АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 НОЯБРЬ, 1967 ВЫПУСК 4

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СВЕТА

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 6 сентября 1967

Для решения различных задач теории многократного рассеяния света предлагается использование уравнений, содержащих в качестве независимой переменной величину λ. При помощи уравнения (1) находится ряд формул для фундаментальных функций, частично полученных ранее, а частично новых. Моменты функций $\varphi(\eta)$, $\Phi(\tau)$ и $q(\infty)-q(\tau)$ выражаются через моменты функции $f(\zeta)$, определенной формулой (14).

К настоящему времени теория многократного рассеяния света разработана в очень сильной степени. Особенно подробно рассмотрен случай рассеяния света в плоском слое. В этом случае для определения интенсивности излучения получены различные уравнения, в которых независимой переменной является либо оптическая глубина τ, либо угол θ между направлением излучения и нормалью, либо оптическая толщина слоя τ_0. Величина λ, представляющая собой вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния, играет в этих уравнениях роль параметра.

Можно, однако, попытаться составить уравнения для интенсивности излучения, в которых величина λ также является независимой переменной. Такие уравнения, включающие в себя производные и интегралы по λ, будут описывать изменение поля излучения в среде при переходе в ней от одного значения λ к другому.

В настоящей статье мы не предполагаем рассмотреть поставленную задачу в сколько-нибудь общем виде (хотя, как кажется, она и представляет значительный интерес). Здесь будет решена лишь частная задача о рассеянии света в полубесконечной среде путем использования уравнения, в которое входит производная по λ. В результате будет получен ряд формул для величин, характеризующих поле излучения. Некоторые из этих формул уже были найдены раньше, другие, по-видимому, являются новыми. Однако наша цель состоит не столько в получении этих формул, сколько в изложении нового метода их получения.

Основные уравнения. Недавно автором [1] при рассмотрении диффузии излучения в полубесконечной среде с изотропным рассеянием было получено следующее уравнение

$$\lambda \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda} = \Phi_\infty(\tau) + \int_0^\tau \Phi_\infty(\tau - \tau') \Phi(\tau') \, d\tau'. \tag{1}$$

Это уравнение, находимое из довольно простых соображений, будет играть основную роль в данном исследовании.

Как было показано ранее [2], через функцию $\Phi(\tau)$, определенную уравнением

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty E_1 |\tau - \tau'| \Phi(\tau') \, d\tau' + \frac{\lambda}{2} E_1 \tau, \tag{2}$$

выражается резольвента основного интегрального уравнения диффузии излучения в полубесконечной среде. Это значит, что знание функции $\Phi(\tau)$ позволяет определить поле излучения в данной среде при любых действующих в ней источниках излучения (зависящих только от τ).

Функция $\Phi_\infty(\tau)$ представляет собой резольвенту основного интегрального уравнения диффузии излучения в бесконечной среде и определяется уравнением

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1 |\tau - \tau'| \Phi_\infty(\tau') \, d\tau' + \frac{\lambda}{2} E_1 |\tau|. \tag{3}$$

Выражение для функциии $\Phi_\infty(\tau)$ было получено уже давно (см. [3], [4]). Оно имеет вид

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{k(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1} e^{-k\tau} + \int_0^1 R(\zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{4}$$

где k находится из уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1, \tag{5}$$

а

$$R(\zeta) = \frac{2\lambda}{(\lambda\pi\zeta)^2 + \left(2 + \lambda\zeta \ln \dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2}. \tag{6}$$

Пользуясь уравнением (1) и формулой (4), ниже мы получим выражения для различных величин, характеризующих поле излучения в полубесконечной среде. Подчеркнем еще раз, что существенную роль при выводе этих формул будет играть дифференцирование и интегрирование по λ.

Функция $\varphi(\eta)$. Интенсивность излучения, выходящего из полубесконечной среды под углом $\arccos \eta$ к нормали, при различных источниках излучения выражается через функцию $\varphi(\eta)$. Эта функция впервые была введена В. А. Амбарцумяном [5], получившим для ее определения следующее уравнение

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}d\zeta. \tag{7}$$

Затем она была подробно изучена Чандрасекаром [6].

Так как ранее было показано [7], что функция $\varphi(\eta)$ связана с функцией $\Phi(\tau)$ формулой

$$\varphi(\eta) = 1 + \int_0^\infty \Phi(\tau)e^{-\frac{\tau}{\eta}}d\tau, \tag{8}$$

то, используя соотношения (1) и (4), мы легко можем получить явное выражение для $\varphi(\eta)$.

Умножая обе части уравнения (1) на $e^{-\frac{\tau}{\eta}}$ и интегрируя по τ от 0 до ∞, находим

$$\lambda\frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial\lambda} = \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau)e^{-\frac{\tau}{\eta}}d\tau, \tag{9}$$

или, при учете (4),

$$\lambda\frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial\lambda} = \frac{k(1-k^2)}{\lambda+k^2-1}\frac{\eta}{1+k\eta} + \int_0^1 R(\zeta)\frac{\eta d\zeta}{\eta+\zeta}, \tag{10}$$

где $R(\zeta)$ определяется формулой (6)*.

* Формула (10) уже была дана в статье [1] под номером 61, однако в ней допущена опечатка: под знаком интеграла содержится лишний множитель ζ. В подынтегральных же выражениях формул (47) и (53) пропущен множитель $1/\zeta$.

Так как из (5) следует, что

$$\frac{1-k^2}{\lambda+k^2-1} = -\frac{\lambda}{k}\frac{dk}{d\lambda}, \tag{11}$$

то получаем

$$\int_0^\lambda \frac{k'(1-k'^2)}{\lambda'+k'^2-1}\,\frac{\eta}{1+k'\eta}\,\frac{d\lambda'}{\lambda'} = \ln\frac{1+\eta}{1+k\eta}. \tag{12}$$

С другой стороны, имеем

$$\int_0^\lambda R(\zeta)\,\frac{d\lambda'}{\lambda'} = \frac{1}{\zeta}\,f(\zeta), \tag{13}$$

где обозначено

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\pi\zeta}{\frac{2}{\lambda}+\zeta\ln\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}. \tag{14}$$

Поэтому из (10) находим следующее выражение для функции $\varphi(\eta)$:

$$\varphi(\eta) = \frac{1+\eta}{1+k\eta}\,e^{\int_0^1 f(\zeta)\frac{\eta\,d\zeta}{\zeta(\eta+\zeta)}}. \tag{15}$$

Формулу (15) можно также записать в другом виде. Для этого воспользуемся двумя соотношениями

$$\int_0^\infty \Phi_\infty(\tau)\,d\tau = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} \tag{16}$$

и

$$\int_0^\infty \Phi_\infty(\tau)\,d\tau = \frac{1-k^2}{\lambda+k^2-1} + \int_0^1 R(\zeta)\,d\zeta, \tag{17}$$

вытекающими из (3) и (4) соответственно. При помощи формулы (13) и этих соотношений находим

$$\int_0^1 f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'}\int_0^1 R(\zeta)\,d\zeta = \ln\frac{k}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{18}$$

Поэтому вместо (15) имеем

$$\varphi(\eta)=\frac{k}{\sqrt{1-\lambda}}\,\frac{1+\eta}{1+k\eta}\,e^{-\int\limits_0^1 f(\zeta)\frac{d\zeta}{\eta+\zeta}}. \tag{19}$$

Формулы (13) и (19) были раньше получены Малликином [8] (см. также [9]).

Функция $\Phi(\tau)$. Найдем теперь из соотношений (1) и (4) выражение для функции $\Phi(\tau)$. Применяя к (1) одностороннее преобразование Лапласа и обозначая

$$\overline{\Phi}(s)=\int\limits_0^\infty \Phi(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau \tag{20}$$

(и аналогично $\overline{\Phi}_\infty(s)$), получаем

$$\overline{\Phi}(s)=e^{\int\limits_0^\lambda \overline{\Phi}_\infty(s)\frac{d\lambda}{\lambda}}-1. \tag{21}$$

Непосредственно из уравнения (3) имеем

$$\overline{\Phi}_\infty(s)+\overline{\Phi}_\infty(-s)=\frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{2s}\ln\dfrac{1-s}{1+s}}-1. \tag{22}$$

Поэтому вместо (21) находим

$$\overline{\Phi}(s)=\frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{2s}\ln\dfrac{1-s}{1+s}}\,e^{-\int\limits_0^1 \overline{\Phi}_\infty(-s)\frac{d\lambda}{\lambda}}-1. \tag{23}$$

Производя в (23) обращение преобразования Лапласа и учитывая, что правая часть имеет полюс $s=-k$ и точку ветвления $s=-1$, методом контурного интегрирования получаем

$$\Phi(\tau)=Ce^{-k\tau}+\int\limits_0^1 R(\zeta)\,e^{-\frac{\tau}{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta\varphi(\zeta)}, \tag{24}$$

где

$$C=\frac{2k(1-k)}{\lambda+k^2-1}\sqrt{1-\lambda}\,e^{\int\limits_0^1 f(\zeta)\frac{k\,d\zeta}{1+k\zeta}}. \tag{25}$$

Формула (25) при использовании соотношений (19) и (7) приводится к виду

$$C = \frac{k(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1} \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{k(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1}\left[1 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{1+k\zeta}\, d\zeta\right]. \tag{26}$$

Выражение (24), в котором постоянная C определяется формулой (26), было раньше найдено И. Н. Мининым [10].

Заметим, что для определения C может быть также получена формула

$$C = \frac{k(1-k)}{\sqrt{1-\lambda}} e^{\int_0^1 f(\zeta)\frac{k\,d\zeta}{1-k\zeta}}. \tag{27}$$

Мы придем к этой формуле, если уравнение (21) перепишем в виде

$$\overline{\Phi}(s) = \frac{1+s}{k+s} e^{\int_0^1 f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(1+s\zeta)}} - 1 \tag{28}$$

[по аналогии с формулой (15)] и совершим обращение преобразования Лапласа.

Моменты функции $\Phi(\tau)$. При изучении рассеяния света в полубесконечной среде приходится встречаться с моментами функции $\Phi(\tau)$, то есть с величинами

$$A_n = \int_0^\infty \Phi(\tau)\tau^n d\tau. \tag{29}$$

Для нахождения этих величин достаточно подставить в формулу (29) выражение (24) для функции $\Phi(\tau)$. Однако при этом получаются довольно громоздкие формулы (в частности потому, что в (24) входит функция $\varphi(\eta)$, определенная формулой (19)).

Более естественный путь для нахождения величин A_n состоит в использовании уравнения (1), так как эти величины зависят только от λ, а из (1) получаются для них простые дифференциальные уравнения (с производными по λ). В эти уравнения будут также входить и моменты функции $\Phi_\infty(\tau)$ (их мы обозначим через B_n), которые могут быть определены при помощи формулы (4), а для четных n — непосредственно из уравнения (3).

Из уравнения (1) мы имеем

$$\lambda \frac{dA_0}{d\lambda} = B_0 + A_0 B_0, \tag{30}$$

$$\lambda \frac{dA_1}{d\lambda} = B_1 + A_0 B_1 + A_1 B_0, \tag{31}$$

$$\lambda \frac{dA_2}{d\lambda} = B_2 + A_0 B_2 + 2A_1 B_1 + A_2 B_0 \tag{32}$$

и т. д.

Так как величина B_0 определяется формулой (16), то из (30) находим

$$\frac{d \ln (1 + A_0)}{d\lambda} = \frac{1}{2(1-\lambda)}, \tag{33}$$

а значит

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1. \tag{34}$$

При подстановке в уравнение (31) выражений (16) и (34) оно принимает вид

$$\frac{dA_1}{d\lambda} = \frac{B_1}{\lambda \sqrt{1-\lambda}} + \frac{A_1}{2(1-\lambda)}. \tag{35}$$

Интегрирование (35) дает

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \int_0^\lambda B_1 \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{36}$$

При помощи (4) получаем

$$B_1 = \frac{1-k^2}{(\lambda + k^2 - 1)k} + \int_0^1 R(\zeta)\, \zeta \, d\zeta. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36) и пользуясь (11) и (13), находим

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{1-k}{k} + \int_0^1 f(\zeta)\, d\zeta \right]. \tag{38}$$

Для определения величины B_2 достаточно умножить обе части уравнения (3) на τ^2 и проинтегрировать по τ от 0 до ∞. Делая это, имеем

$$B_2 = \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2}. \tag{39}$$

Подстановка (16), (34) и (39) в уравнение (32) дает

$$\frac{dA_2}{d\lambda} = \frac{1}{3(1-\lambda)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{\lambda} A_1 B_1 + \frac{A_2}{2(1-\lambda)}. \tag{40}$$

Интегрируя это уравнение при учете (36), получаем

$$A_2 = \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} + A_1^2 \sqrt{1-\lambda}. \tag{41}$$

Аналогично могут быть определены и другие моменты функции $\Phi(\tau)$. В частности, для величины A_3 имеем

$$A_3 = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{1}{k^3} - 1 + 3 \int_0^1 \zeta^2 f(\zeta)\, d\zeta \right] + \frac{\lambda}{1-\lambda} A_1 + (1-\lambda) A_1^3. \tag{42}$$

Моменты функции $\varphi(\eta)$. При нахождении интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды (в частности из звездной атмосферы), часто встречаются моменты функции $\varphi(\eta)$, то есть величины

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(\eta)\, \eta^n d\eta. \tag{43}$$

Для определения этих величин мы установим их связь с величинами A_n и воспользуемся формулами, полученными выше.

Пусть $p(\tau, \eta)\, d\omega$ вероятность того, что фотон, поглощенный на оптической глубине τ, выйдет из среды под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Как известно (см. [2]), функция $p(\tau, \eta)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) \Phi(\tau), \tag{44}$$

где

$$\frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) = p(0, \eta). \tag{45}$$

и

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{46}$$

Вводя обозначение

$$P_n(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \eta^n d\eta, \tag{47}$$

из (44) получаем

$$\frac{dP_n(\tau)}{d\tau} = -P_{n-1}(\tau) + \frac{\lambda}{2} \alpha_n \Phi(\tau). \tag{48}$$

Интегрируя обе части соотношения (48) по τ в пределах от 0 до ∞ и пользуясь формулой (34), находим

$$\alpha_n = \frac{2}{\lambda} \sqrt{1-\lambda} \int_0^\infty P_{n-1}(\tau) d\tau. \tag{49}$$

Полагая в (49) $n=0$ и учитывая, что $P_{-1}(\tau) = \Phi(\tau)$, имеем

$$\alpha_0 = A_0 \frac{2}{\lambda} \sqrt{1-\lambda}. \tag{50}$$

Отсюда, на основании (34), следует

$$\alpha_0 = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda}). \tag{51}$$

Полагая в (49) $n=1$, производя интегрирование по частям и учитывая соотношение

$$\frac{dP_0(\tau)}{d\tau} = -\Phi(\tau) \sqrt{1-\lambda}, \tag{52}$$

вытекающее из (48) при $n=0$, находим

$$\alpha_1 = \frac{2}{\lambda} (1-\lambda) A_1. \tag{53}$$

Аналогично при $n=2$ и $n=3$ из (49) соответственно получаем

$$\alpha_2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} A_2 - \alpha_1 A_1 \sqrt{1-\lambda}, \tag{54}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{1-\lambda}\left[\frac{\sqrt{1-\lambda}}{3\lambda} A_3 - \frac{\alpha_1}{2} A_2 - \alpha_2 A_1\right]. \tag{55}$$

Теперь мы подставим в формулы для величин α_1, α_2 и α_3 найденные выше выражения (38), (41) и (42) для величин A_1, A_2 и A_3. В результате имеем

$$\alpha_1 = \frac{2}{\lambda}\sqrt{1-\lambda}\left[\frac{1-k}{k} + \int_0^1 f(\zeta)\,d\zeta\right], \tag{56}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3\sqrt{1-\lambda}} - \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\left[\frac{1-k}{k} + \int_0^1 f(\zeta)\,d\zeta\right]^2, \tag{57}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{1-\lambda}}{3\lambda}\left\{2\left(\frac{1}{k^2}-1\right) + 6\int_0^1 \zeta^2 f(\zeta)\,d\zeta - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[\frac{1-k}{k} + \int_0^1 f(\zeta)\,d\zeta\right] + \left[\frac{1-k}{k} + \int_0^1 f(\zeta)\,d\zeta\right]^3\right\}. \tag{58}$$

Заметим, что из (56) и (57) вытекает следующая связь между моментами α_1 и α_2:

$$\alpha_2\sqrt{1-\lambda} = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4}\alpha_1^2. \tag{59}$$

Как известно, формула (51) для нулевого момента функции $\varphi(\eta)$ получается непосредственно из уравнения (7). Из того же уравнения могут быть найдены (см. [11]) и выражения для всех четных моментов через предшествующие [в частности, формула (59)]. Однако выражения для моментов α_1, α_2 и α_3, данные нами формулами (56), (57) и (58), из уравнения (7) получить не удается. Очевидно, что изложенным способом могут быть найдены и последующие моменты функции $\varphi(\eta)$.

Случай чистого рассеяния. Применим полученные выше формулы к случаю чистого рассеяния ($\lambda = 1$). Как было показано ранее [7], в данном случае функция $\Phi(\tau)$ связана с функцией Хопфа $q(\tau)$ соотношением

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + \int_0^\tau \Phi(\tau)\,d\tau\right] - \tau. \tag{60}$$

Подставляя (24) в (60) и полагая $k^* \to 0$, мы приходим к известному выражению для функции $q(\tau)$, полученному впервые Марком [12] (см. также [10]).

При $\lambda = 1$ моменты функций $\Phi(\tau)$ и $q(\tau)$ обращаются в бесконечность. Однако легко могут быть найдены моменты функции $q(\infty) - q(\tau)$. Для этого проинтегрируем обе части уравнения (48) от 0 до τ и воспользуемся формулой (60). В результате находим

$$P_n(\tau) = -\int_0^\tau P_{n-1}(\tau)\,d\tau + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_n[\tau + q(\tau)]. \tag{61}$$

Полагая в (61) $\tau \to \infty$, получаем

$$P_{n-1}(\infty) = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \tag{62}$$

$$P_n(\infty) = \int_0^\infty [P_{n-1}(\infty) - P_{n-1}(\tau)]\,d\tau + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} q(\infty), \tag{63}$$

где принято во внимание, что $\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Из (62) и (63) следует

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1} = \int_0^\infty [P_{n-1}(\infty) - P_{n-1}(\tau)]\,d\tau + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} q(\infty). \tag{64}$$

Так как $P_0(\tau) = 1$, то из (64) при $n = 1$ имеем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = q(\infty). \tag{65}$$

При $n = 2$, учитывая, что $P_1(\tau) = q(\tau)$, из (64) получаем

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \int_0^\infty [q(\infty) - q(\tau)]\,d\tau + q^2(\infty). \tag{66}$$

Полагая в (64) $n = 3$ и пользуясь снова уравнением (48), находим

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \int_0^\infty [q(\infty) - q(\tau)]\,\tau\,d\tau + \frac{3}{5} q(\infty). \tag{67}$$

Аналогично формулам (66) и (67) могут быть получены и другие формулы, выражающие последующие моменты функции $q(\infty)-q(\tau)$ через моменты функции $\varphi(\eta)$.

В свою очередь выражения для моментов функции $\varphi(\eta)$ при $\lambda=1$ находятся из приведенных выше формул для величин α_n при произвольном λ. Из формул (51) и (56) при $k\to 0$ следует, что $\alpha_0=2$ и $\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Из формулы (57) при $k\to 0$ получается соотношение (65), в котором величина $q(\infty)$ определяется формулой

$$q(\infty)=1-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{\pi\zeta}{2+\zeta\ln\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}\,d\zeta. \tag{68}$$

Полагая $k\to 0$ в формуле (58), находим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\frac{3}{10}+\frac{1}{2}q^2(\infty). \tag{69}$$

Из формулы (58) можно также определить величину α_4 при $\lambda=1$. Для этого мы должны воспользоваться формулой

$$\varphi(\eta,\lambda)=\varphi(\eta,1)(1-k\eta), \tag{70}$$

справедливой при малых k (см. [12]).

Так как

$$\alpha_3(\lambda)=\alpha_3(1)-k\alpha_4(1), \tag{71}$$

то, производя разложение в формуле (58) по степеням k, получаем

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_1}=b+\frac{3}{10}q(\infty)+\frac{1}{6}q^3(\infty), \tag{72}$$

где обозначено

$$b=\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \zeta^2\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi\zeta}{2+\zeta\ln\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}\,d\zeta. \tag{73}$$

Таким образом, моменты функций $\varphi(\eta)$, $\Phi(\tau)$ и $q(\infty)-q(\tau)$ выражаются через моменты функции $f(\zeta)$, определяемой формулой (14).

Ленинградский государственный
университет

ON SOME FUNCTIONS ENCOUNTERED IN THE THEORY OF LIGHT SCATTERING

V. V. SOBOLEV

It is proposed to use in the theory of multiple light scattering equations containing λ as an independent variable. With the aid of the equation (1) several formulae are found for the fundamental functions of the theory. Some of them are known, the others are new. The moments of the functions $\varphi(\eta)$, $\Phi(\tau)$ and $q(\infty)-q(\tau)$ are expressed in terms of the moments of the function $f(\zeta)$ given by the formula (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 239, 1966.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
3. *K. M. Case, F. Hoffman, G. Placzek*, Introduction to the theory of neutron diffusion, I. Los Alamos Scientific Laboratory, 1953.
4. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 129, 1265, 1959.
5. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, № 5, 1942.
6. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953.
7. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 116, 45, 1957.
8. *T. W. Mullikin*, Trans. Amer. Math. 113, 316, 1964.
9. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser. 12, № 113, 1966.
10. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
11. *I. W. Busbridge*, The Mathematics of Radiative Transfer, 1960.
12. *C. Mark*, Phys. Rev., 72, 558, 1947.
13. *H. C. van de Hulst*, в сб. „The Atmospheres of the Earth and Planets“, 1947, (русск. перевод: „Атмосферы Земли и планет“, ИЛ, 1951).