi c^2}F_{lk}F^{lk},$$

где j^k — плотность тока, A_k — четырехмерный потенциал и $F_{lk} = A_{k;l} - A_{l;k}$. Для вывода уравнений электромагнитного поля мы должны зафиксировать все величины, характеризующие гравитационное поле и траекторию частиц, подвергая виртуальным изменениям потенциалы A_l. В результате получается вторая пара уравнений Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,\varkappa^{\eta+1}F^{lk}) = \frac{4\pi}{c}\varkappa^{\eta+1}j^l.$$

Отсюда следует уравнение непрерывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,\varkappa^{\eta+1}j^l) = 0.$$

Итак, новая теория гравитации содержит два безразмерных параметра η и ζ. Из рассмотрения трех эффектов общей теории относительности и из учета результатов наблюдений удается найти одно условие, связывающее их. Поэтому необходимо привлечь еще другие соображения для определения численного значения одного из них.

Из (12) и последнего уравнения непрерывности видно, что в новой теории при $\eta \neq -1$ не выполняются законы сохранения энергии и электрических зарядов в таком виде, в каком они известны нам до сих пор. Если же положить $\eta = -1$, то получим обычные законы сохранения:

$$T^{k}_{l;\,k}=0, \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\sqrt{-g}\,j^{i})=0.$$

Впредь мы будем полагать $\eta=-1$. Уравнения (7) и (8) для этого значения параметра приобретают следующий вид

$$\varkappa^{l}_{;\,l}-2\,\frac{\varkappa_{l}\varkappa^{l}}{\varkappa^{2}}=\frac{\varkappa T}{c^{2}(2\zeta-3)}, \tag{14}$$

$$R^{k}_{l}+\frac{\varkappa^{k}_{;\,l}}{\varkappa}+(\zeta-2)\,\frac{\varkappa_{l}\varkappa^{k}}{\varkappa}=\frac{\varkappa}{c^{2}}\left(T^{k}_{l}+\frac{\zeta-1}{3-2\zeta}\,T\delta^{k}_{l}\right). \tag{15}$$

Приведем также формулу

$$R=\frac{2\zeta}{c^{2}(3-2\zeta)}\,\varkappa T-\zeta\,\frac{\varkappa_{l}\varkappa^{l}}{\varkappa^{2}}, \tag{16}$$

которая получается из (14) и (15).

4. Рассмотрим статическое гравитационное поле со сферической симметрией. Квадрат четырехмерного интервала запишем в виде

$$ds^{2}=c^{2}e^{\nu}dt^{2}-e^{\lambda}dr^{2}-r^{2}(d\theta^{2}+\sin^{2}\theta\,d\varphi^{2}), \tag{17}$$

где ν, λ неизвестные функции r. Из (4) получаем

$$T^{1}_{1}=T^{2}_{2}=T^{3}_{3}=P, \qquad T^{0}_{0}=-\rho. \tag{18}$$

Для отличных от нуля компонент тензора R^{k}_{l} имеем

$$R^{0}_{0}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{\nu'}{r}-\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'^{2}\right),$$

$$R^{1}_{1}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'^{2}\right),$$

$$R^{2}_{2}=R^{3}_{3}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2r}\lambda'-\frac{\nu'}{2r}-\frac{1}{r^{2}}\right)+\frac{1}{r^{2}}\cdot$$

Учитывая эти выражения и (18), из (14) и (15) находим

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa''}{\varkappa}+\frac{\varkappa'(\nu'-\lambda')}{2\varkappa}+\frac{2\varkappa'}{r\varkappa}-\frac{2\varkappa'^{2}}{\varkappa^{2}}=\frac{\varkappa(\rho-3P)}{c^{2}(3-2\zeta)}\,e^{\lambda},\\ \frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'}{r}-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^{2}}{4}+\frac{\varkappa'\nu'}{2\varkappa}=\frac{(\zeta-2)\rho+3(\zeta-1)P}{c^{2}(3-2\zeta)}\,\varkappa e^{\lambda},\end{gathered} \tag{19}$$

$$\frac{\nu'\lambda'}{2r}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\varkappa''}{\varkappa}-\frac{\varkappa'\lambda'}{2\varkappa}+(\zeta-2)\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}=\frac{\zeta P+(1-\zeta)\rho}{c^2(3-2\zeta)}\varkappa e^{\lambda},$$

$$\frac{\lambda'-\nu'}{2r}+\frac{1}{r^2}(e^{\lambda}-1)+\frac{\varkappa'}{r\varkappa}=\frac{\zeta P+(1-\zeta)\rho}{c^2(3-2\zeta)}\varkappa e^{\lambda}. \qquad (19)$$

Далее из (13) следует

$$P'+\frac{P+\rho}{2}\nu'=0. \qquad (20)$$

Для четырех неизвестных функций $\varkappa$, ν, λ и P мы имеем пять уравнений. Одно из уравнений является следствием остальных и может быть отброшено. Можно придти к сравнительно простым уравнениям, если в (12) второе и третье заменим их разностью, а взамен первого возьмем комбинацию I — II + III + IV, а последнее оставим без изменения. В результате получаем следующую систему четырех уравнений

$$\frac{\varkappa''}{\varkappa}+\frac{\zeta-4}{2}\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}+\frac{2\varkappa-r\varkappa'}{2r\varkappa}\lambda'+\frac{2\varkappa'}{r\varkappa}+\frac{1}{r^2}(e^{\lambda}-1)=\frac{1}{c^2}\varkappa\rho e^{\lambda},$$

$$\frac{\lambda'}{2r}-\frac{\nu'}{2r}+\frac{\varkappa'}{r\varkappa}+\frac{1}{r^2}(e^{\lambda}-1)=\frac{\zeta P+(1-\zeta)\rho}{c^2(3-2\zeta)}\varkappa e^{\lambda},$$

$$\frac{2\varkappa-r\varkappa'}{2r\varkappa}\nu'+\zeta\frac{\varkappa'^2}{2\varkappa^2}-\frac{2\varkappa'}{r\varkappa}-\frac{1}{r^2}(e^{\lambda}-1)=\frac{1}{c^2}\varkappa P e^{\lambda}. \qquad (21)$$

$$P'+\frac{P+\rho}{2}\nu'=0.$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать систему единиц $c=k_0=1$, $m_n^4 c^5/(32\pi^2 h^3)=1/4\pi$, где k_0 обычная гравитационная постоянная, m_n — масса нейтрона и h — постоянная Планка, деленная на 2π. Исключим из системы (21) ν' и введем переменную $k=\varkappa/8\pi$. Тогда после прсстых преобразований мы приходим к следующей системе,

$$\frac{P'}{P+\rho}=-\frac{r}{2-r\dfrac{k'}{k}}\left[8\pi kPe^{\lambda}+\frac{2}{r}\frac{k'}{k}-\frac{\zeta}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2+\frac{e^{\lambda}-1}{r^2}\right],$$

$$\lambda' = 16\pi kre^{\lambda}\left[\frac{\zeta P + (1-\zeta)\rho}{3-2\zeta} + \frac{P}{2 - r\frac{k'}{k}}\right] -$$

$$-2\frac{e^{\lambda}-1}{r}\cdot\frac{1-r\frac{k'}{k}}{2-r\frac{k'}{k}} + (2-\zeta)\frac{r\left(\frac{k'}{k}\right)^2}{2-r\frac{k'}{k}}, \tag{22}$$

$$\left(\frac{k'}{k}\right)' = 8\pi ke^{\lambda}\left\{(\rho - P) + \frac{r\frac{k'}{k}-2}{3-2\zeta}\left[\zeta P + (1-\zeta)\rho\right]\right\} - \frac{k'}{k}\,\frac{e^{\lambda}+1}{r}.$$

Для решения корректно поставленной внутренней задачи небесных тел необходимо к этим уравнениям добавить условие теплового равновесия, задать функцию распределения источников и коэффициенты переноса энергии (при этом в выражении (4) для тензора энергии — импульса необходимо учесть также процессы диссипации). Однако мы пока ставим перед собою более скромную задачу построения моделей звезд, состоящих из вырожденных газовых масс. Тогда нам остается к системе (22) добавить лишь уравнение состояния холодного вещества $P = P(\rho)$.

В качестве граничных условий, очевидно, мы должны потребовать исчезновение давления P и непрерывность функций λ, k и k' на поверхности конфигурации.

5. Внешнее решение уравнения поля приведено в [1]. Оно называется решением Гекмана и имеет следующий вид

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{\tau}\,(\tau^{-h} - \tau^{h})},$$

$$e^{-\lambda/2} = \frac{1}{2h}\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)\tau^{h} - \left(\frac{1}{2}-h\right)\tau^{-h}\right],$$

$$e^{\nu} = \tau^{1/(1+2\beta_0)}, \tag{23}$$

$$k = k_0\,\tau^{-\beta_0/(1+2\beta_0)},$$

где τ — переменный параметр, k_0, r_0 и β_0 — постоянные интегрирования и

$$h^2 = \frac{1}{4} - \frac{\beta_0}{2}\,\frac{1+\beta_0\zeta}{(1+2\beta_0)^2}. \tag{24}$$

При $\beta_0 = 0$, $h^2 = \frac{1}{4}$ (23) переходит в решение Шварцшильда. Для β_0 отрицательных $h^2 > 1/4$, а для положительных $h^2 < 1/4$. Здесь мы будем исследовать случай $\beta_0 < 0$, $h > 1/2$ (решение Гекмана инвариантно относительно замены h на $-h$). В случае $r_0 > 0$ имеем $0 < \tau < 1$, причем функция $r(\tau)$ является монотонно растущей: $r(0) = 0$ и $r(1) = \infty$. Когда $\tau \to 1$ метрика асимптотически становится евклидовой: $r \to \infty$, $e^{\lambda} \to e^{\nu} \to 1$, $k(r) \to k_0$. Из требования, чтобы на достаточно больших расстояниях обобщенная теория гравитации совпала с обычной, мы получаем $k_0 = 1$.

Сравнение решений Гекмана и Шварцшильда на больших расстояниях дает:

$$r_0 = 4hM(1 + 2\beta_0). \tag{25}$$

Из рассмотрения предельного случая можно определить также постоянную β_0. Это можно сделать, если решение уравнения (14) для случая $\rho \to 0$ сравнить с решением Гекмана на больших расстояниях. Таким путем Иорданом было найдено

$$\beta_0 = \frac{1}{2\zeta - 3}. \tag{25}$$

Таким образом остается один неопределенный параметр ζ, значение которого можно найти только путем сравнения выводов новой теории с экспериментом. В настоящее время известны три эффекта общей теории относительности (отклонение луча света, красное смещение и прецессия перигелия орбит планет), хорошо подтвержденные наблюдениями. Эти эффекты были исследованы и в обобщенной теории гравитации [1]. При этом оказывается, что красное смещение не дает ничего нового, а два других эффекта накладывают определенное ограничение на абсолютное значение ζ. Так, если потребовать, чтобы величина углового смещения перигелия орбиты пробного тела, вращающегося вокруг другого массивного небесного тела, совпадала с точностью до 2% (это точность измерения прецессии перигелия Меркурия) с результатом общей теории относительности с постоянным $\varkappa$, то получим следующее условие: $|4\beta_0/3| \leqslant 0.02$. В дальнейшем в наших расчетах принимается

$$\zeta = -30,$$

что соответствует $4\beta_0/3 \approx -0.02$.

Во внешнее решение входит масса небесного тела M. Это так называемая активная масса, измеряемая наблюдателем по ее гравитационному воздействию на достаточно больших расстояниях, где имеет место закон Ньютона. Для определения этой массы мы будем исходить из теоремы Гаусса, справедливой для статического поля:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = -4\pi M.$$

Из уравнений (15) имеем

$$R_0^0 = 8\pi k\left(T_0^0 + \frac{\zeta - 1}{3 - 2\zeta}\, T\right) - \frac{k'\nu'}{2k}.$$

Подставляя это выражение в формулу Гаусса, находим

$$M = -2\int k\left(T_0^0 + \frac{\zeta - 1}{3 - 2\zeta}\, T\right)\sqrt{-g}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \frac{k'\nu'}{k}\sqrt{-g}\, dV. \tag{27}$$

Для сферически-симметрического распределения материи

$$M = \frac{2}{3 - 2\zeta}\int k\left[(3 - \zeta)\rho + 3(1 - \zeta)P\right]\sqrt{-g}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \frac{k'\nu'}{k}\sqrt{-g}\, dV. \tag{28}$$

Теперь, имея внешнее решение и определение понятия массы M, мы можем сформулировать граничные условия на поверхности конфигурации:

$$P(R) = 0,$$

$$R = \frac{4hBM}{\sqrt{\tau_0}(\tau_0^{-h} - \tau_0^{h})},$$

$$\lambda(R) = 2\ln 2h - 2\ln\left[(h + 0.5)\tau_0^{h} + (h - 0.5)\tau_0^{-h}\right], \tag{29}$$

$$k(R) = \tau_0^{1/(1-2\zeta)},$$

$$k'(R) = \frac{2M}{3 - 2\zeta}\,\frac{1}{R^2}\, e^{\lambda(R)/2}\, \tau_0^{-(2\zeta+1)/2(2\zeta-1)},$$

где R — радиус конфигурации, $\tau_0 \equiv \tau(R)$,

$$h = (4\zeta^2 - 10\zeta + 7)^{1/2}/2(1 - 2\zeta), \qquad B = (2\zeta - 1)/(2\zeta - 3). \tag{30}$$

Для численных значений этих величин имеем

$$\zeta = -30, \qquad h = 0.51234, \qquad B = 0.96825.$$

Необходимо отметить исключительно важное обстоятельство, заключающееся в том, что в эйнштейновском варианте обобщенной теории гравитации метрика, как это явствует из (23), не имеет особенности, присущей шварцшильдовскому решению. Этот замечательный результат дает возможность построения моделей статических сверхплотных конфигураций, обладающих чрезвычайно большими массами.

Займемся теперь изучением предельного перехода к эйнштейновской теории гравитации с постоянной k. Как мы замечаем из вариационного принципа (1), этот переход совершается подстановкой $|1/\zeta| \to 0$. При этом внешнее решение (23) для точечной массы должно перейти в шварцшильдовское решение. Случаи положительных и отрицательных значений ζ нуждаются в отдельном рассмотрении. Напомним, что в этой статье рассматривается только случай $\zeta = -30$. Обратимся к выражениям (23) и учтем численные постоянные, приведенные в (30). Легко заметить, что величина $e^{\lambda(r)}$ равна нулю при $r = 0$, далее, с ростом r она монотонно растет, в окрестности r_0 достигает максимума, после чего асимптотически падает до значения $e^{\lambda(\infty)} = 1$. С увеличением $|\zeta|$ максимум e^{λ} растет и при $\zeta \to -\infty$ уходит в бесконечность. Величина же r_0 при этом приближается к гравитационному радиусу $r_g = 2M$ и в пределе совпадает с ним. При $r \gg r_0$ асимптотическое поведение $e^{\lambda(r)}$ дается шварцшильдовским решением $e^{\lambda} = 1/(1 - r_g/r)$. Внутри же гравитационного радиуса в каждой точке $e^{\lambda(r)} \to 0$. Что касается функции $e^{\lambda(r)}$, то она, являясь монотонно растущей для конечных значений ζ, при $\zeta \to -\infty$ обращается в $1 - r_g/r$ вне гравитационного радиуса и в нуль внутри него.

Выразим теперь r через гравитационный скаляр k, исключив для этого параметр τ. Предполагая $|\zeta| \gg 1$, находим

$$r_0/r \approx k^{-3/4} - k^{-2\zeta}.$$

Устремив теперь $-\zeta$ к бесконечности, получаем в пределе $k(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4/3}$ при $r \leqslant r_g$ и $k(r) = 1$ при $r \geqslant r_g$. Для каждого конечного значения ζ, $k(r)$ представляет собой монотонно растущую гладкую функцию. (Напомним, что в ньютоновском варианте обобщенной теории гравитации область расстояний, где $k(r)$ существенно отличается от постоянной, при $\zeta \to -\infty$ стягивается в точку).

При этом, если вне гравитационного радиуса решение (23) переходит в шварцшильдовское, то внутри гравитационной сферы характер этого решения не соответствует представлениям общей теории относительности.

6. Предварительный анализ задачи показывает, что и в релятивистском варианте обобщенной теории гравитации, наряду с конфигурациями с массами порядка солнечной, возможны статические сверхплотные образования, массы которых на много порядков превышают

массу Солнца. Модели таких гипотетических тел мы называем „гравитарами“, подчеркивая этим, что своими свойствами они обязаны переменности гравитационного скаляра $k(r)$. Радиусы гравитаров порядка и меньше их гравитационного радиуса $R_g = 2M$.

Гравитары обладают чрезвычайно большим дефектом массы $\Delta M = M_0 - M$, где M — активная гравитационная масса, определяемая формулой (28), а M_0 — собственная масса (то есть, масса вещества без учета энергии гравитационного взаимодействия:

$$M_0 = 4\pi \int^{R} \rho e^{\lambda/2} r^2 dr. \tag{31}$$

Это объясняется тем, что внутри (и на поверхности) гравитаров функции $k(r)$, $e^{\lambda(r)}$ и $e^{\nu(r)}$ малы по сравнению с 1 и $M/M_0 \approx \approx \overline{ke^{\nu/2}} \ll 1$.

Гравитационное красное смещение для гравитаров может оказаться порядка собственной частоты испускаемого света. Оно определяется выражением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \sqrt{g_{00}(R)} - 1.$$

Из (29) находим

$$\sqrt{g_{00}(R)} = e^{\nu(R)/2} = \tau_0^{1/2B}.$$

Гравитары характеризуются малыми значениями параметра $\tau_0 \ll 1$, и поэтому

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -1.$$

Будучи массивными объектами, гравитары сравнительно компактны в том смысле, что для них величина $w = M/R \gtrsim 1/2$. Мощное гравитационное поле у их поверхности приводит к сильным отклонениям траектории излучаемого ими же света. Поэтому далекому наблюдателю гравитары могут представиться несравненно увеличенными по своим размерам.

Интегрированию системы (22) с условиям (29) для различных уравнений состояния вещества будут посвящены наши последующие работы.

Выражаем благодарность академику В. А. Амбарцумяну и нашим коллегам В. А. Варданяну, Ю. Л. Вартаняну, Н. Б. Енгибаряну, Р. С. Оганесяну, Д. М. Седракяну и Э. В. Чубаряну за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения. Предварительные расчеты проводились на электронных машинах „Наири“ в ВЦ АН АрмССР, в Бюраканской обсерватории и ее филиале. Мы благодарны руководителям соответствующих лабораторий указанных учреждений за предоставление этой возможности.

Ереванский государственный университет
Бюраканская астрофизическая обсерватория

ON THE RELATIVISTIC GENERALIZED THEORY OF GRAVITATION

G. S. SAHAKIAN, M. A. MNATSAKANIAN

The relativistic version of the generalized theory of gravity is considered. The field equations for internal region of spherically-symmetric distribution of matter are established and the external solutions on the surface of a static configuration are given.

The models of massive superdense static configurations (which are named gravitars) having extraordinarily large gravitational mass-defect and red-shift are built.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Iordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
2. *P. Iordan*, Rev. Mod. Phys., 34, 596, 1962.
3. *C. Brans*, *R. H. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
4. *P. A. M. Dirac*, Nature, 139, 323, 1937; Proc. Roy. Soc., (A) 165, 199, 1938.
5. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, (серия физ.-мат. наук), 11, 9, 1958; Сб. докладов Сольвейской конференции, стр. 241, Брюссель, 1958; Научные труды, том 2, Ереван, 1960,
6. *В. А. Амбарцумян*, Сообщ. Бюр. обс., 13, 1954; Нестационарные звезды, Ереван, 1957, стр. 16.
7. *В. А. Амбарцумян*, Rev. Mod. Phys., 30, 944, 1958.
8. *Г. С. Саакян*, *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 3, 311, 1967.
9. *Г. С. Саакян*, *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 4, 181, 1968.
10. *Г. С. Саакян*, *М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюр. обс. (в печати).
11. *Л. Д. Ландау*, *Е. М. Лифшиц*, Теория поля, М., 1962.